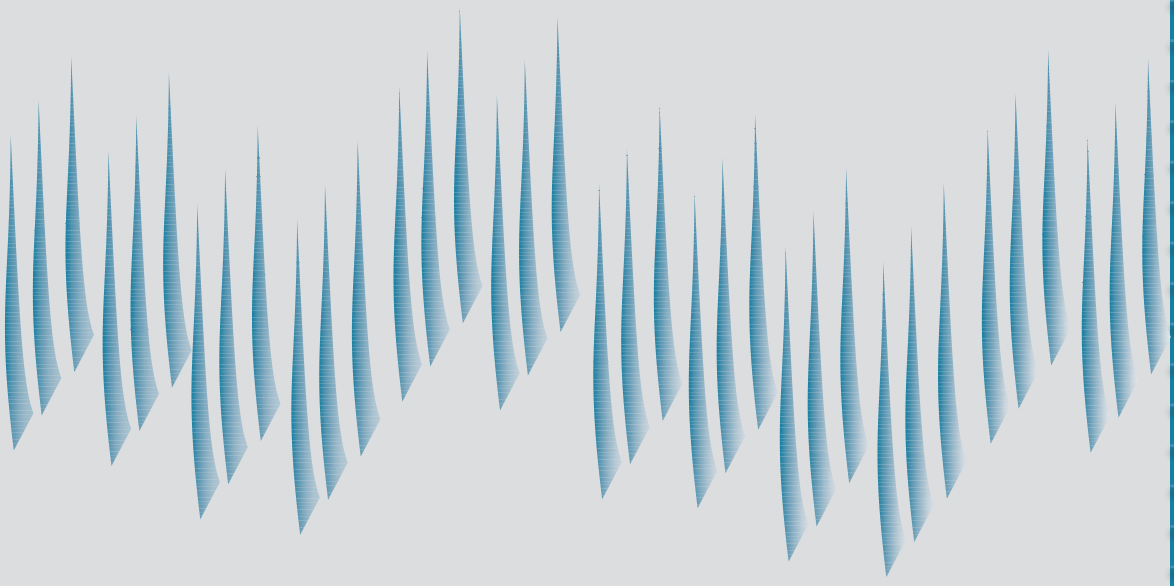


# MITTAUS- JA KARTOITUSTEKNIIKAN PERUSTEET

Pasi Laurila

Rovaniemen
ammattikorkeakoulu
University of Applied Sciences

# MITTAUS- JA KARTOITUSTEKNIIKAN PERUSTEET

Pasi Laurila

2012

**ROVANIEMEN AMMATTIKORKEAKOULU**
Julkaisutoiminta
Jokiväylä 11 C
96300 Rovaniemi
puh. 020 798 5454
www.ramk.fi/julkaisutoiminta
julkaisut@ramk.fi

4. uudistettu painos
ISSN 1239-775X
ISBN 978-952-5923-42-1 (nid.)
ISBN 978-952-5923-43-8 (ePub)
ISBN 978-952-5923-44-5 (PDF)

Rovaniemen ammattikorkeakoulun julkaisusarja D nro 3

© RAMK University of Applied Sciences

Rovaniemi 2012

Paino Kopijyvä Oy, Jyväskylä
Taitto Erja Hirvonen, Kopijyvä Oy

# ALKUSANAT

Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirjan ensimmäinen painos julkaistiin syksyllä 2008. Tämän jälkeen kirjasta on otettu kaksi uusintapainosta. Nyt ilmestyvää kirjan neljättä painosta on monin tavoin täydennetty ja uudistettu aikaisempiin painoksiin verrattuna. Tärkeimpiä täydennyksiä ovat kirjan alun lyhenteet, laserkeilausta käsittelevä luku ja tehtävien vastaukset. Myös runkomittauksia esitellään aikaisempaa laajemmin.

Insinöörien työ liittyy tarkoituksenmukaisten ja työtä säästävien teknisten ja teknologisten keinojen tuntemukseen, kehittämiseen ja käyttötaitoon. Maanmittauksessa käytettävät mittauslaitteet ja – menetelmät kehittyvät ja automatisoituvat nopeasti. Tämä on lähtökohtaisesti myönteistä kehitystä. Takymetrimittaus, laserkeilaus ja satelliittipaikannuksen tekniikat ovat mittaustekniikan alueita, joiden kehitys on ollut erityisen merkittävää.

Teknisen kehityksen myötä näkemys mittaamisesta on muuttumassa. Perinteisesti mittaaja on pystyttänyt kojeen huolellisesti asemapisteelle, harkinnut mitä mittaa ja mitannut kohteesta yksittäisiä pisteitä. Tarvittaessa pisteitä on yhdistetty viivoiksi, alueiksi ja pinnoiksi. Nykyinen tekniikka mahdollistaa kohteen kattamisen mittauspisteiden pilvellä. Mittaukset on pääosin mahdollista tehdä automaattisesti. Jälkeenpäin katsotaan, mitä mittauksista saadaan irti tulkitsemalla ja mallintamalla kohde tietotekniikan tarjoamin keinoin.

Usein törmää näkemyksiin, että jokin yksittäinen nykyaikainen mittauskoje tai – tekniikka riittää lähes kaikkeen mittaamiseen. Tämä on jotenkin ymmärrettävää puhetta, jos mittauksiin liittyvät työtehtävät ovat rajallisia. Mittauksiin erikoistuneen insinöörin näkökulmasta tällaista näkemystä ei kuitenkaan kannata viljellä. Mittauksia tehdään erilaisissa ympäristöissä ja tarkoituksissa. Olosuhteet ja laatuvaatimukset vaihtelevat. Mittauslaitteilla ja – tekniikoilla on niille optimaalinen ja tarkoituksenmukainen käyttö- ja sovellusalueensa. Vaikka huomattava osa mittauksista voidaankin tehdä nykyaikaisilla takymetreillä, satelliittipaikantimilla ja keilaimilla, aina on tilaa ja tarvetta myös yksinkertaisille mittalaitteille ja erikoismittausvälineille.

Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirja on tarkoitettu maastossa ja rakennuksilla tehtävien mittausten perusteiden opiskeluun ammattikorkeakoulujen maanmittaus- ja rakennustekniikan koulutusohjelmissa. Kirjassa tarkastellaan mittaus- ja kartoitustekniikan teoreettisia perusteita, mittauksissa käytettäviä kojeita ja mittausmenetelmiä. Kun kyseessä on perusteita käsittelevä kirja, siinä on pyritty

tarjoamaan alan opiskelijoille kokonaiskuva kirjan aihepiiriin kuuluvista asioista. Tämän vuoksi kirjaan sisältyy sellaisiakin asioita, joiden perusteita ja merkitystä ei ole mahdollista tuoda kunnolla esille. Monia käytännön asioita on vaikea kuvata sanallisesti, joten joidenkin kirjan asioiden ymmärtäminen on mahdollista vasta kokemuksen kautta, kun on oppinut käyttämään esiteltyjä kojeita ja menetelmiä.

Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirjaa voi käyttää eri tavoin. Sitä voi tutkia järjestyksessä tai sen voi aloittaa haluamastaan luvusta. Kirjan avulla voi tutustua mittaus- ja kartoitustekniikan teoreettisiin perusteisiin tai mittauskojeisiin. Joku lukijoista voi olla kiinnostunut kirjan tehtävistä ja joku toinen voi haluta kerrata mittaus- ja kartoitustekniikan käsitteitä. Kirja ei ole tarkoitettu minkään tietyn opintojakson oppikirjaksi, koska sellaiseen tarkoitukseen se on sisällöltään liian laaja. Maanmittausinsinöörikoulutuksessa (AMK) tavoitteena on, että kaikki kirjan aiheet käytäisiin opintojen aikana kertaalleen lävitse vähintään kirjan kuvaamalla tietämyksen tasolla.

Kirjoissa on aina virheitä ja epäloogisuuksia. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirjan aikaisemmissa painoksissa havaitut virheet on yritetty korjata tähän painokseen. Kiitän kaikkia kirjan sisällön parantamiseen liittyvää palautetta antaneita lukijoita. Erityisesti kiitän geodesian ja fotogrammetrian emeritus professori Hannu Salmenperää hänen antamastaan yksityiskohtaisesta palautteesta. Uudistettu painos tuo mukanaan varmaankin uusia virheitä. Tämän vuoksi toivon edelleen lukijoiden rakentavaa palautetta, jonka perusteella kirjan sisältöä voidaan parantaa mahdollisissa uusintapainoksissa.

Tietokirjan kirjoittaminen on pitkäjänteistä työtä. Osa tämän kirjan teksteistä ja kuvista on peräisin jo 20-vuoden takaa. Kiitän Rovaniemen ammattikorkeakoulua mahdollisuudesta julkaista kirja ja kirjoittamisen tukemisesta.

Rovaniemellä 13.6.2012

*Pasi Laurila*

# SISÄLLYS


**1 PERUSTEET ..... 1**

**1.1 Geodesia ja mittaus- ja kartoitustekniikka ..... 2**

1.1.1 Maanmittaustekniikan osa-alueet ..... 2
1.1.2 Geodesia ..... 4
1.1.3 Mittaus- ja kartoitustekniikka ..... 5

**1.2 Sijaintimittaukset ..... 7**

1.2.1 Taso- ja korkeussijainti ..... 7
1.2.2 Kiintopisteet ..... 8
1.2.3 Pisteselityskortti ..... 10
1.2.4 Runkoverkko ja runkomittaukset ..... 12

**1.3 Mittausmenetelmät ja -kojeet ..... 14**

1.3.1 Mittausmenetelmän käsite ..... 14
1.3.2 Mitattavat suureet ..... 15
1.3.3 Mittauskojeet ..... 16
1.3.4 Kojejalustat ja kartoitussauvat ..... 18
1.3.5 Tasaimet ..... 21
1.3.6 Mittauskaukoputki ..... 22

**1.4 Sähkömagneettinen säteily ..... 23**

**1.5 Tehtäviä ..... 26**

**2 MITTAUSTEKNINEN LASKENTA ..... 27**

**2.1 Geodeettinen laskenta ..... 28**

**2.2 Mittayksiköt ja mittakaava ..... 30**

2.2.1 Pituuden yksiköt ..... 30
2.2.2 Kulmayksiköt ..... 30
2.2.3 Mittakaava ..... 32
2.2.4 Tehtäviä ..... 33

**2.3 Virheet ja tarkkuus ..... 33**

2.3.1 Merkitsevät numerot ..... 33
2.3.2 Virhe, korjaus ja tarkkuus ..... 34
2.3.3 Virheiden luokittelu ..... 35
2.3.4 Virheolettamukset ..... 36
2.3.5 Satunnaisten virheiden arviointi toistomittauksessa ..... 37
2.3.6 Satunnaisten virheiden yhdistäminen ..... 38
2.3.7 Virhe-ellipsit ..... 39
2.3.8 Yleiset tavoitetarkkuudet ..... 40
2.3.9 Hyvä mittaustapa ..... 41
2.3.10 Tehtäviä ..... 42

**2.4 Kolmion ratkaisut ..... 43**

2.4.1 Suorakulmainen kolmio ..... 43
2.4.2 Määräinen kolmio ..... 44
2.4.3 Tehtäviä ..... 46

**2.5 Koordinaattien laskennan peruskaavat ..... 48**
2.5.1 Suorakulmainen koordinaatisto ja suuntakulma ..... 48
2.5.2 Geodeettinen käänteistehtävä ..... 49
2.5.3 Koordinaatiston neljänneksen tutkiminen ..... 51
2.5.4 Geodeettinen päätehtävä ..... 53
2.5.5 Tehtäviä ..... 54

**2.6 Takymetrimittauksen peruskaavat ..... 59**
2.6.1 Kulmakäsitteet ..... 59
2.6.2 Säteittäinen mittaus ..... 60
2.6.3 Trigonometrinen korkeudenmittaus ..... 61
2.6.4 Tehtäviä ..... 62

**2.7 Geodeettiset leikkaukset ..... 63**
2.7.1 Mittauksen kolmio ja sen ratkaisut ..... 63
2.7.2 Kaarileikkaus ..... 65
2.7.3 Eteenpäinleikkaus ..... 67
2.7.4 Taaksepäinleikkaus ..... 68
2.7.5 Taaksepäinleikkauksen vaarallinen ympyrä ..... 70
2.7.6 Tehtäviä ..... 71

**2.8 Kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus ..... 72**

**2.9 Pienimmän neliösumman periaate ja tasoituslaskenta ..... 74**
2.9.1 Ylimääritetty mittaus ..... 74
2.9.2 Pienimmän neliösumman periaate ..... 75
2.9.3 Tasoituslaskennan laskentaohjelmat ..... 77
2.9.4 Tehtäviä ..... 79

**2.10 Helmertin muunnos ..... 80**
2.10.1 Alkuasetelma ..... 80
2.10.2 Helmertin muunnoksen muunnoskaavat ..... 81
2.10.3 Muunnosparametrit kahden pisteen avulla ..... 83
2.10.4 Muunnosparametrit ylimääritetyssä mittauksessa ..... 84
2.10.5 Jäännösvirheet ja muunnoksen tarkkuus ..... 86
2.10.6 Muunnosparametrit muista lähtötiedoista ..... 87
2.10.7 Tehtäviä ..... 88

**3 SUUNNITTELUTEKNINEN LASKENTA ..... 91**

**3.1 Suunnitteluteknisen laskennan tehtävät ..... 92**

**3.2 Linjauksen suunnittelu ..... 93**
3.2.1 Tien mittalinja ..... 93
3.2.2 Pääpistelaskenta ..... 94
3.2.3 Suora-ympyrä-suora -elementtiryhmä ..... 96
3.2.4 Klotoidi ..... 98
3.2.5 Tehtäviä ..... 100

**3.3 Pinta-alojen määrittäminen ..... 104**
3.3.1 Geometristen kuvioiden pinta-alat ..... 104
3.3.2 Pinta-ala koordinaateista ..... 105
3.3.3 Pinta-alojen mittaaminen ..... 108
3.3.4 Tehtäviä ..... 109

**3.4 Tilavuuksien määrittäminen ..... 114**
3.4.1 Tilavuuslaskennan periaatteet ..... 114
3.4.2 Katkaistun pyramidin tilavuus ..... 116
3.4.3 Simpsonin menetelmä ..... 118
3.4.4 Kiilan tilavuus ..... 119
3.4.5 Poikkileikkauksiin perustuva tilavuuslaskenta ..... 120
3.4.6 Tilavuuslaskennan summakaavat ..... 121
3.4.7 Vaakasuorien poikkileikkausten muodostaminen ..... 122
3.4.8 Ruutuverkkomenetelmät ..... 124
3.4.9 Maastomalliin perustuva tilavuuslaskenta ..... 125
3.4.10 Tehtäviä ..... 128

**4 KOORDINAATTI- JA KORKEUSJÄRJESTELMÄT ..... 133**

**4.1 Monenlaisia koordinaatteja ..... 134**

**4.2 Maan muoto ja mittasuhteet ..... 135**
4.2.1 Maan muodon mallintaminen ..... 135
4.2.2 Painovoima ja geoidi ..... 136
4.2.3 Pyörähdysellipsoidi ..... 137
4.2.4 Tehtäviä ..... 139

**4.3 Koordinaatistot ..... 139**
4.3.1 Koordinaatisto ja koordinaattijärjestelmä ..... 139
4.3.2 Maantieteellinen koordinaatisto ..... 140
4.3.3 Ellipsoidikeskinen suorakulmainen koordinaatisto ..... 142
4.3.4 Karttaprojektiot ..... 143
4.3.5 Kartan kuvaustekniset ominaisuudet ..... 147
4.3.6 Mercatorin projektio ja suorakulmainen koordinaatisto ..... 149
4.3.7 Tehtäviä ..... 152

**4.4 Koordinaattijärjestelmät ..... 154**
4.4.1 Geodeettinen datumi ..... 154
4.4.2 Kartastokoordinaattijärjestelmä ..... 156
4.4.3 KKJ:n suorakulmaiset koordinaatit ..... 157
4.4.4 World Geodetic System 1984 ..... 160
4.4.5 European Terrestrial Reference System 1989 ..... 160
4.4.6 ETRS89:n suorakulmaiset koordinaatit ..... 161
4.4.7 Tehtäviä ..... 163

**4.5 Korkeusjärjestelmät ..... 165**
4.5.1 Kahdenlaisia korkeuksia ..... 165
4.5.2 Fennoskandian maannousu ..... 166
4.5.3 Suomen korkeusjärjestelmät ..... 168

**4.6 Koordinaattien muuntaminen ..... 169**
4.6.1 Koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset ..... 169
4.6.2 Kartastokoordinaattijärjestelmät erityispiirteet ..... 172
4.6.3 Korkeuksien muuntaminen ..... 174
4.6.4 Tehtäviä ..... 177

**5 APUMITTAUKSET ..... 179**

**5.1 Etäisyydenmittaustavat ..... 180**

**5.2 Etäisyydenmittaus mittanauhalla ..... 181**

5.2.1 Mittanauhamittauksen välineet ..... 181
5.2.2 Mittanauhan lukeminen ..... 182
5.2.3 Mittanauhamittauksen korjaukset ..... 184
5.2.4 Porras- ja vinomittaus ..... 185
5.2.5 Tehtäviä ..... 186

**5.3 Suorakulmainen mittaus ..... 187**

5.3.1 Kaksoispentagonprisma ..... 187
5.3.2 Suorakulmainen mittaus ja sen laskennat ..... 188
5.3.3 Tehtäviä ..... 190

**5.4 Korkeuksien määrittäminen klinometrillä ..... 191**

**5.5 Suuntien määrittäminen ..... 192**

5.5.1 Suuntakäsite ..... 192
5.5.2 Vertailusuunnat ..... 193
5.5.3 Suuntien ja niiden erojen nimitykset ..... 196
5.4.4 Suunnanmääritys ..... 197
5.4.5 Tehtäviä ..... 201

**6 VAAITUS ..... 203**

**6.1 Korkeuserojen mittaustavat ..... 204**

**6.2 Vaaituksen periaate ..... 205**

**6.3 Vaaituskojeet ..... 207**

6.3.1 Itsetasaava vaaituskoje ..... 207
6.3.2 Latat ..... 209
6.3.3 Vaaituskojeen peruskäyttö ..... 210
6.3.4 Vaaituksen tarkkuus ..... 212
6.3.5 Vaaituskojeiden ryhmittely ..... 213
6.3.6 Tarkkavaaituskojeet ..... 215
6.3.7 Digitaaliset vaaituskojeet ..... 217
6.3.8 Tasolaserit ja muut laserkojeet ..... 217

**6.4 Jonovaaitus ..... 219**

6.4.1 Jonovaaituksen periaate ..... 219
6.4.2 Havaintojen kirjaaminen ..... 220
6.4.3 Jonovaaituksen perinteinen havaintokirjanpito ..... 221

**6.5 Jonovaaitus korkeusrunkomittausmenetelmänä ..... 222**

6.5.1 Korkeusrunkomittaukset ..... 222
6.5.2 Jonovaaituksen suoritus ..... 223
6.5.3 Sulkuvirhe ja suhteellinen tarkkuus ..... 225
6.5.4 Jonovaaituksen tasoittaminen ..... 226

**6.6 Pintavaaitus ..... 228**

6.6.1 Pintavaaituksen suoritus ..... 228
6.6.2 Korkeuskäyrät ..... 230

**6.7 Optinen etäisyydenmittaus ..... 231**

**6.8 Tehtäviä ..... 232**

**7 TAKYMETRIMITTAUS ..... 237**

**7.1 Takymetri ..... 238**
7.1.1 Kulmanmittauskojeet ..... 238
7.1.2 Takymetrin pääosat ..... 239
7.1.3 Kojejalustat, prismat ja prismasauvat ..... 242
7.1.4 Maastotallennin ..... 244

**7.2 Kulman- ja etäisyydenmittaus ..... 244**
7.2.1 Kojeasennot ..... 244
7.2.2 Tähtäys kohteeseen ..... 246
7.2.3 Sähköinen kulmanluku ..... 247
7.2.4 Yksinkertainen kulmanmittaus ..... 248
7.2.5 Elektro-optinen etäisyydenmittaus ..... 249
7.2.6 Tehtäviä ..... 252

**7.3 Takymetrin orientointi ..... 252**
7.3.1 Keskistys ja tasaus ..... 252
7.3.2 Kojekorkeuden mittaus ..... 256
7.3.3 Orientointi tunnetulle pisteelle ..... 257
7.3.4 Orientointi vapaalle asemapisteelle ..... 259
7.3.5 Tehtäviä ..... 261

**7.4 Takymetrimittaukset ..... 262**
7.4.1 Piiloviiva ja luoksepääsemätön kohde ..... 262
7.4.2 Kartoitusmittaukset ..... 262
7.4.3 Maastomallimittaukset ..... 265
7.4.4 Rakentamisen mittaukset ..... 266
7.4.5 Tehtäviä ..... 268

**7.5 Laserkeilaus ..... 269**
7.5.1 Ilmalaserkeilaus ..... 269
7.5.2 Maalaserkeilaus ..... 271

**7.6 Takymetrimittausten kehitys ..... 274**
7.6.1 Teodoliitista robottitakymetriksi ..... 274
7.6.2 Mittauskojeiden ja –tekniikoiden integraatio ..... 277

**8 SATELLIITTIMITTAUS ..... 279**

**8.1 Paikannusta satelliittien avulla ..... 280**

**8.2 Global Positioning System ..... 282**
8.2.1 GPS-järjestelmän osat ..... 282
8.2.2 Satelliittien ratojen esittäminen ..... 285
8.2.3 GPS-signaali ..... 286
8.2.4 Aika ..... 287
8.2.5 Tehtäviä ..... 289

**8.3 Global Navigation Satellite System ..... 289**

**8.4 Satelliittipaikannuksen mittaustavat ..... 291**
8.4.1 Paikannuksen periaate ..... 291
8.4.2 Havaintosuureet ..... 292
8.4.3 Kolme perusmittaustapaa ..... 293

**8.5 Absoluuttinen paikannus ..... 295**
8.5.1 Sijainnin määritys ..... 295
8.5.2 Signaalin viivytys ..... 296
8.5.3 Paikantimen kellon käyntivirhe ..... 298
8.5.4 Absoluuttisen paikannuksen laajennuksia ..... 299

**8.6 Differentiaalinen paikannus ..... 299**

**8.7 Suhteellinen mittaus ..... 301**
8.7.1 Vaihehavainnot ..... 301
8.7.2 Erotushavainnot ja paikkavektori ..... 302
8.7.3 Alkutuntemattomat ja mittauksen alustus ..... 304

**8.8 Satelliittimittausten tarkkuus ..... 305**
8.8.1 Tarkkuuteen vaikuttavat tekijät ..... 305
8.8.2 Ionosfääri ja monitieheijastukset ..... 306
8.8.3 Satelliittigeometria ..... 308
8.8.4 DOP-luvut ..... 308
8.8.5 Paikannuksen tarkkuus ..... 310
8.8.6 Suhteellisen mittauksen tarkkuus ..... 313
8.8.7 Yhteenveto ..... 315
8.8.8 Tehtäviä ..... 316

**8.9 Reaaliaikaiset kinemaattiset mittaustavat ..... 316**
8.9.1 Geodeettiset satelliittivastaanottimet ..... 316
8.9.2 RTK-mittaus ..... 319
8.9.3 Verkko-RTK-mittaus ..... 320

**9 TASORUNKOMITTAUS ..... 323**

**9.1 Tasorunkomittaukset ..... 324**
9.1.1 Runkomittausten merkitys ..... 324
9.1.2 Mittausohjeet ja kiintopisteiden luokittelu ..... 324
9.1.3 Absoluuttinen ja suhteellinen virhe-ellipsi ..... 326
9.1.4 Kiintopisteet mitataan ryhmänä ..... 327
9.1.5 Tasorunkomittausten menetelmät ..... 329

**9.2 Takymetrihavaintojen korjaukset ..... 330**
9.2.1 Havaintojen esikäsittely ..... 330
9.2.2 Prismavakio ..... 330
9.2.3 Sääkorjaus ..... 332
9.2.4 Korkeustason ja karttaprojektion huomiointi ..... 334
9.2.5 Trigonometrisen korkeudenmittauksen korjaukset ..... 337
9.2.6 Tehtäviä ..... 339

**9.3 Sarjahavaintomenetelmä ..... 340**
9.3.1 Kulmanmittauskojeen akselivirheet ..... 340
9.3.2 Perinteinen sarjahavaintomenetelmä ..... 341
9.3.3 Piste pois -menetelmä ..... 342
9.3.4 Pystykulmien havaitseminen ..... 343
9.3.5 Asematasoitus ..... 345
9.3.6 Tehtäviä ..... 346

**9.4 Jonomittauksen esimerkki ..... 349**
9.4.1 Jonomittausten muodot ..... 349
9.4.2 Esimerkkijono ..... 350
9.4.3 Jonomittauksen virheet ja tarkkuus ..... 353
9.4.4 Tehtäviä ..... 356

**9.5 Runkomittausta satelliittien avulla ..... 358**

**10 KOJEIDEN KÄSITTELY JA KALIBROINTI ..... 361**

**10.1 Mittausvälineiden käsittely ..... 361**

**10.2 Kalibrointitoiminta ..... 364**

10.2.1 Kalibrointi ..... 364
10.2.2 Kalibrointilajit ..... 364
10.2.3 Kalibrointi- ja huoltorytmi ..... 365

**10.3 Mittauskojeiden tarkastusmenetelmät ..... 366**

10.3.1 Tasainten tarkastus ..... 366
10.3.2 Suuntakollimaattori ..... 367
10.3.3 Vaaituskojeen tarkastus ..... 368
10.3.4 Akselivirheiden määritys ..... 371
10.3.5 Prismavakion tarkastus ..... 373
10.3.6 Optisen luodin tarkastus ..... 374

**10.4 Tehtäviä ..... 375**

**11 KIRJALLISUUTTA ..... 377**

**12 INTERNETSIVUSTOJA ..... 383**

**13 TEHTÄVIEN VASTAUKSET ..... 385**

**14 HAKEMISTO ..... 401**

# KESKEISET KÄSITTEET

Geodesia

Geodesia on tiede, joka käsittelee Maan koon ja muodon mittaamista ja maanpinnan kohteiden kuvaamista. Geodesia muodostaa maanmittaustekniikan tieteellisen perustan mittaamisen ja kartoittamisen näkökulmasta.

Mittaus- ja kartoitustekniikka

Mittaus- ja kartoitustekniikassa on kyse maastossa ja rakennustyömailla tehtävistä runko-, kartoitus-, maastomalli- ja merkintämittauksista ja näissä mittauksissa käytettävistä mittauskojeista ja -menetelmistä.

Luotiviiva

Luotiviiva on painovoiman määrittämä pystysuora. Se voidaan muodostaa langan varassa vapaasti riippuvan painon eli luodin avulla. Luotiviiva on yksi perussuunnista, johon mittaukset sidotaan.

Koordinaatit

Koordinaatit ovat kahden tai kolmen mittaluvun ryhmä, joka ilmoittaa kohteen sijainnin.

Sijaintimittaukset

Sijaintimittausten avulla määritetään mittauskohteiden koordinaatit eli taso- ja korkeussijainti.

Tasosijainti

Kohteen tasosijainti ilmoitetaan kahden koordinaatin avulla pallo- tai tasopinnalla. Maapallon pinnalla käytetään kulmamittaisia maantieteellisiä koordinaatteja. Tasopinnalla käytetään metrimittaisia suorakulmaisia koordinaatteja.

Korkeussijainti

Korkeussijainti ilmoitetaan korkeuden avulla. Korkeus on kohteen etäisyys sovitusta vaakasuorasta vertailupinnasta. Yleensä vertailupintana on merenpinnan taso. Korkeus on siis kohteen pystysuora etäisyys merenpinnasta tai sen kuvitellulta jatkeelta.

Kiintopisteet

Kiintopisteet ovat koordinaateiltaan ja/tai korkeudeltaan tunnettuja pisteitä. Niiden avulla kiinnitytään mittauspaikan koordinaatti- ja korkeusjärjestelmään. Kiintopisteitä kutsutaan myös runkopisteiksi, lähtöpisteiksi, liitospisteiksi tai tukipisteiksi.

Runkomittaukset

Runkomittausten avulla tehdään mittauspaikalle koordinaatisto ja korkeuksien vertailutaso. Mittausten yhteydessä maastoon rakennetaan pysyviä pistemerkkejä eli kiintopisteitä, joille mitataan koordinaatit ja korkeudet halutussa koordinaatti- ja korkeusjärjestelmässä. Runkomittauksia voidaan kutsua myös kiintopistemittauksiksi.

Kartoitusmittaukset

Kartoitusmittausten tavoitteena on ylläpitää maaston mallia ja karttakuvaa paikkatietojen esittämistä, maankäytön suunnittelua ja rakentamisen tarpeita varten. Kartoitusmittausten tulokset voidaan esittää numeerisena ja graafisena karttana.

Maastomallimittaukset

Maastomallimittausten tavoitteena on tehdä mittauskohteen numeerinen maastomalli, joka sisältää maanpinnan korkeudet jatku-vaksi pinnaksi mallinnettuna. Maastomalli voi sisältää myös maalajipintoja ja -ominaisuuksia, rakennuksia, johtotietoja ja maanalaisia tiloja. Maastomalleja käytetään muun muassa erilaisissa teknisen suunnittelun tehtävissä.

Määrämittaukset

Määrämittausten tarkoituksena on pintaalojen ja tilavuuksien määrittäminen.

Merkintämittaukset

Merkintämittaukset liittyvät rakentamisen ohjaukseen. Rakennussuunnitelmissa kuvatut rakenteiden paikat merkitään rakennuspaikalle. Tasosijainti merkitään perinteisesti puupaaluilla. Tämän johdosta merkintämittausten yhteydessä puhutaan usein paalutuksesta.

Takymetri

Takymetri on mittauskoje, jolla mitataan vaakasuuntia, pystykulmia ja etäisyyksiä. Etäisyydenmittaus tapahtuu elektrooptisesti. Nykyaikaiset takymetrit sisältävät tietokoneen, jonka avulla mittauksia ohjataan ohjelmallisesti.

Robottitakymetri

Robottitakymetri on servomoottoriohjattu, etäkäytettävä, pitkälle automatisoitu takymetri.

Vaaituskoje

Vaaituskojeella mitataan korkeuseroja vaaitsemalla. Mittauksissa tarvitaan vaaituskojeen lisäksi latta, joka on pystysuorassa pidettävä mitta-asteikko.

Satelliittipaikannin

Satelliittipaikantimen avulla mitataan etäisyyksiä paikannussatelliitteihin. Kun satelliittien paikka tunnetaan, voidaan paikanti-men sijainti laskea etäisyyksien perusteella. USA:n ylläpitämä GPS-järjestelmä (Global Positioning System) on yleisimmin käytetty paikannussatelliittijärjestelmä. Tämän vuoksi puhutaan usein GPS-paikannuksesta, vaikka tarkoitetaan yleisemmin satelliittipaikannusta.

Laserkeilain

Laserkeilaimella mitataan automaattisesti ja nopeasti etäisyyksiä ja suuntia mittauskohteisiin. Mittausten perusteella saadaan mittauspisteiden koordinaatit ja muodostetaan kohteesta kolmiulotteinen pistepilvi, jonka avulla voidaan tutkia ja mallintaa mittauskohdetta yksityiskohtaisesti.

Virhe

Mittauksen virhe on havaintoarvo miinus oikea arvo. Realistinen lähtökohta mittauksia tarkasteltaessa on, että mittaustulokset ovat aina jossakin määrin virheellisiä.

Tarkkuus

Mittauksen tarkkuus on virheiden arvioitu suuruus. Usein tarkkuusarvio ilmoitetaan keskihajonnan avulla, joka ilmoittaa virhearvion 68 %:n todennäköisyydellä. Mittausten virheiden ja tarkkuuden arviointi on tärkeää kuhunkin tehtävään sopivan mittaustavan valinnan, mittausten tarkoituksenmukaisen suorittamisen ja laadunvalvonnan kannalta.

Luotettavuus

Luotettavuus kuvaa mittausmenetelmän kykyä antaa oikeita tuloksia. Virheiden hallinnan näkökulmasta luotettavuus liittyy karkeiden virheiden paikannettavuuteen. Luotettavassa mittauksessa ei synny karkeita ja systemaattisia virheitä.

Pienimmän neliösumman menetelmä

Pienimmän neliösumman menetelmä on tilastomatemaattinen estimointimenetelmä, jota on käytetty mittausten laskennassa yli 200 vuotta. Se on geodeettisen laskennan perusmenetelmä, joka tuottaa hyvin perusteltuja mittaustuloksia virheja tarkkuusarvioineen.

Tasoituslaskenta

Mittaus- ja kartoitustekniikassa pienimmän neliösumman menetelmällä tehtyä laskentaa kutsutaan tasoituslaskennaksi.

# MATEMAATTISET MERKINNÄT

Matemaattisten merkintöjen ja symbolien käytössä on yritetty huomioida ja sovittaa yhteen eri matematiikan alojen käytännöt ja maanmittaustekniikan vakiintuneet merkintätavat. Täysin yksikäsitteisiin merkintöihin ei ole päästy, vaan kirjassa saatetaan käyttää samoille suureille eri merkintöjä tai eri suureille samoja merkintöjä. Kreikkalaiset kirjaimet viittaavat yleensä kulmasuureisiin tai teoreettisiin tai oletettuihin virhearvioihin. Muutoin käytetään eurooppalaislatinalaista kirjaimistoa Times New Roman – fontilla kirjoitettuna. Suureiden symbolit ovat kursivoituja. Tekstissä voi esiintyä merkintöjä ja merkintöjen muunnoksia, erityisesti ala- tai yläindeksejä, joita ei ole seuraavassa luettelossa.

### Usein käytetyt kreikkalaiset aakkoset:

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | alfa |
| $\beta$ | beeta |
| $\gamma$ | gamma |
| $\Delta$ | delta (iso) |
| $\delta$ | delta (pieni) |
| $\theta$ | theeta |
| $\lambda$ | lambda |
| $\mu$ | myy |
| $\pi$ | pii |
| $\rho$ | rhoo |
| $\Sigma$ | sigma (iso) |
| $\sigma$ | sigma (pieni) |
| $\phi$ | fii |
| $\omega$ | oomega |

### Sähkömagneettinen säteily:

| | |
|---|---|
| $c$ | valon nopeus tyhjiössä (299 792 458 m/s) |
| $\lambda$ | säteilyn aallonpituus (m) |
| $f$ | säteilyn taajuus (1/s). |

### Koordinaatit, korkeudet ja niihin läheisesti liittyvät suureet:

| | |
|---|---|
| $\phi, \lambda$ | maantieteellinen leveyskulma ja pituuskulma |
| $\lambda_o$ | keskimeridiaanin pituuskulma |
| $m_o$ | mittakaavakerroin keskimeridiaanilla |

| | |
|---|---|
| $R$ | Maan keskimääräinen kaarevuussäde |
| $a$ | vertausellipsoidin isompi puoliakseli |
| $b$ | vertausellipsoidin pienempi puoliakseli |
| $f$ | vertausellipsoidin litistyneisyys |
| $m$ | mittakaavakerroin |
| $M$ | mittakaava eli pienennyssuhde |
| $X, Y$ | suorakulmaiset tasokoordinaatit vasenkätisessä maasto- tai karttakoordinaatistossa, käytetään erityisesti matemaattisia kaavoja esitettäessä |
| $P, I$ | kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) suorakulmaiset peruskoordinaatit |
| $p, i$ | kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) suorakulmaiset yhtenäiskoordinaatit |
| $N, E$ | WGS84- tai ETRS89-järjestelmän suorakulmaiset tasokoordinaatit |
| $a, b$ | suorakulmaiset kartoitusmitat |
| $X, Y, Z$ | kolmiulotteiset suorakulmaiset koordinaatit |
| $H$ | ortometrinen korkeus |
| $h$ | ellipsoidinen korkeus |
| $N$ | geoidin korkeus |

### Suunnat, kulmat ja matkat:

| | |
|---|---|
| $t_{ij}$ | suuntakulma pisteestä $i$ pisteeseen $j$ |
| $\alpha_{ij}$ | atsimuutti pisteestä $i$ pisteeseen j |
| $\alpha_m$ | neulaluku eli magneettinen atsimuutti |
| $c$ | napaluvun korjaus eli meridiaanikonvergenssi |
| $\delta_m$ | neulaluvun korjaus eli eranto eli magneettinen deklinaatio |
| $\alpha$ | vaakakulma |
| $z$ | pystykulma |
| $\beta$ | korkeuskulma |
| $v_{ij}$ | vinoetäisyys pisteestä $i$ pisteeseen $j$ |
| $s_{ij}$ | vaakaetäisyys havaintopaikan vaakatasossa pisteestä i pisteeseen $j$ |
| $s_e$ | ellipsoidin pinnalle (merenpinnan tasolle) korjattu vaakaetäisyys |
| $s_p$ | projektiotasolle korjattu vaakaetäisyys |
| $P_i$ | satelliittipaikantimella mitattu pseudoetäisyys |

### Helmertin muunnos eli lineaarinen yhdenmuotoisuusmuunnos:

| | |
|---|---|
| $X, Y$ | pisteen tasokoordinaatit pääjärjestelmässä |
| $U, V$ | pisteen tasokoordinaatit sivujärjestelmässä |
| $k_1, k_2, X_0, Y_0$ | muunnosparametrit sivujärjestelmästä pääjärjestelmään |
| $t_0$ | sivujärjestelmän kiertymä pääjärjestelmän suhteen |
| $m$ | muunnoksen mittakaavaluku |

## Virheet ja tarkkuus:

| | |
|---|---|
| $l_i$ | suureen havaittu arvo |
| $L_t$ | suureen oikea arvo (teoreettinen arvo) |
| $e_i$ | havainnon virhe |
| $k_i$ | havainnon korjaus |
| $n_0$ | havaintojen minimimäärä |
| $n$ | havaintojen lukumäärä |
| $r$ | havaintojen ylimäärä eli redundanssi |
| $u$ | tuntemattomien lukumäärä |
| $\hat{x}$ | havaintojen keskiarvo |
| $vi$ | havainnon näennäinen virhe eli jäännösvirhe eli residuaali |
| $s$ | havaintosarjan keskihajonta (myös keskivirhe) |
| $sx$ | keskiarvon keskihajonta |
| $\sigma_i$ | suureen keskihajonta (teoreettinen tai oikeana pidetty arvo) |
| $\sigma_i^2$ | suureen varianssi |
| $\rho$ | korrelaatiokerroin |
| 1σ-taso | mittauksen arvioidut virheet ovat enintään annetun rajan suuruisia 68 % mittausajasta tai mittauksista |
| 2σ-taso | mittauksen arvioidut virheet ovat enintään annetun rajan suuruisia 95 % mittausajasta tai mittauksista |
| $a$ | virhe-ellipsin isompi puoliakseli |
| $b$ | virhe-ellipsin pienempi puoliakseli |
| $\theta$ | virhe-ellipsin isoakselin suuntakulma |
| $p_i$ | havainnon paino |
| $\sigma_o^2$ | a priori varianssikerroin |
| $s_o^2$ | estimoitu varianssikerroin |
| $s_0$ | painoyksikön keskivirhe |
| $w_H$ | korkeussulkuvirhe |
| $w_X$ | koordinaattisulkuvirhe X-akselin suunnassa |
| $w_Y$ | koordinaattisulkuvirhe Y-akselin suunnassa |
| $w_P$ | pistesulkuvirhe |
| $r$ | suhteellinen tarkkuus |

# LYHENTEET

| | |
|---|---|
| A-GPS | Assisted GPS on suomeksi avustettu GPS-paikannus. A-GPS on matkaviestinverkkopalvelu, jonka lähettämät tiedot nopeuttavat ja tarkentavat GPS-paikannusta. |
| C/A-koodi | Coarse Acquision Code. C/A-koodi on GPS-satelliitin lähettämä siviilikäyttöön tarkoitettu paikannuskoodi. |
| DGPS, DGNSS | Differential GPS on suomeksi differentiaalinen GPS. DGPS on satelliittipaikannuksen mittaustapa, jossa paikannussatelliittien lähettämiä tietoja korjataan kiinteiden maa-asemien määrittämien tietojen avulla sijaintitarkkuuden parantamiseksi. DGNSS viittaa siihen, että mittauksessa käytetään muitakin kuin GPS-järjestelmän satelliitteja. |
| DOP | Dilution of Precision on suomeksi tarkkuuden heikentyminen. Se kuvaa satelliittigeometrian vaikutusta mittaustarkkuuteen ja esitetään laskennallisten DOP-lukujen avulla. |
| ED50 | European Datum 1950. ED50 on läntisen Euroopan kattava koordinaattijärjestelmä, joka perustuu eri maiden kolmioverkkojen monivaiheisiin tasoituslaskentoihin, jotka suoritettiin 1940- ja 1950-luvuilla. |
| EGNOS | European Geostationary Navigation Overlay System. EGNOS on eurooppalainen satelliittipaikannuksen tukijärjestelmä, joka välittää differentiaalipaikannukseen verrattavaa korjaustietoa geostationääristen satelliittien kautta. |
| ETRS89 | European Terrestrial Reference System 1989. ETRS89 on maailmanlaajuinen kolmiulotteinen koordinaattijärjestelmä, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaatan yhtenäiseen osaan ja ITRS-järjestelmään epookkina 1989.0. ETRS89 on yhtenevä WGS84-järjestelmän kanssa. |
| ETRS-GKn | ETRS-GKn on Suomessa ETRS89-järjestelmän yhteydessä käytettävä Gauss-Krügerin projektioon perustuva suorakulmainen karttakoordinaatisto. n tarkoittaa projektion keskimeridiaania. |
| ETRS-TM35FIN | ETRS-TM35FIN on Suomessa ETRS89-järjestelmän yhteydessä käytettävä UTM-projektioon perustuva karttaprojektio ja siihen liittyvä suorakulmainen karttakoordinaatisto. |

| | |
|---|---|
| EUREF89 | European Reference Frame 1989. EUREF89 on ETRS89-järjestelmän realisoimiseksi toteutettu Euroopan kattava GPS-mittausohjelma ja sen tuloksena syntynyt ensimmäinen ETRS89-järjestelmän realisaatio. |
| EUREF-FIN | EUREF-FIN on ETRS89-järjestelmän realisaatio Suomessa. |
| FIN2000 ja FIN2005 | FIN2000 ja FIN2005 ovat Geodeettisen laitoksen laskemia geoidimalleja, joiden avulla voidaan muuntaa satelliittipaikannuksen yhteydessä mitattuja korkeuksia Suomessa käytettäviin korkeusjärjestelmiin. |
| FinnRef® | Geodeettisen laitoksen ylläpitämä 13 pysyvän GPS-aseman verkko, jonka avulla ylläpidetään Suomen koordinaattijärjestelmää. |
| Galileo | Galileo on Euroopassa kehitettävä GPS-tyyppinen satelliittipaikannusjärjestelmä. |
| GIS | Geographic Information System. GIS tarkoittaa suomeksi paikkatietojärjestelmää. |
| Glonass | Global Navigation Satellite System. Glonass on Venäjän ylläpitämä GPS-tyyppinen satelliittipaikannusjärjestelmä. Huomaa samankaltaisuus GNSS-lyhenteen kanssa. |
| GMT, UT, UT0 ja UT1 | Greenwich Mean Time (GMT) on suomeksi Greenwichin keskiaurinkoaika ja Universal Time (UT) on suomeksi yleisaika. GMT ja UT ovat maapallon pyörimiseen perustuvia aikoja. Greenwichin pituuspiirin keskiaurinkoaikaa (GMT) sanotaan yleisajaksi (UT). Yleisajasta on useita versioita (UT0 ja UT1), joista on korjattu erilaisia Maan pyörimisliikkeen häiriöitä. |
| GNSS | Global Navigation Satellite System. GNSS on maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä. Muun muassa GPS, Glonass ja kehitteillä oleva Galileo ovat sen osajärjestelmiä. Huomaa samankaltaisuus Glonass-järjestelmän kanssa. |
| GPS | Global Positioning System. GPS on Yhdysvaltain puolustusministeriön ylläpitämä maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä. |
| GRS80 | Geodetic Reference System 1980. GRS80 on maailmanlaajuinen vertausjärjestelmä, jonka IAG otti käyttöön vuonna 1979. |

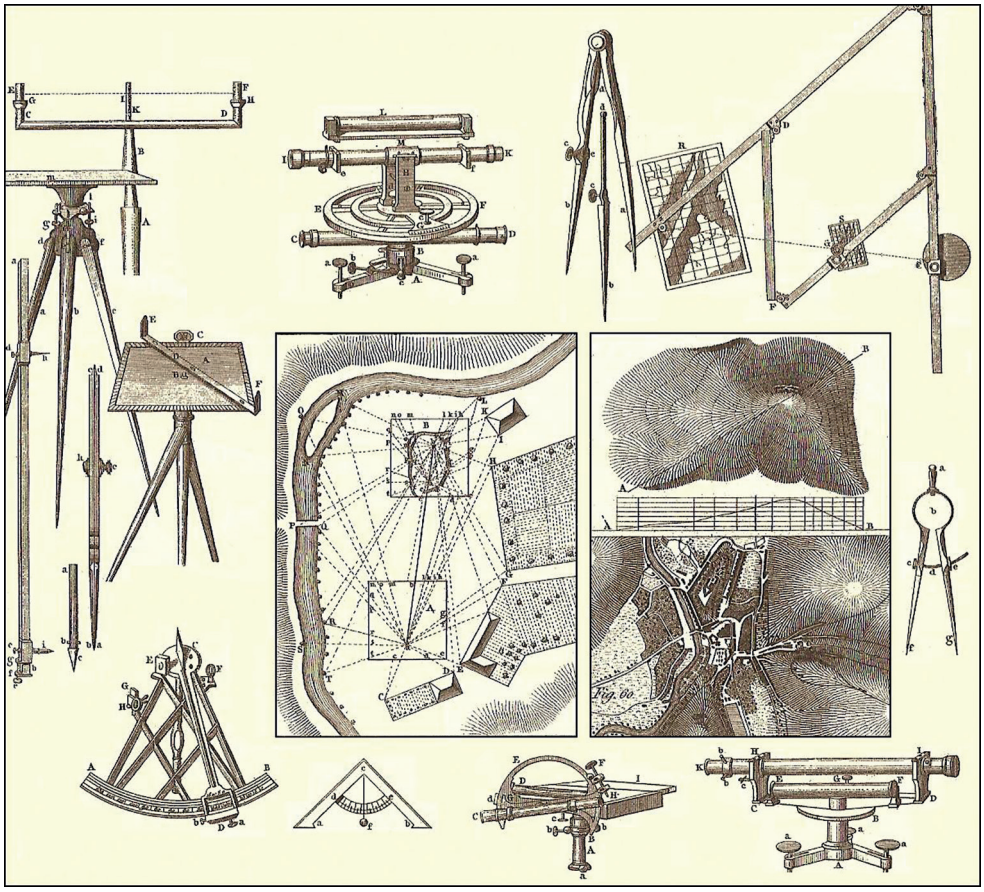
| | |
|---|---|
| HDOP | Horizontal Dilution of Precision. HDOP on satelliittipaikannuksessa tasosijainnin epävarmuutta kuvaava DOP-luku. |
| IAG | International Association of Geodesy. IAG on kansainvälinen geodeettinen järjestö. |
| IMU | Inertial Measurement Unit on suomeksi inertiamittausalusta. Se on liikkuvissa mittausjärjestelmissä käytettävä alusta, joka mittaa mittauslaitteen sijainnin ja asennon muutoksia gyroskooppien ja kiihtyvyysantureiden avulla. |
| ITRS | International Terrestrial Reference System. ITRS on maailmanlaajuinen kolmiulotteinen koordinaattijärjestelmä, jonka perussuureet ovat GRS80-järjestelmän mukaisia ja koordinaatiston orientointi on kansainvälisen aikapalvelutoimiston (BIH:n) vuonna 1984 määrittelemän orientoinnin mukainen. |
| KKJ | Kartastokoordinaattijärjestelmä. KKJ on Suomessa käytettävä Gauss-Krügerin projektioon ja 3°:n kaistajakoon perustuva suorakulmainen karttakoordinaatisto. Sen käytöstä ollaan vähitellen luopumassa. |
| Kok | Kokonaiskorjaus. Kok on neulaluvun (Nek) ja napaluvun (Nak) korjausten summa. Kompassilla mitattu neulaluku muunnetaan kokonaiskorjauksen avulla suuntakulmaksi. |
| L1, L2 ja L5 | L1, L2 ja L5 ovat GPS-satelliittien lähettämien paikannussignaalien kantoaaltojen taajuuksien tunnuksia. |
| N2000 | N2000 on Suomen kolmannen tarkkavaaituksen (1978–2006) tuloksena syntynyt korkeusjärjestelmä. |
| N43 ja N60 | N43 ja N60 ovat Suomen toisen tarkkavaaituksen (1935–1955) tuloksena syntyneitä korkeusjärjestelmiä. |
| Nak | Napaluvun korjaus eli meridiaanikonvergenssi. Nak on maantieteellisen pohjoisen ja karttapohjoisen välinen suuntaero. |
| NAVSTAR GPS | Navigation Satellite Time and Ranging Global Positoning System. NAVASTAR GPS on Yhdysvaltain ylläpitämän GPS-järjestelmän koko nimi. |

| | |
|---|---|
| Nek | Neulaluvun korjaus eli eranto eli magneettinen deklinaatio. Nek on maantieteellisen ja magneettisen pohjoisen välinen suuntaero. |
| NN | Normaali nolla. NN-järjestelmä on Suomen ensimmäisen tarkkavaaituksen (1892–1910) tuloksena syntynyt korkeusjärjestelmä. |
| PDOP | Position Dilution of Precision. PDOP on satelliittipaikannuksessa taso- ja korkeussijainnin mittauksen yhdistettyä epävarmuutta kuvaava DOP-luku. |
| P-koodi | Precise Code. P-koodi on GPS-satelliitin lähettämä sotilaskäyttöön tarkoitettu paikannuskoodi. |
| ppm | Parts per milloin, suomeksi miljoonasosa ($10^{-6}$). Käytetään matkaan verrannollisten virheiden ja korjausten yhteydessä. |
| PPP | Precise Point Positioning on tarkkaa pistepaikannusta yhdellä satelliittivastaanottimella ilman korjauspalveluita. Paikan laskenta perustuu pitkään havaintoaikaan, usealla taajuudella tehtyihin koodi- ja vaihehavaintoihin sekä tarkkoihin satelliittien ratatietoihin ja kellokorjauksiin. |
| RDS | Radio Data System. RDS on tarkoitettu helpottamaan radion käyttöä liikkuvassa ajoneuvossa. RDS:n avulla on välitetty DGPS-paikannuksessa käytettävää differentiaalikorjausta. |
| RTK | Real Time Kinematic on suomeksi reaaliaikainen kinemaattinen mittaus. RTK-mittaus on satelliittipaikannuksen vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen, liikkuva mittaustapa, jolla saavutetaan lähes reaaliaikaisesti senttimetriluokan mittaustarkkuus. |
| SI | Systeme International d'Unités. SI on kansainvälinen mittayksikköjärjestelmä. |
| SmartNet | SmartNet on eräs satelliittipaikannuksen tarkkuutta parantava tukiasemaverkkoratkaisu. Sen avulla voidaan tehdä verkko-RTK-mittausta, jolla päästään senttimetriluokan paikannustarkkuuteen. |
| TAI | Temps Atomique International on suomeksi kansainvälinen atomiaika. TAI on atomikellojen avulla ylläpidettävä tasaisesti juokseva vertailuaika, jota koordinoi Bureau International des Poids et Mesures (BIMP) Ranskassa. |

| | |
|---|---|
| TDOP | Time Dilution of Precision. TDOP on satelliittipaikannuksessa ajanmittauksen epävarmuutta kuvaava DOP-luku. |
| UTC | Coordinated Universal Time on suomeksi koordinoitu yleisaika. Kellomme käyvät nykyisin UTC-aikaa, joka on kansainväliseen atomiaikaan (TAI) sidottu tasaisesti etenevä aika. UTC-aikaa korjataan tarvittaessa karkaussekunneilla, jota se pysyisi likipitäen samana kuin maapallon pyörimiseen perustuva yleisaika (UT). |
| UTM | Universal Transverse Mercator. UTM-projektio on oikeakulmainen, poikittaisasentoinen, leikkaava lieriöprojektio. Projektio on maailmanlaajuisesti käytetty karttaprojektio. |
| VDOP | Vertical Dilution of Precision. VDOP on satelliittipaikannuksessa korkeuden mittauksen epävarmuutta kuvaava DOP-luku. |
| VRS | Virtual Reference Station. VRS on eräs satelliittipaikannuksen tarkkuutta parantava tukiasemaverkkoratkaisu. Voidaan puhua virtuaalitukiasemajärjestelmästä. Sen avulla voidaan tehdä verkko-RTK-mittausta, jolla päästään senttimetriluokan paikannustarkkuuteen. |
| WAAS | Wide Area Augmentation System. WAAS on Pohjois-Amerikassa käytettävä GPS-paikannuksen tukijärjestelmä, joka välittää satelliittien kautta korjaustietoja satelliittipaikannuksen sijaintitarkkuuden parantamiseksi. |
| WGS84 | World Geodetic System 1984. WGS84 on GPS-järjestelmän koordinaattijärjestelmä. Siihen sidottuja koordinaattijärjestelmiä käytetään kaikkialla maapallolla. Esimerkiksi Euroopassa ja Suomessa käytettävät ETRS89 ja EUREF-FIN ovat WGS84-järjestelmän kanssa yhteneviä koordinaattijärjestelmiä. |

# 1 PERUSTEET

Geodesia ja maanmittaustekniikka ovat tieteen ja tekniikan aloja, joilla on useiden vuosisatojen perinteet. Niille asetettuina tehtävinä ovat muun muassa maapallon koon ja mittasuhteiden määrittäminen ja maanpinnan kartoittaminen mittausten avulla. Mittaus- ja kartoitustekniikka on käsite, jota käytetään kuvaamaan niitä geodesian sovelluksia, joiden avulla kartoitetaan ja mitataan maastoa ja rakennettua ympäristöä kartanvalmistuksen, maankäytön suunnittelun ja rakentamisen tarpeisiin. Usein tätä geodesian osa-aluetta kutsutaan käytännön geodesiaksi. Perusteita käsittelevässä luvussa tarkastellaan yleispiirteisesti maanmittaustekniikan ja geodesian osa-alueita, nykyaikaisen mittaus- ja kartoitustekniikan tehtäviä, sijaintimittauksia, runkomittausten ja runkopisteiden merkitystä sekä geodeettisia mittausmenetelmiä ja -kojeita. (Kuva 1.)



**KUVA 1** *Vanhoja mittauskojeita, piirustusvälineitä ja karttaesityksiä noin 200 vuoden takaa (Heck 2001, kooste s. 10 kuvista, alkuperäiset kuvat on julkaistu 1844).*

## 1.1 Geodesia ja mittaus- ja kartoitustekniikka

### 1.1.1 Maanmittaustekniikan osa-alueet

Maanmittausalan ammattilaiset, maanmittaajat, insinöörit, kartoittajat ja mittamiehet, vastaavat karttojen tuottamisesta, kiinteistönmuodostuksesta ja karttoihin ja kiinteistöihin liittyvien tietojen ajantasaisuudesta ja luotettavuudesta. Maanmittaajat työskentelevät myös kiinteistöarviointiin, maankäytön suunnitteluun ja rakentamiseen liittyvissä tehtävissä. Maanmittaustekniikan alaa kokonaisuutena luonnehtii tietty kaksijakoisuus: voidaan puhua mittaus- ja kartoitustekniikasta sekä kiinteistötaloudesta (puhutaan myös kiinteistötekniikasta).

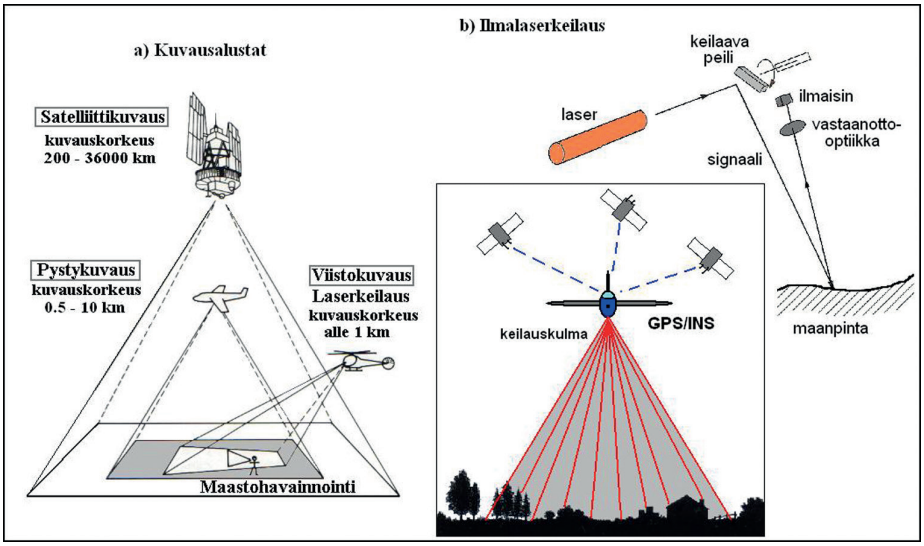
Mittaus- ja kartoitustekniikan osa-aluetta voidaan kuvata yksityis kohtaisemmin seuraavien termien ja asiakokonaisuuksien avulla:

- Geodesia on tieteenala, joka tutkii Maan kokoa, muotoa ja paino voimakenttää. Se on tieteiden luokittelussa geofysiikkaan liittyvä tieteenala.
- Käytännön geodesian päätehtäviä ovat kartanvalmistuksessa ja muissa mittauksissa tarvittavien runkopisteiden määritys, maastoa kuvaavan tiedon keruu ja laskenta, rakennusmittaukset ja teollisuuden tarvitsemat asennus- ja kontrollimittaukset.
- Kartografia eli karttatiede tarkoittaa karttojen suunnittelua ja valmistusta sekä karttoihin liittyvää tutkimusta.
- Geoinformatiikka on paikkatietoa ja paikkatietojärjestelmiä (GIS, Geographic Information System) tutkiva tieteenala. Paikkatietotekniikaksi sanotaan sitä osaa geoinformatiikasta, joka soveltaa tietoteknisiä menetelmiä. Geoinformatiikka pitää sisällään myös tietokoneavusteisen kartografian.
- Fotogrammetria tutkii ympäristömme kohteiden kolmiulotteista mittaamista valokuvien avulla. Ilmasta otettuja kuvia käytetään mm. maastokarttojen tuotannossa ja rakennusteknisen suunnit telun tarvitsemia maastomalleja mitattaessa.
- Kaukokartoituksessa on fotogrammetriaa yleisemmin kyse kuvamuotoisen tiedon keräämisestä ja analysoimisesta. Tietoja kerätään esimerkiksi satelliiteissa ja lentokoneissa olevilla havaintolaitteilla. Kaukokartoituksen sovellusalueita ovat muun muassa luonnonvarojen inventointi, ympäristön tilan seuranta ja maankäytön tutkiminen ja luokittelu. (Kuva 2, s. 3.)

Maanmittaustekniikan toisen osa-alueen, kiinteistötalouden, tehtäväkenttää voidaan luonnehtia lyhyesti seuraavasti:

- Toimitustuotanto käsittelee maanomistukseen liittyvän kiinteistö järjestelmän ylläpitoon ja kehittämiseen liittyviä asioita.
- Kiinteistöoikeus tarkastelee kiinteistöihin liittyviä oikeudellisia kysymyksiä.

– Kiinteistöarvioinnissa määritetään kiinteän omaisuuden arvo. Arvioitava kohde voi olla peltoa, metsää, raakamaata, ainesmaata tai rakennettuja ja rakentamattomia asuin-, loma-, teollisuus- ja toimitilakiinteistöjä.
– Kiinteistöjohtamisessa selvitetään kiinteistöjen talouteen, hankintaan, hallintaan, vuokraamiseen, luovuttamiseen ja kiinteistö liiketoimintaan liittyviä toimintoja omistajan ja käyttäjän kannalta.
– Maankäytön suunnittelu ohjaa yhdyskuntien rakentamista. Maankäyttöä koskevia suunnitelmia kutsutaan kaavoiksi.

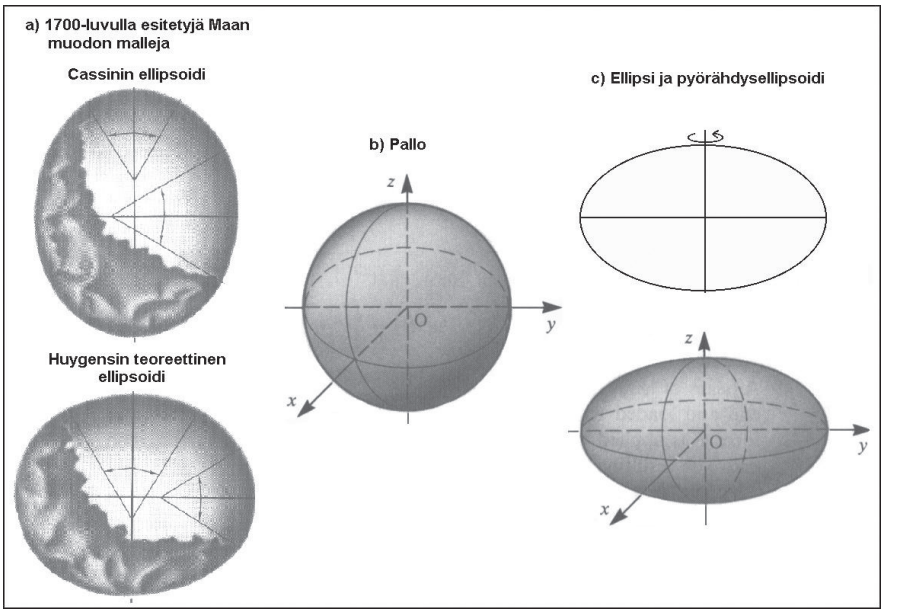



**KUVA 2** *a) Kaukokartoituskuvia tuotetaan kuvaamalla maanpintaa erilaisten kuvauslaitteiden avulla (Punkari 1984, s. 9). Kaukokartoituskuvien avulla voidaan kartoittaa laajoja maa-alueita nopeasti. b) Ilmalaserkeilauksessa ei muodosteta maanpinnan kuvaa vaan mitataan maaston kohteiden sijaintia ja korkeuksia. Vastaavaa keilaustekniikkaa voidaan käyttää myös maanpinnalla tehtävissä mittauksissa. Tällöin puhutaan maalaserkeilauksesta.*

Viimeisten kolmenkymmenen vuoden aikana maanmittaustekniikka on kehittynyt nopeasti. Satoja vuosia käytössä olleista mittauslaitteista on siirrytty nopeasti moderneihin elektronisiin ja tietoteknisiin mittauslaitteisiin ja -järjestelmiin. Nykyaikaiselle maanmittaustekniikalle on tunnusomaista globaalien, maailmanlaajuisesti toimivien paikannustekniikoiden käyttö ja voimakas sitoutuminen tietotekniikkaan. Alan ”omaa” tietotekniikkaa kutsutaan paikkatietotekniikaksi. Kiinteistötekniikan tehtävissä ja maankäytön suunnittelun yhteydessä maanmittaajat ratkovat suuria taloudellisia arvoja sisältäviä ongelmia. Näissä tehtävissä myös oikeudellisten kysymysten käsittely on välttämätöntä. Tiivistäen voidaan sanoa, että maanmittaajat keräävät ja ylläpitävät yhteiskunnan infrastruktuurin suunnittelun ja toiminnan kannalta keskeisiä tietovarantoja.

### 1.1.2 Geodesia

Keskuudessamme on aina ollut uteliaita ihmisiä, joita on kiinnostanut paikkamme maapallolla ja maailmakaikkeudessa. Asialla on sekä filosofista että käytännöllistä merkitystä olemisemme kannalta. Pohdinnat paikastamme maanpinnalla ja suhteestamme muihin paikkoihin ovat synnyttäneet geodesiaksi kutsutun tieteenalan. Geodesia on tiede, joka käsittelee Maan koon ja muodon mittaamista ja maanpinnan kohteiden kuvaamista. Se muodostaa maanmittaustekniikan tieteellisen perustan mittaamisen ja kartoittamisen näkökulmasta asioita katsottaessa. (Kuva 3.)



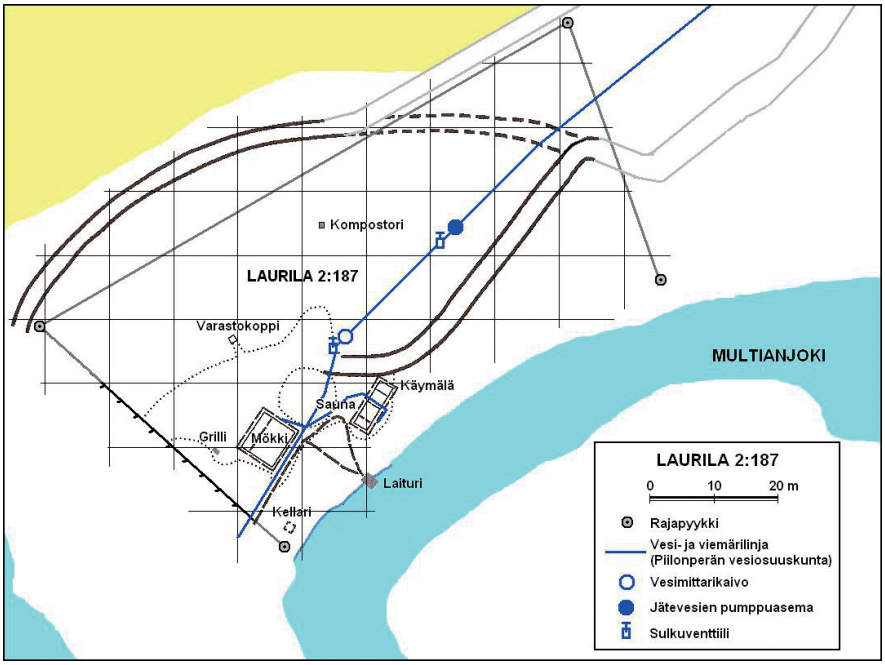

**KUVA 3** *Maan muodon malleja. a) 1700-luvulla tiedettiin Maa pallonmuotoiseksi, mutta sen parasta mahdollista matemaattista muotoa vielä haettiin (Defence Mapping Agency 1984). b) Pallo sopii perusmalliksi. c) Nykyisen käsityksen mukaan geodeettisten mittausten tarpeista lähtevä, riittävän täsmällinen Maan muodon matemaattinen malli on pyörähdysellipsoidi. Sitä kutsutaan myös vertausellipsoidiksi.*

Geodeettisten tutkimusten avulla ylläpidetään koordinaatti- ja korkeus järjestelmiä eli vertausjärjestelmiä, joiden suhteen voimme ilmoittaa täsmällisesti paikkamme maanpinnalla. Koko maapallon kattavia vertausjärjestelmiä ei voida muodostaa, jollei tunneta Maan muotoa ja mittasuhteita. Näitä asioita ei puolestaan voida selvittää ja kuvata tutkimatta Maan painovoimakenttää. Painovoiman tutkiminen onkin geodesian keskeinen tutkimusalue. Painovoima on tärkeä asia, koska se määrittää kunkin paikan vaakatason ja pystysuoran. Ne ovat normaalissakin elämässä tärkeitä vertailukohtia, mutta mittauksissa vielä erityisen tärkeitä, koska mittauskojeet pystytetään eli tasataan vaakatasoon ja pystysuoraan ennen mittauksia.

### 1.1.3 Mittaus- ja kartoitustekniikka

Mittaus- ja kartoitustekniikan tehtävissä hyödynnetään geodesian alaan kuuluvia maasto-, rakennus- ja asennusmittauksia, kaukokartoituksen alaan kuuluvia kuvamuotoisia mittauksia ja geoinformatiikan alaan kuuluvia paikkatietoaineistoja ja karttoja. Tämä kirjan aihepiiri on kuitenkin selvästi tätä määrittelyä rajallisempi, sillä kirjassa tarkastellaan vain maastossa ja rakennustyömailla käytettäviä geodeettisia mittauskojeita ja -menetelmiä sekä kojeiden rakenteeseen ja käyttöön liittyviä perusasioita. Nämä aiheet ovat lähinnä käytännön geodesian alaan kuuluvia asioita.

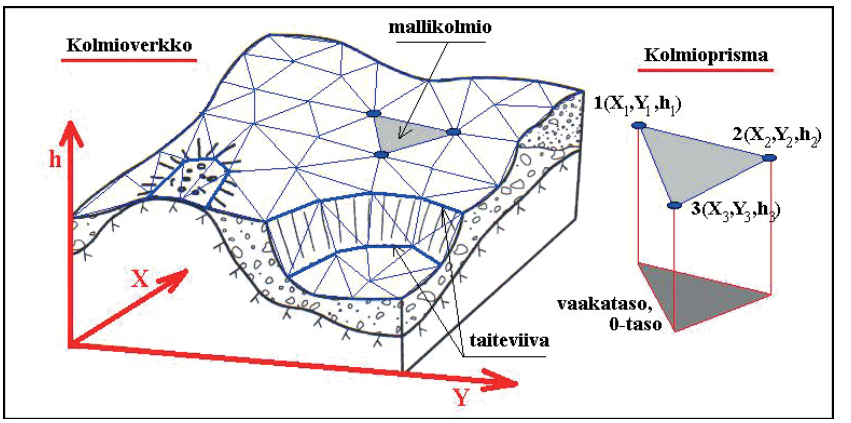
Geodeettisilla kojeilla ja menetelmillä kerätään sijaintitietoja karttoja, kiinteistönmuodostusta ja rakennusteknillistä suunnittelua ja rakentamisen ohjausta varten. Vaikka yleisten maastokarttojen tuottaminen perustuukin ensisijaisesti kaukokartoitukseen, yksityiskohtaisten karttojen valmistuksessa tarvitaan aina myös maastomittauksia, koska kaikki kohteet eivät näy kaukokartoituskuvilla. (Kuva 4.)



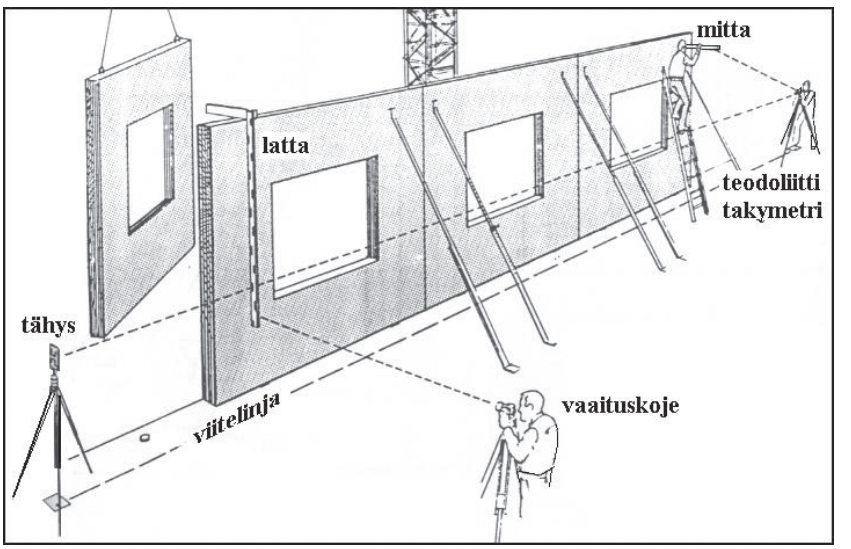

**KUVA 4** *Jätevesiselvitystä varten tehty karttapiirros. Mittaukset on tehty mittanauhalla ja käsisuuntakehällä, jotka ovat yksinkertaisia mittausvälineitä.*

Rakennusteknillisessä suunnittelussa tarvitaan tarkkoja maastotietoja, jotka tietotekniikkaan tukeutuvassa suunnittelussa esitetään numeerisena maastomallina (kuva 5, s. 6). Kun rakennussuunnitelmat aikanaan toteutetaan, työmaalla tehdään merkintä- ja asennusmittauksia (kuva 6, s. 6). Mittaus- ja kartoitustekniikan perus-

teissa on siis tämän kirjan tarjoamasta näkökulmasta katsoen kyse maastossa ja rakennustyömailla tehtävistä kartoitus-, maastomalli- ja merkintämittauksista ja niissä käytettävistä mittauskojeista ja -menetelmistä.




**KUVA 5** *Nykyaikainen tietotekniikkaan tukeutuva rakennustekninen suunnittelu perustuu maastomalliin, joka on yleensä kolmioverkkomalli. Mallikolmioiden nurkkien koordinaatit ja korkeudet mitataan joko maastossa tai ilmakuvilta. Maastomalliin voi kuulua maanpinnan lisäksi muitakin pintoja, kuten geoteknisiltä ominaisuuksiltaan erilaisten maalajien rajapintoja.*

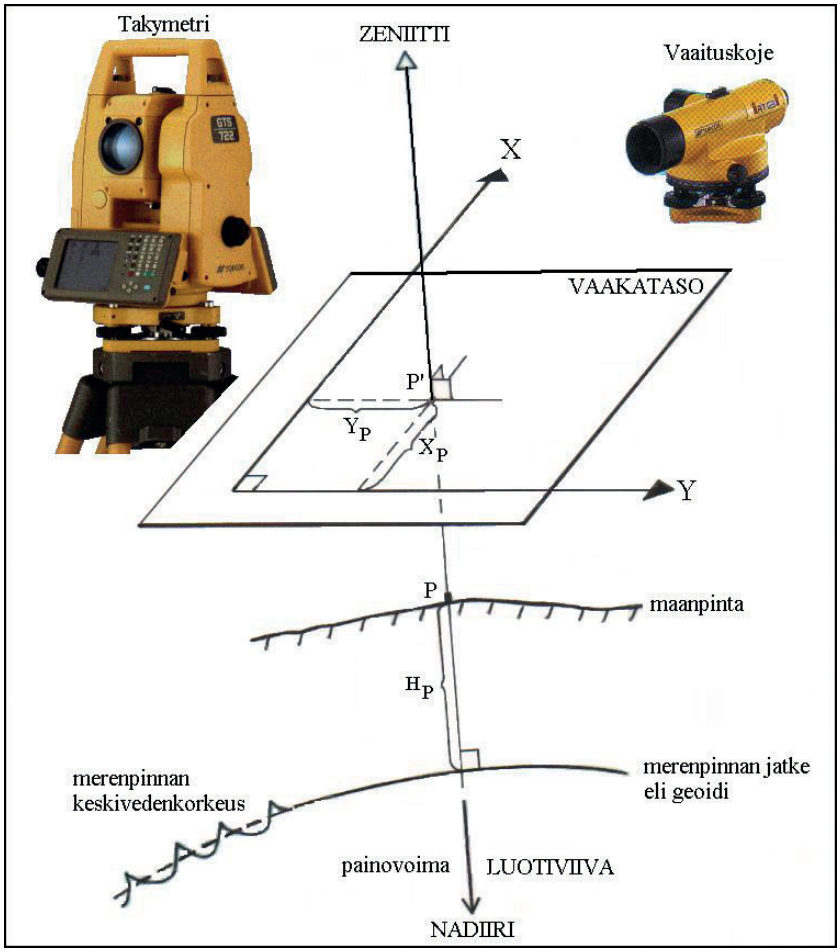



**KUVA 6** *Merkintä- ja asennusmittauksia tarvitaan, jotta rakennukset ja niiden osat voidaan sijoittaa työmaalla suunniteltuun taso- ja korkeusasemaan. Kuvassa elementti asetetaan paikalleen viitelinjan suhteen ja pystysuoraan kulmanmittauskojeen (teodoliitti tai takymetri) avulla. Elementin korkeusasema puolestaan tarkastetaan vaaituskojeen avulla. (van den Berg - Lindberg 1983, s.23.)*

## 1.2 Sijaintimittaukset

### 1.2.1 Taso- ja korkeussijainti

Geodeettisiin mittauksiin liittyvät havainnot tehdään Maan painovoiman määrittämän pystysuunnan eli luotiviivan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevan vaakatason suhteen. Vaakatasoon voidaan ajatella liitettävän suorakulmainen XY-koordinaatisto. Kun maanpinnan piste (P) projisoidaan luotiviivan suunnassa vaakatasolle, projektiopisteen (P') kaksi koordinaattia määrittävät pisteen tasosijainnin ($X_P$, $Y_P$). Kaikilla samalla luotiviivalla sijaitsevilla pisteillä on sama tasosijainti, vain korkeus vaihtelee. (Kuva 7.)




**KUVA 7** *Havaintopaikan horisonttijärjestelmä muodostetaan mittauskojeiden avulla. Koje tasataan vaakatasoon, jolloin sen pystyakseli tulee pystysuoraan. Horisonttijärjestelmässä määritellään kohteen (P) taso- ja korkeussijainti. Tasosijainti ilmaistaan suorakulmaisten koordinaattien ($X_P$, $Y_P$) ja korkeussijainti korkeuden ($H_P$) avulla. Korkeus mitataan yleensä merenpinnan jatkeelta, jota kutsutaan geoidiksi.*

Pisteen (P) korkeussijainti esitetään korkeuden ($H_P$) avulla. Se on luotiviivaa pitkin mitattu etäisyys sovitusta vaakasuorasta vertailupinnasta. Geoidi on yleisimmin käytetty vertailupinta. Geoidi on Maan painovoimakentän samanarvopinta, joka yhtyy jonakin ajankohtana määritettyyn tai sovittuun merenpinnan korkeuteen. Yksinkertaistaen voidaan sanoa, että korkeus on kohteen etäisyys merenpinnasta. (Kuva 7, s. 7.)

Havaintopaikkaan sidottua koordinaatistoa voidaan kutsua horisonttijärjestelmäksi, koska vaakatason jatkeelta löytyy taivaanranta eli horisontti. Joka kerta, kun mittauskoje pystytetään mittauspaikalle, muodostuu tietoisesti tai tiedostamatta edellisen määritelmän mukainen järjestelmä. Mittauksia, joissa käytetään ja määritetään kohteiden koordinaatteja ja korkeuksia, kutsutaan sijaintimittauksiksi. Nykyisin mittaus ja kartoitustekniikassa tehtävät mittaukset ovat lähes aina sijaintimittauksia.

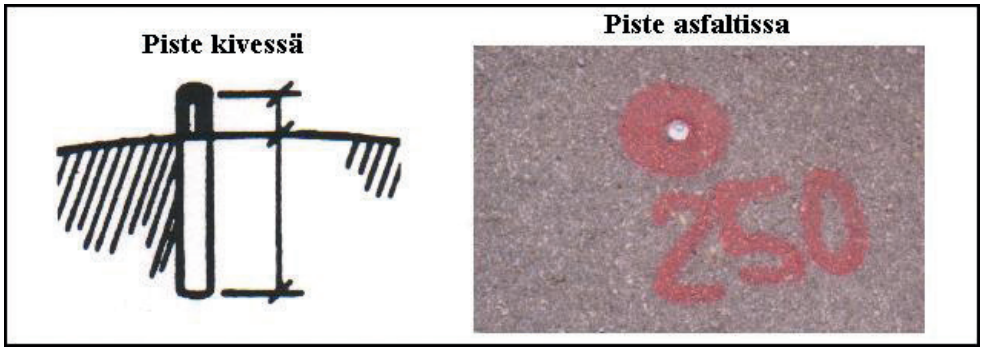
Tasosijainnin esittäminen suorakulmaisina koordinaatteina ei ole itsestäänselvyys. Ongelman aiheuttaa Maan pallonmuotoisuus. Sen seurauksena kahden havaintopaikan kautta kulkevat luotiviivat ja niihin liittyvät vaakatasot eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin eivät myöskään eri paikoissa tehdyt mittaushavainnot liity samaan vaakatasoon. Laskennallisesti on kuitenkin mahdollista toimia suorakulmaisessa koordinaatistossa, kun mittaushavaintoja korjataan eli redukoidaan sopivalla tavalla. Havaintoja korjaamallakaan ei kuitenkaan voida kiertää sitä tosiasiaa, että pallopintaa ei voida projisoida tasolle vääristämättä kuvattavaa kohdetta. Kulmat, etäisyydet ja pinta-alat eivät kuvaudu tasolle samassa suhteessa kuin ne ovat pallopinnalla. Maan pallonmuotoisuuteen liittyvät mittausteknilliset ongelmat ilmenevät ja niiden vaikutukset pitää aina huomioida laaja-alaisissa mittauksissa, joita tehdään useiden neliökilometrien alueella, ja erityistä tarkkuutta vaativissa pienialaisemmissakin mittauksissa.

### 1.2.2 Kiintopisteet

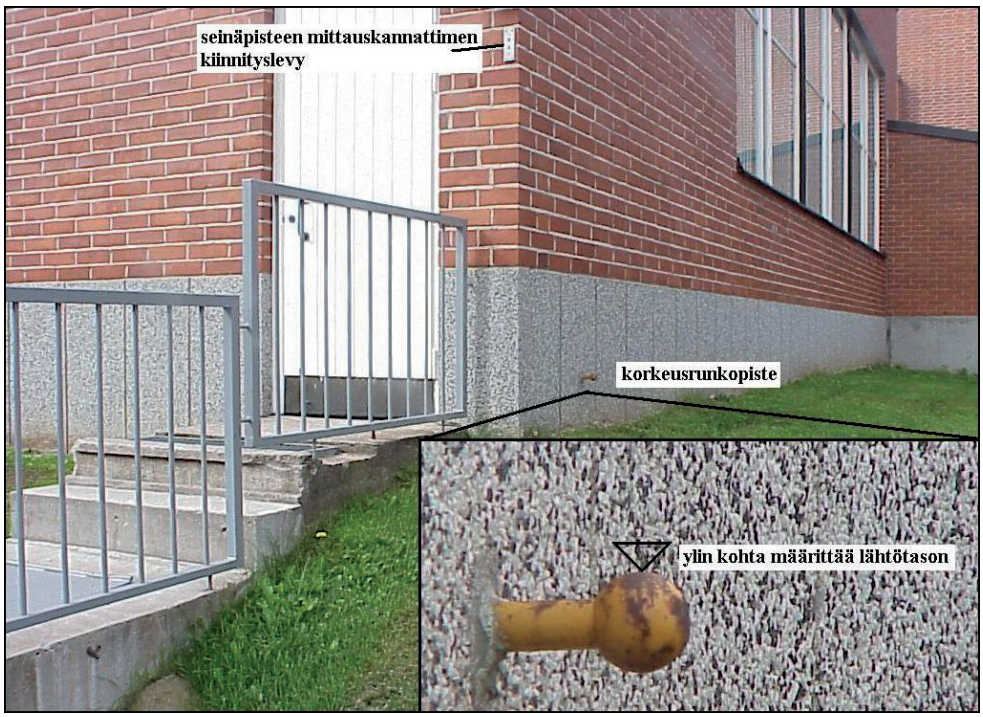
Sijaintimittauksissa mittauspaikan koordinaatisto ja korkeusjärjestelmä määritellään kiintopisteiden (runkopisteiden, lähtöpisteiden tai liitospisteiden) avulla. Kiintopisteet ovat tarkoitettu pitkäaikaiseen käyttöön, joten ne pyritään rakentamaan liikkumattomiksi kallioon, maaperäkiviin, rakennuksiin ja katujen ja teiden rakenteisiin. Niiden pitää myös sijaita mahdollisimman näkyvällä paikalla, sillä hyvä näkyvyys mahdollistaa pisteiden tehokkaan käytön.

Kiintopisteet voivat olla tasokiintopisteitä, korkeuskiintopisteitä tai yhdistettyjä kiintopisteitä. Tasokiintopisteen koordinaatit ($X$, $Y$) tunnettaan, korkeuskiintopisteen korkeus ($H$) tunnetaan ja yhdistetyn kiintopisteen koordinaatit ja korkeus tunnetaan. Kiintopisteiden koordinaatit ja korkeudet mitataan runkomittauksella. Runkomittausten menetelmät ovat melko vaativia, koska niitä tehtäessä kiinnitetään erityistä huomiota mittausten luotettavuuteen ja tarkkuuteen.

Tasokiintopisteellä tulee olla selvästi nähtävä keskusmerkki. Tämän vuoksi tasokiintopisteet ovat usein metalliputkia, -tankoja tai mittapistenauloja (kuva 8). Korkeuskiintopisteellä puolestaan tulee olla selvästi havaittava ylin kohta, jonka vuoksi varsinaiset korkeuskiintopisteet ovat pyöristettyjä pultteja (kuva 9). Yhdistetyt kiintopisteet ovat yleensä tasokiintopisteiksi rakennettuja pisteitä. Kun tällaiselle pisteelle on määritetty korkeus, se on yleensä epätarkempi kuin varsinaisen korkeuskiintopisteen korkeus.

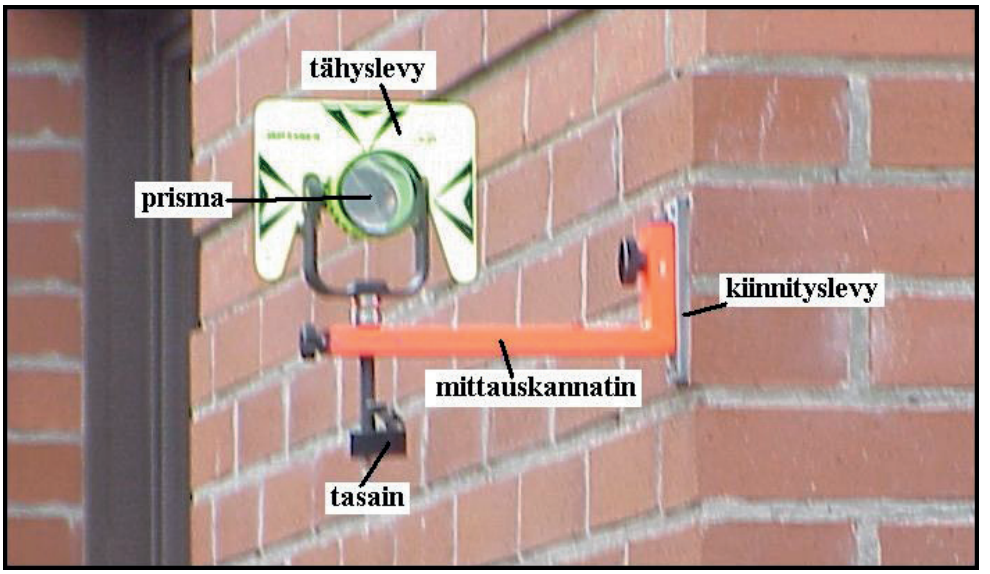



**KUVA 8** *Tasokiintopisteen merkkinä on metalliputki, -tanko tai mittapistenaula.*




**KUVA 9** *Korkeuskiintopisteen merkkinä on pyöristetty pultti. Kaupunkialueilla korkeuskiintopisteet ovat usein rakennettu rakennusten kivijalkoihin. Kuvan yläreunassa näkyy myös seinäpisteen mittauskannattimen kiinnityslevy.*

Ahtaasti rakennetuissa kaupunkiympäristöissä, talonrakennustyö mailla tai vaikkapa kaivoksilla voi olla tarkoituksen mukaista rakentaa kiintopisteet tai osa niistä seinäpisteiksi (kuva 10). Nimensä mukaisesti seinäpisteet sijoitetaan mahdollisimman ylös, jolloin niihin on hyvä näkyvyys vaikeissakin olosuhteissa. Seinäpisteet eivät esimerkiksi peity lumen alle. Seinäpisteiden käyttö kiintopisteinä ei ole kuitenkaan Suomessa kovin yleistä. Seinäpisteiden tapaan käytetään rakennusmittauksissa yksinkertaisia tarraheijastimia, mutta niiden avulla ei voida tehdä pitkäaikaiseen käyttöön tarkoitettuja kiintopisteitä.




**KUVA 10** *Seinäpisteitä voidaan käyttää rakennetussa ympäristössä ja työmailla. Seinässä on kiinnityslevy, johon mittausten ajaksi laitetaan mittauskannatin. Siihen puolestaan kiinnitetään esimerkiksi elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa tarvittava prisma ja kulmanmittauksen tähys.*

### 1.2.3 Pisteselityskortti

Kiintopisteiden tulee olla helposti löydettävissä. Tätä varten niistä laaditaan runkomittausten yhteydessä pisteselityskortit (kuva 11, s. 11). Pisteselityskortilla esitetään muun muassa

- pisteen nimi tai numero
- koordinaatit ja/tai korkeus, niiden tarkkuusluokka sekä koordinaatti- ja korkeusjärjestelmätiedot
- kuvaus pisteen rakenteesta ja sijainnista, sidontapisteet ja niiden sidemitat
- mittaus- ja laskentamenetelmä, mittausajankohta ja viittaus havainto- ja laskenta-asiakirjoihin
- mittaajan ja laskijan nimet ja pisteen mitannut organisaatio.

Pisteselityskortilla esitettävät sidemitat ovat tärkeitä pisteen löytämisen kannalta. Ne mahdollistavat pisteen löytämisen myös lumen tai maan pinnan alta. Sidemitat tulee ottaa vähintään kolmeen selvästi näkyvään ja hyvin säilyvään kohteeseen. Nykyisin kiintopisteiden etsinnässä käytetään paljon satelliittipaikannusta, mikä usein mahdollistaa pisteiden löytämisen suoraan koordinaattien avulla. Tämä vähentää pisteselityskorttien tarvetta ja käyttöä. Mittausten dokumentoinnin näkökulmasta pisteselityskortit ovat kuitenkin edelleen tarpeellisia.

30.5.2005 Rovaniemen AMK

**Pistekortti**

**Piste:** 50501

**Sijainti:** Tuotannonalojen kampus

**Koordinaatit [m]:**

| I | P | H |
|---|---|---|
| 3443293.368 | 7377308.161 | 77.220 |

**Keskivirheet [mm]:**

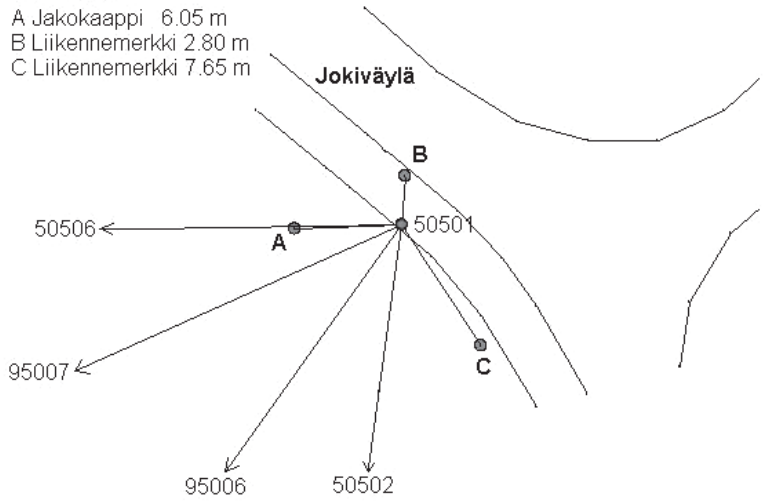
| | | |
|---|---|---|
| 2.1 | 2.1 | 3.0 |

**Suuntia ja etäisyyksiä:**

| | | |
|---|---|---|
| ->95006 | t=239.4506 | S=54.171 |
| ->50502 | t=208.5967 | S=100.506 |
| ->50506 | t=298.7806 | S=78.067 |
| ->95007 | t=273.1105 | S=84.808 |

**Huomautuksia:**
Kauluslevyllä varustettu naula asfaltissa

**Sidemitat:**
A Jakokaappi 6.05 m
B Liikennemerkki 2.80 m
C Liikennemerkki 7.65 m




**KUVA 11** *Rovaniemen ammattikorkeakoulun Rantavitkan kampuksella sijaitsevan yhdistetyn kiintopisteen pisteselityskortti (XpLocal-ohjelman tuloste).*

### 1.2.4 Runkoverkko ja runkomittaukset

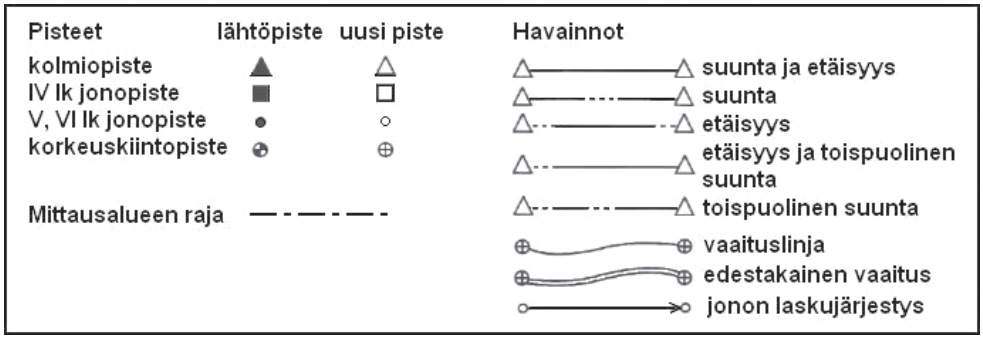
Kiintopisteitä ei mitata yksittäisinä pisteinä vaan suurempina kokonaisuuksina, joita kutsutaan runkoverkoiksi. Runkoverkon rakenne ja tehdyt mittaukset voidaan esittää verkkopiirroksen avulla. Esimerkiksi tasorunkoverkot ovat usein muodoltaan kolmioverkkoja tai monikulmiojonoja. Perinteisin mittausmenetelmin mitattuja kiintopisteitä voidaan kutsua esimerkiksi kolmiopisteiksi tai monikulmiopisteiksi. Kolmiopisteet ovat mitattu kolmiomittauksella ja monikulmiopisteet jonomittauksella (kuva 13, s. 13). Runkomittauksissa käytettäviä mittausmenetelmiä kutsutaan yleisesti runkomittausmenetelmiksi. Nykyisin tasorunkomittaukset tehdään pääosin satelliittipaikannuksen keinoin.

Kiintopisteiden tarkkuus vaihtelee ja tätä vaihtelua kuvaa muun muassa runkopisteiden luokittelu. Mittausohjeissa valtakunnalliset ja kunnalliset taso- ja korkeusrunkomittaukset jaetaan hierarkkisiin luokkiin. Vanhoissa kaavoitusmittausohjeissa (1983) on kuusi luokkaa (I–VI). Ensimmäinen, pieninumeroisin luokka on ylin luokka ja sitä pidetään myös tarkimpana luokkana. Uusimmissa kaavoitusmittausohjeissa (2003) runkopisteet jaetaan kolmeen ryhmään: valtakunnalliset kiintopisteet, peruskiintopisteet ja käyttökiintopisteet. Vuoden 2012 aikana kaavoitusmittausohjeet tullaan korvaamaan tasorunkomittausten osalta julkisen hallinnon suosituksella, joka käsittelee kiintopistemittausta EUREF-FIN – koordinaatistossa. (Taulukko 1.)

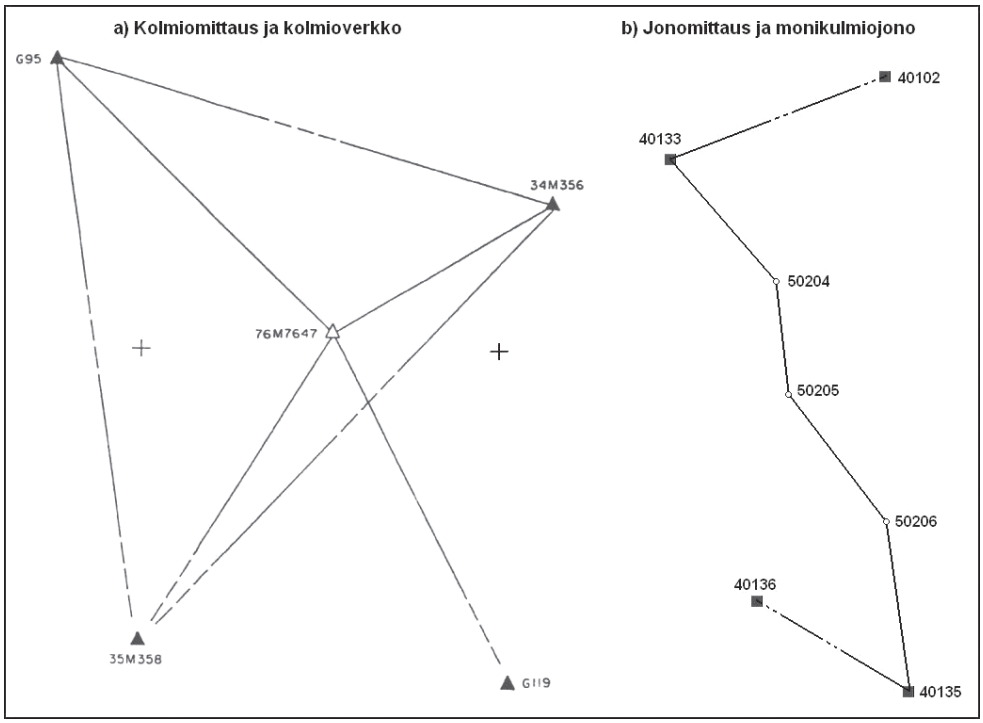
**TAULUKKO 1** *Kiintopisteiden luokittelu vuosien 1983 ja 2003 kaavoitusmittausohjeissa. Kaavoitusmittausohjeita sovelletaan kunnallisissa mittaustöissä. Suomessa tehtävistä valtakunnallisista runkomittauksista vastaavat Geodeettinen laitos ja Maanmittauslaitos.*

| Kaavoitusmittausohjeet 1983 | Kaavoitusmittausohjeet 2003 |
|---|---|
| **Valtakunnalliset kiintopisteet** | |
| I-, II- ja III-luokan kolmiopisteet | EUREF-FIN -tihennyspisteet |
| **Kunnan kiintopisteet** | |
| III-luokan kolmiopisteet ja IV-luokan suurmonikulmiopisteet | Peruskiintopisteet |
| V- ja IV-luokan jonopisteet | Käyttökiintopisteet |

Kiintopisteet ja niiden sijainnin määrittämiseksi tehdyt mittaukset voidaan esittää havainnollisesti verkkopiirroksen avulla. Hyvin laaditusta verkkopiirroksesta ilmenee, minkä tarkkuusluokan pisteitä alueella on, ja miten ne on mitattu. Tätä tarkoitusta varten verkkopiirroksessa voidaan käyttää määrättyjä symboleja, jotka kertovat mittauspisteiden luokan ja tehdyt havainnot (kuvat 12 ja 13, s. 13).




**KUVA 12** *Verkkopiirroksen merkinnät kaavoitusmittausohjeiden (1983) mukaan. Merkinnät voivat vaihdella eri yhteyksissä, esimerkiksi laskentaohjelmissa, koska merkintöjä ei ole standardoitu. Toispuolisissa havainnoissa (etäisyys ja toispuolinen suunta tai toispuolinen suunta) havainnot on tehty kaavion oikeanpuolisilta pisteiltä käsin. (Kaavoitusmittausohjeet 1983, s. 27.)*




**KUVA 13** *Kaksi pientä tasorunkoverkkoa. a) Kolmiomittauksella on mitattu pisteen 76M7647 koordinaatit (Kaavoitusmittausohjeet, s. 29). Jonomittauksella (b) on mitattu pisteiden 50204, 50205 ja 50206 koordinaatit. Kummassakin mittauksessa havainnot ovat pisteiden välisiä etäisyyksiä ja suuntia. Havaintokojeena tällaisissa mittauksissa on takymetri. Piirrosten merkinnät vastaavat kuvan 12 merkintöjä.*

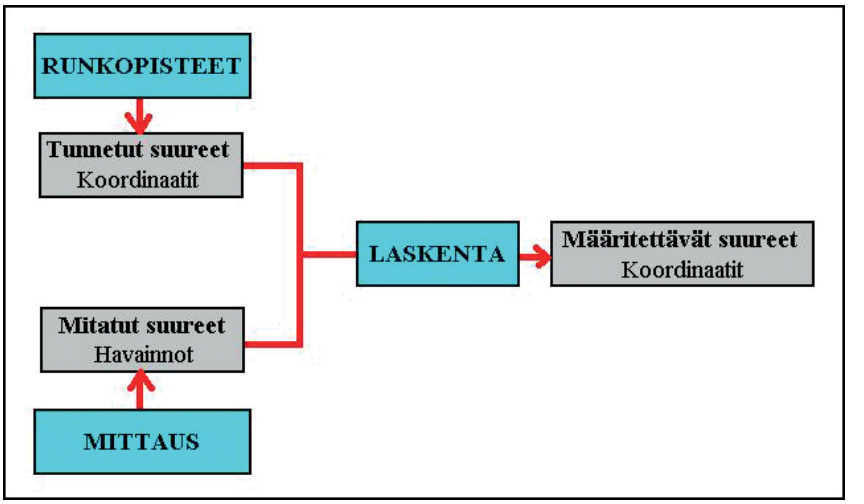
## 1.3 Mittausmenetelmät ja -kojeet

### 1.3.1 Mittausmenetelmän käsite

Mittaus- ja kartoitustekniikassa mittausten yleisenä tavoitteena on ympäristön kohteiden taso- ja korkeussijainnin määrittäminen. Tämä tehdään erilaisten geodeettisten mittausmenetelmien avulla. Mittausmenetelmän käsite tarkoittaa sitä loogista ratkaisutapaa, jolla mitatuista suureista päästään määritettäviin suureisiin. Mittausmenetelmät voivat olla joko suoria tai välillisiä menetelmiä. Suorassa mittausmenetelmässä lopputulos saadaan suoraan havaitsemalla. Välillisissä menetelmissä määritettävät suureet johdetaan laskemalla tunnetuista suureista ja havainnoista.

Geodeettisin menetelmin sijaintia ei saada selville suoraan mittaustuloksena vaan sijainti johdetaan laskemalla tunnetuista ja mitatuista suureista. Sijaintimittausten menetelmät ovat siis välillisiä mittausmenetelmiä. Niitä voidaan kuvata kolmitasoisena toimintana (kuva 14):

- Tunnetut suureet ovat kiintopisteiden koordinaatteja ja korkeuksia. Niiden avulla määritetään mittauksen koordinaatisto ja korkeusjärjestelmä.
- Mittausten tuloksena saadaan mitatut suureet eli havainnot. Ne kuvaavat mittauspisteiden suhteellista asemaa toisiinsa nähden. Havainnot ovat esimerkiksi etäisyyksiä, suuntia, vaaka- ja pystykulmia ja korkeuseroja.
- Laskennassa (geodeettisessa laskennassa) johdetaan määritettävät suureet tunnetuista ja mitatuista suureista. Määritettävät suureet ovat mittauspisteiden koordinaatteja ja korkeuksia.




**KUVA 14** *Välillinen mittausmenetelmä sijaintimittauksissa. Sijaintimittauksissa kiintopisteiden koordinaatit ja korkeudet ovat tunnettuja suureita, joiden avulla kiinnitytään mittauspaikan koordinaatistoon.*

Geodeettiset mittausmenetelmät on perinteisesti jaettu kahteen osaan. On menetelmiä, joilla määritetään mittauspisteiden tasosijaintia, ja menetelmiä, joita käytetään korkeussijainnin määritykseen. Tällaiseen jaotteluun on useita syitä. Ensinnäkin tasosijainti esitetään koordinaatteina ja koordinaatistojen määrittelyn taustalla on Maan muodon matemaattinen kuvaaminen. Sen sijaan korkeuksien vertailutaso on fysikaalinen pinta, painovoiman samanarvopinta eli geoidi, joka yhtyy tietyn ajankohdan merenpinnan korkeuteen. Tämä tarkoittaa, että koordinaateilla ja korkeuksilla on periaatteellisesti erilainen vertailukohta. Toisaalta jaottelu taso ja korkeusmittauksiin perustuu mittauskojeiden rakenteeseen, kehityshistoriaan ja mittausten matemaattisen mallintamisen tarpeisiin ja perinteisiin.

Nykyaikaisessa mittaustekniikassa jaottelu tasossa ja korkeus-suunnassa tapahtuviin mittauksiin on jossakin määrin hämärtynyt, erityisesti mittausten suorittamisen tasolla. Esimerkiksi takymetri- tai satelliittimittauksissa syntyy helposti sellainen väärä mielikuva, että mittauksissa havaitaan ja käsitellään suoraan koordinaatteja. Kun mittausmenetelmää aletaan tarkastella laskennan näkökulmasta, mittausten jaottelu tasosijainnin ja korkeussijainnin erilliseen määrittämiseen on usein välttämätöntä ja tarkoituksenmukaista.

### 1.3.2 Mitattavat suureet

Suure on ilmiön tai kappaleen ominaisuus, joka voidaan tunnistaa ja mitata. Suureen arvo ilmaistaan lukuarvon ja mittayksikön tulona. Mittaus- ja kartoitustekniikassa käytettävät perussuureet ovat pituus ja kulma. Yleisesti voidaan sanoa, että geodeettisin menetelmin mitattavat asiat ovat geometrian perusasioita, joista voidaan laatia seuraava luettelo:

- perussuureet pituus ja kulma
- suunta
- tasosijainti
- korkeusero
- korkeussijainti
- vaakasuoruus
- pystysuoruus
- kohtisuoruus
- yhdensuuntaisuus
- kappaleen tai pinnan muoto
- pinta-ala
- tilavuus.

Luettelossa mainitut tasosijainti, korkeusero, korkeussijainti, pinta-ala ja tilavuus perustuvat pituuteen. Suunnan, vaaka-, pysty- ja kohtisuoruuksien ja yhdensuuntaisuuden määrittelyjen taustalla ovat kulmasuureet. Kappaleen muoto on monimuo-

toisempi käsite, jonka yhteydessä tarvitaan sekä pituus- että kulmasuureita. Pituus ja kulma voidaan mitata suoraan. Muiden suureiden mittaus tapahtuu yleensä välillisten mittausmenetelmien avulla.

### 1.3.3 Mittauskojeet

Tärkeimmät nykyaikaiset geodeettiset mittauskojeet ovat takymetri, jolla mitataan suuntia (vaaka- ja pystykulmia) ja etäisyyksiä, satelliittipaikannin, jolla mitataan etäisyyksiä satelliitteihin tai muihin satelliittipaikantimiin sekä vaaituskoje, jolla mitataan korkeuseroja. Viime vuosina näiden kojeiden rinnalle on tullut laserkeilain, jolla mitataan automaattisesti ja nopeasti etäisyyksiä ja suuntia mittauskohteeseen. Mainittujen kojeiden lisäksi mittauksissa tarvitaan erilaisia apuvälineitä, joita ovat mm. seuraavat kojeet ja välineet (kuva 15, s. 17):

- mittanauha ja taskumitta (etäisyydenmittaus, koje- ja tähyskorkeudet)
- kaksoispentagonprisma (suora- ja oikokulma, suorakulmainen mittaus)
- riippuluoti (pystysuoruus, keskistys)
- optinen luoti (pystysuoruus, keskistys)
- linjaseiväs ja mittatikku (linjojen ja pisteiden merkintä)
- bussoli eli käsisuuntakehä (suunta)
- klinometri eli kaltevuusmittari (korkeuskulma, korkeus)
- lämpömittari (etäisyydenmittauksen korjaukset)
- barometri eli ilmanpainemittari (etäisyydenmittauksen korjaukset, korkeus).

Vielä 1970-luvulla mittanauha ja kaksoispentagonprisma (kuva 15 a ja b, s. 17) olivat yleisesti käytössä kartoitus- ja merkintämittauksissa. Niillä avulla tehtiin suorakulmaista mittausta, joka on mittausperiaatteensa vuoksi edelleen tarpeellinen mittausmenetelmä tuntea. Nykyisin suorakulmaista mittausta käytetään muun muassa takymetrillä ja satelliittipaikantimella tehtävien mittausten apumenetelmänä.

Teodoliitti on perinteinen kulmanmittauskoje. Nykyisin sen sijasta käytetään takymetriä, jolla voidaan mitata kulmien lisäksi myös etäisyyksiä (kuva 15 d ja e, s. 17). Takymetri on maasto- ja rakennusmittausten yleistyökalu. Se on elektro-optinen koje, jossa on sisällä myös tietokone tai siihen voidaan liittää maastotallentimeksi kutsuttu maastotietokone. Tietojenkäsittelyominaisuuksiensa vuoksi takymetrillä voidaan jo mittaustilanteessa käsitellä sijaintitietoja ja tehdä muita välillisiä mittauksia.

Takymetrin rinnalla käytetään entistä enemmän satelliittipaikannusta (kuva 15 f, s. 17). Pääasiassa satelliittipaikannus tukeutuu USA:n ylläpitämiin GPS-satelliitteihin (GPS, Global Positioning System), jonka vuoksi satelliittipaikannuksen yhteydessä puhutaan melko yleisesti GPS-paikannuksesta. Kuitenkin myös Venäjä ylläpitää paikannussatelliitteja (Glonass-järjestelmä). Käyttöön ollaan ottamassa myös Euroopan unionin ylläpitämiä paikannussatelliitteja (Galileo-järjestelmä).

Takymetrit ja satelliittipaikantimet ovat erittäin monipuolisia mittauskojeita, joilla voidaan suorittaa pääosa maastossa ja työmailla tehtävistä kartoitusten, maastomallimittausten ja rakentamisen vaatimista mittauksista.

**KUVA 15** *Kokoelma erilaisia mittauskojeita. Mittanauha (a) ja kaksoispentagonprisma (b) ovat perinteisiä mittausvälineitä, joiden avulla voidaan tehdä muun muassa suorakulmaista mittausta. Takymetri (e), satelliittipaikannin (f) ja vaaituskoje (c) ovat mittaajan tärkeimmät nykyaikaiset työvälineet. Niiden rinnalla on viime vuosina alettu käyttää laserkeilainta (maalaserkeilain, g). Teodoliitti (d), kuvassa elektroninen teodoliitti, on kulmanmittauskoje. Teodoliitteja käytetään nykyisin vähän, koska kulmanmittaukset tehdään yleensä takymetrillä, jolla voidaan mitata myös etäisyyksiä ja välillisesti koordinaatteja ja korkeuksia. Kuvissa Jaakko Lampinen (f) ja Lauri Mäkelä (g).*

Takymetrin ja satelliittipaikantimen avulla voidaan mitata sekä kohteen tasosijainti että korkeus. Korkeudenmittauksessa voidaan käyttää myös vaaituskojetta ja lattaa (kuva 15 c, s. 17). Vaaitus on nykyään lähes samanlaista mittausta kuin satoja vuosia sitten. Vaaitus puolustaa edelleen hyvin paikkaansa mittausmenetelmien joukossa, erityisesti hyvää korkeustarkkuutta vaativissa mittauksissa. Vaaitus sopii tarkkuutensa ja yksinkertaisuutensa vuoksi hyvin myös moniin rakennustyömaan mittauksiin.

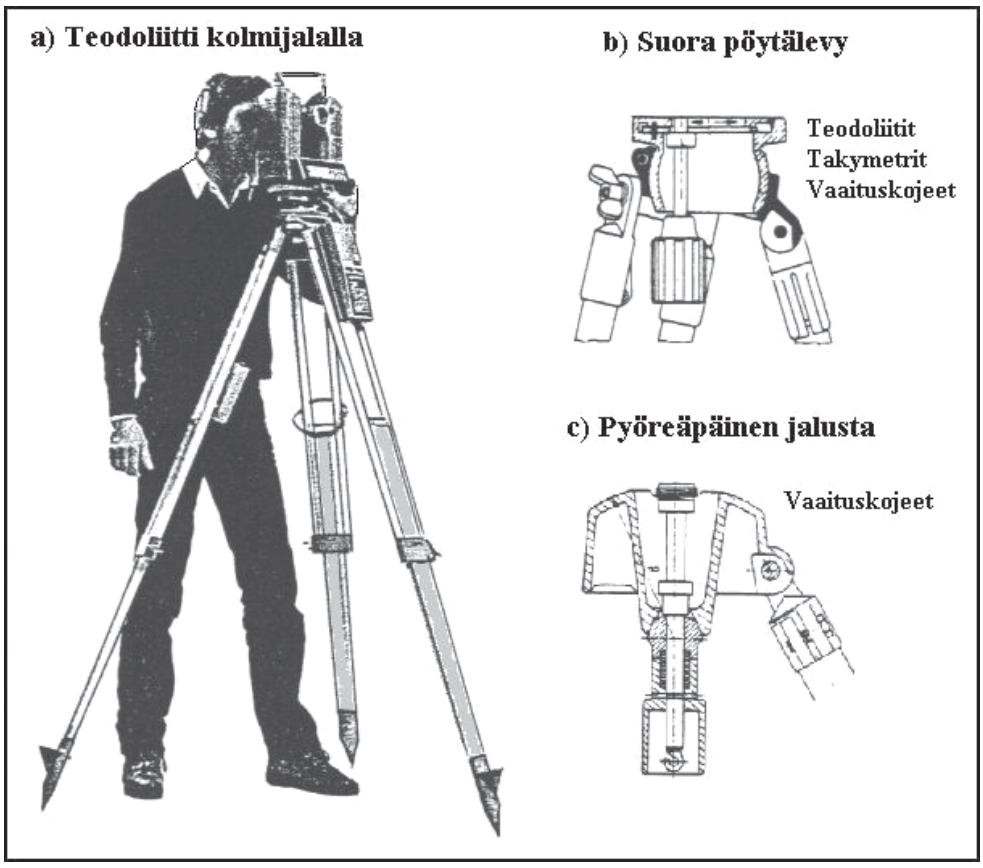
Laserkeilain on uusin yleisesti käytettävistä mittauskojeista. Laserkeilaus perustuu etäisyyksien ja suuntien mittaukseen ja mittausten tarkkaan orientointiin. Ilmasta suoritettavassa keilauksessa laserkeilain on kiinnitettynä lentokoneeseen tai helikopteriin (kuva 2 b, s. 3). Maalaserkeilan on takymetrin kaltainen automaattisesti ja nopeasti etäisyyksiä ja suuntia mittaava koje (kuva 15 g, s. 17). Mittausten perusteella saadaan mittauspisteiden koordinaatit ja muodostetaan kohteesta komiulotteinen pistepilvi, jonka avulla mittauskohdetta voidaan tutkia ja mallintaa yksityiskohtaisesti.

### 1.3.4 Kojejalustat ja kartoitussauvat

Vaaituskojeita, teodoliitteja, takymetrejä, maalaserkeilaimia ja joskus myös satelliittipaikantimia käytetään kolmijalalle asennettuina (kuva 16, s. 19). Mittauskoje asetetaan jalustalle vaakasuoraan. Sanotaan, että se tasataan. Kulmanmittauskoje, teodoliitti tai takymetri, asetetaan usein myös maanpinnalla olevan pistemerkin päälle, jolloin sanotaan, että se keskistetään.

Kojejalustat ovat puisia tai alumiinisia kolmijalkoja. Vaaituskojeen jalustana käytetään yleensä kevyttä alumiinista valmistettua jalustaa, sillä vaaituskoje on kevyt (paino 1–5 kg) ja sitä voidaan joutua siirtämään mittausten aikana jalustaan kiinnitettynä. Vaaituskojeen jalusta voi olla myös kevyt puinen kolmijalka. Takymetrin jalustana on kojeen painon (4–10 kg) vuoksi suositeltavaa käyttää vaaituskojeen jalustaa raskaampaa puista jalustaa. Puinen jalusta on lämpötilamuutosten suhteen vakaampi kuin alumiininen jalusta. Koska takymetri voi olla samassa paikassa pitkiäkin aikoja, jalustan lämpötilan vaihteluista johtuvilla muodonmuutoksilla on merkitystä sen asennon säilymisen kannalta. Tästäkin syystä puinen jalusta sopii alumiinista jalustaa paremmin takymetrin jalustaksi. Maalaserkeilaimen kanssa on yleensä syytä käyttää erikoisjalustaa, koska keilausliike synnyttää värinöitä, joita tavalliset kojejalustat eivät kestä liikkumatta.

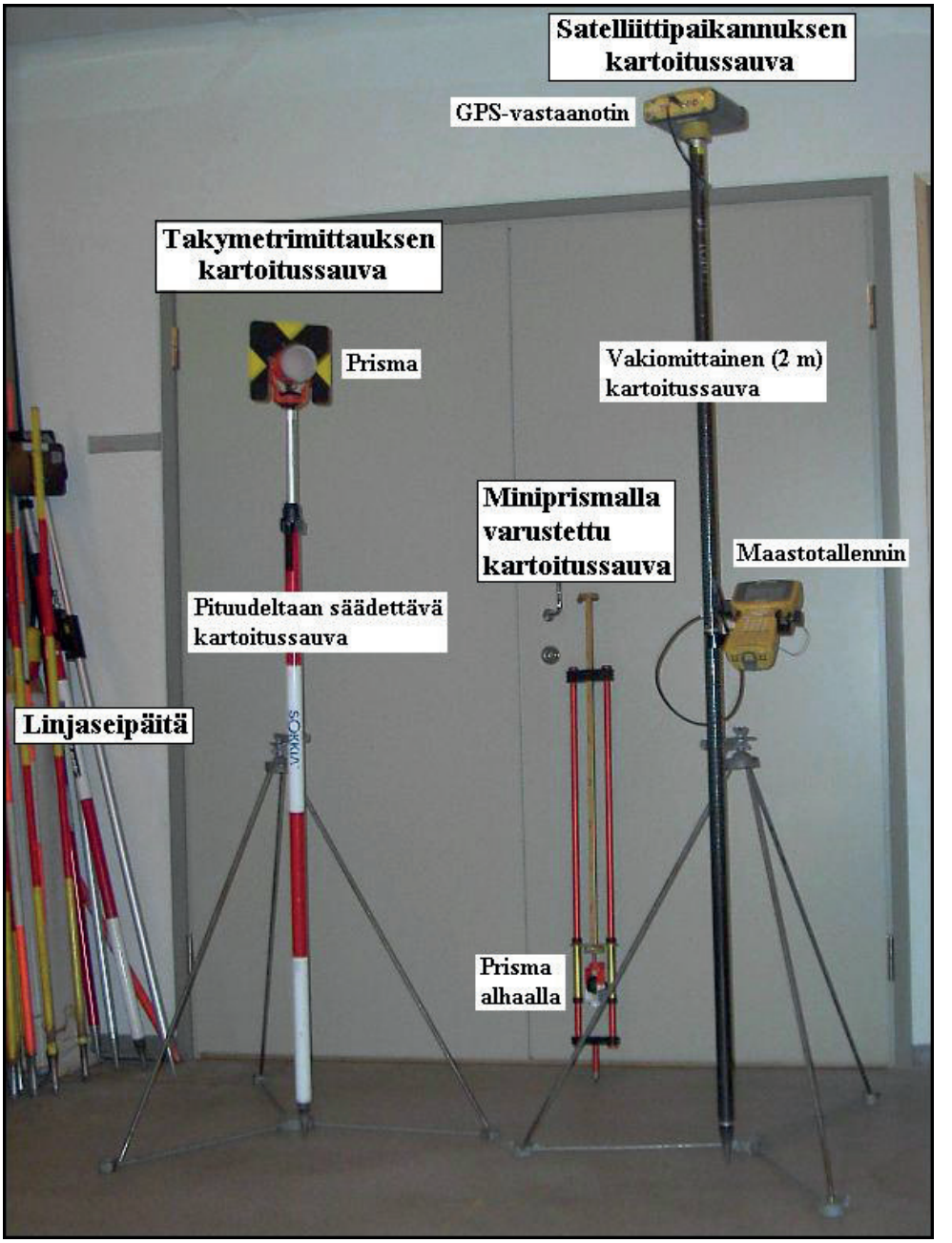
Mittauskoje kiinnitetään ruuvilla jalustan pöytälevyyn. Teodoliitille ja takymetrille sopivan jalustan pöytälevy on suora, koska normaalirakenteisen kojeen samanaikainen tasaus ja keskistys pistemerkin päälle ei ole muutoin mahdollista. Sen sijaan vaaituskojeen jalustan pöytä voi olla pyöreäpäinen. Tällaiselle jalustalle asetettavan vaaituskojeen pohjalevyn tulee olla vastaavasti pyöristetty. Jos vaaituskojeen pohjalevy on suora, sitä ei voi asentaa pyöreäpäiselle jalustalle. (Kuva 16 b ja c, s. 19)




**KUVA 16** *a) Teodoliitti, takymetri tai vaaituskoje asennetaan kolmijalalle. b) Yleensä kolmijalan pöytälevy, johon koje kiinnitetään, on pinnaltaan suora. c) Vaaituskojeen pöytälevy voi kuitenkin olla pyöreäpäinen.*

Takymetrillä ja satelliittipaikantimella tehtävissä mittauksissa tarvitaan kojejalustojen lisäksi kartoitussauvoja. Takymetrillä tehtävissä kartoitus- ja merkintämittauksissa kartoitussauvaan asetetaan etäisyydenmittausta varten prismaksi sanottu heijastin. Sen ympärillä on yleensä myös tähtäyskohdan määrittävä tähyslevy. Kartoitussauvan pituutta voidaan useimmissa sauvoissa säätää, mutta myös vakiomittaisia sauvoja käytetään. Kartoitussauvaan on monesti kiinnitetty tasain, jonka avulla sauva pidetään pystysuorassa. (Kuva 17, s. 20.)

Satelliittipaikannuksen kartoitussauvassa on normaalisti kaikki mittauksessa tarvittavat apuvälineet. Sauvan päähän asennetaan satelliittivastaanotin (tai sen antenni) ja sauvan kylkeen kiinnitetään maastotallennin, jossa ovat mittausohjelmat ja johon mittaustiedot tallennetaan (kuva 17, s. 20). Sauvassa on tasain pystysuoruuden määritystä varten ja usein myös kompassi suuntien arviointia ja antennin suuntausta varten. Antennin suuntauksella on merkitystä tarkoissa runkomittauksissa.

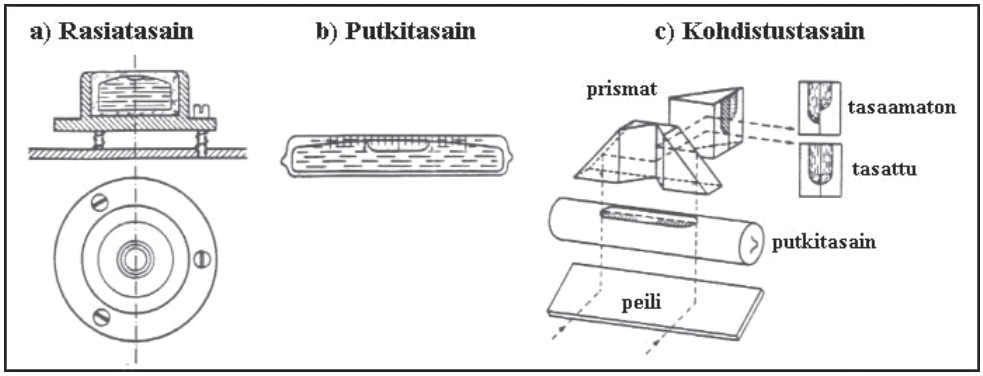



**KUVA 17** *Kuvassa on oikealla ja keskellä kaksi takymetrimittauksessa käytettävää kartoitussauvaa prismoineen ja vasemmalla on satelliittipaikannuksen kartoitusyksikkö. Prismaa käytetään heijastimena takymetrillä tehtävissä etäisyydenmittauksissa. Prisman ympärillä on tähyslevy, johon mittauskaukoputki kohdistetaan. Satelliittipaikannuksessa käytettävään sauvaan on kiinnitetty maastotietokone eli maastotallennin, jolla ohjataan mittaustietojen keruuta. Taustalla, kuvan vasemmassa reunassa on myös linjaseipäitä, joita käytetään pisteiden ja linjojen merkintään.*

### 1.3.5 Tasaimet

Mittauskojeissa ja kartoitussauvoissa tarvitaan erilaisia tasaimia, joiden avulla laite asetetaan vaaka- ja pystysuoraan. Perinteinen tasain on nesteellä täytetty säiliö, jossa oleva ilmakupla ja tasaimen kanteen piirretyt kohdistusmerkit osoittavat tasaimen asennon vaakatason suhteen. Rasiatasain (kuva 18 a) on vaaituskojeen, teodoliitin ja takymetrin karkea tasain, joka osoittaa likimäärin kojeen asennon vaakatason suhteen. Se on myös kartoitussauvoissa käytettävä tasain. Putkitasain (kuva 18 b) on teodoliitin ja takymetrin tarkka tasain. Sen avulla koje hienosäädetään vaakatasoon. Kohdistustasaimeksi sanottu putkitasain (kuva 18 c) löytyy muun muassa tasattavista tarkkavaaituskojeista. Kohdistustasaimeen liittyy erityinen prismojen muodostama katselulaite ja säätöruuvi (nostoruuvi), joiden avulla tasaus voidaan tehdä täsmällisesti.

Nestetasaimien lisäksi vaaituskojeissa ja takymetreissä on myös automaattisesti toimivia tasaimia, joita kutsutaan kompensaattoreiksi. Ne ovat joko mekaanisesti tai sähköisesti toimivia laitteita. Kompensaattorilla varustettua vaaituskojetta kutsutaan itsetasaavaksi vaaituskojeeksi. Takymetrien kompensaattorien avulla voidaan automaattisesti valvoa kojeen asennon pysyvyyttä ja korjata tarvittaessa mittaushavaintoja. Nykyaikaisissa takymetreissä kompensaattorit ovat monissa laitemalleissa voineet korvata perinteisen putkitasaimen.

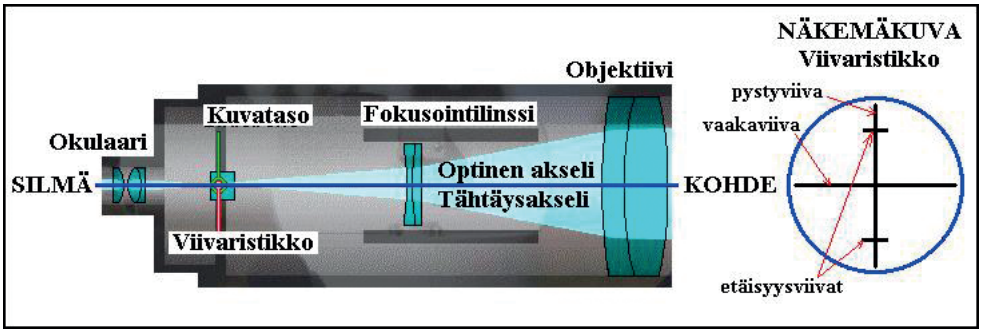



**KUVA 18** *Erilaisia nestetasaimia. Rasiatasain (a) on näistä epätarkin. Putki- ja kohdistustasainten (b ja c) avulla voidaan suorittaa laitteen tarkka tasaus. Kohdistustasainta (c) käytetään esimerkiksi perinteisissä tarkkavaaituskojeissa. Nestetasaimien lisäksi kojeissa voi olla painovoiman suhteen automaattisesti vaakatasoon asettuvia mekaanisia ja elektronisia tasaimia, joita kutsutaan kompensaattoreiksi.*

### 1.3.6 Mittauskaukoputki

Vaituskojeissa, teodoliiteissa ja takymetreissä on kaukoputki, jolla tähdätään mittauskohteeseen. Mittauskaukoputkessa on kolme linssiyhdistelmää. Objektiivi on kohteen puoleinen linssi eli se suunnataan kohteeseen. Okulaari on havaitsijan puoleinen linssiyhdistelmä, jonka lävitse havaitsija katsoo kohdetta. Objektiivi- ja okulaarilinssien polttovälien suhde määrittää kaukoputken suurennuksen. Suurennusta voidaan periaatteessa muuttaa vaihtamalla okulaari, mutta yleensä vaihto-okulaareja ei mittauskojeissa käytetä. Kaukoputken sisältä löytyy vielä fokusointilinssi, jonka avulla kohteen kuva voidaan tarkentaa teräväksi. Kaukoputken sisällä on myös viivaristikko, jonka keskipisteen kautta kulkee tähtäysakseli. Mitattaessa viivaristikon keskikohta suunnataan kohteeseen ja mittaushavainnot liittyvät tähän kohtaan. (Kuva 19.)

Mittauskaukoputkessa on kaksi näkemiseen vaikuttavaa säätöä. Ensinnäkin kohteen kuva fokusoidaan eli tarkennetaan teräväksi siirtämällä fokusointilinssiä siihen liittyvän säätöruuvin tai säätörenkaan avulla. Vaituskojeissa fokusointi tapahtuu kaukoputken sivussa olevan säätöruuvin avulla. Sen sijaan teodoliiteissa ja takymetreissä fokusointi tehdään okulaarin ympäri kiertyvän säätörenkaan avulla. Toisella kaukoputken säädöllä viivaristikon kuva tarkennetaan siirtämällä okulaaria sen silmäkappaletta kiertämällä. Mittauksia suoritettaessa sekä kohteen että viivaristikon kuvien tulee näkyä terävinä.



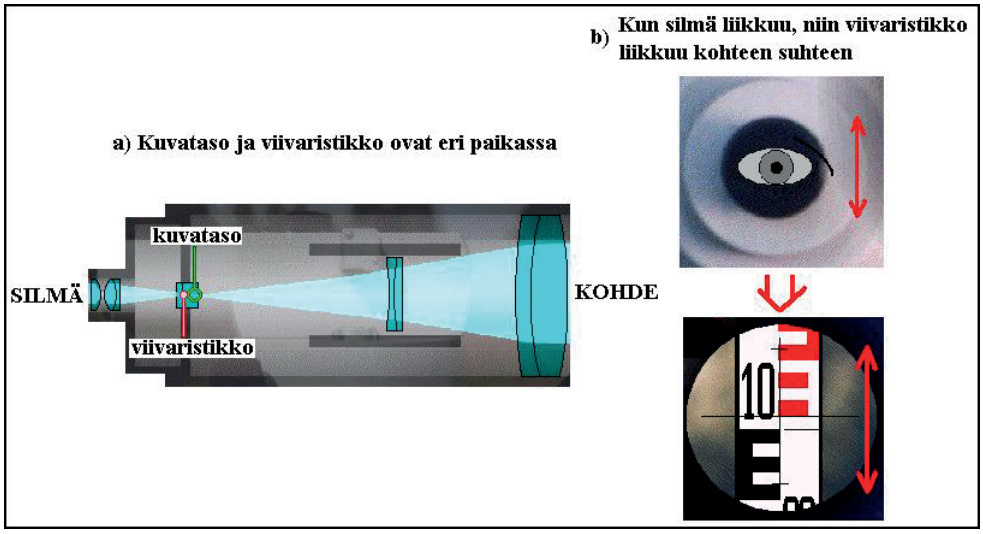

**KUVA 19** *Mittauskaukoputken rakenne. Kaukoputken sisällä olevan viivaristikon avulla muodostetaan tähtäysakseli. Se kulkee viivaristikon keskipisteen kautta. Viivaristikon pystyviivassa on yleensä kaksi lyhyttä poikkiviivaa, joita voidaan käyttää likimääräiseen etäisyydenmittaukseen, silloin kun kaukoputki tähdätään sopivaan mitta-asteikkoon, esimerkiksi vaituslattaan. (Scherer 1999.)*

Mittauskaukoputken käytössä tulee huomioida mahdollinen parallaksiilmiö. Kaukoputkessa on parallaksia, jos viivaristikon ja kohteen kuvat ovat eri tasoissa (kuva 20, s. 23). Jos havaitsija tässä tilanteessa liikuttaa silmäänsä okulaarin takana, viivaristikko liikkuu kohteen suhteen ja viivaristikon tarkka kohdistaminen kohtee-

seen on mahdotonta. Tämän vuoksi parallaksi on poistettava kaukoputkesta ennen mittauksia. Poisto tapahtuu seuraavasti:

1. Tarkennetaan kaukoputki äärettömyyteen fokusointiruuvista kiertäen, jolloin kaukana olevat kohteet näkyvät terävinä. Kaukoputki on tässä vaiheessa hyvä suunnata jotakin vaaleaa taustaa, esimerkiksi taivasta tai vaaleaa seinää kohden, jotta viivaristikko on selvästi nähtävillä.
2. Kierretään okulaarin silmäkappaletta, kunnes viivaristikko näkyy terävänä.

Kaukoputken säädöt ovat havaitsijakohtaisia. Kun havaitsija vaihtuu, tulee kaukoputken säädöt aina tarkistaa. Yleensä kesken mittauksia ei kannata vaihtaa havaitsijaa johtuen sekä kaukoputken havaitsijakohtaisista säädöistä että yleensäkin kaukoputken yksilöllisestä kohdistustavasta.




**KUVA 20** *a) Kaukoputkessa on parallaksia, jos objektiivin kohteesta muodostama kuva ei muodostu viivaristikon tasoon. b) Kaukoputkella ei voi tähdätä tarkasti, jos siinä on parallaksia, koska mittaajan silmän paikka okulaarin takana vaikuttaa viivaristikon osumakohtaan kohteessa. (Scherer 1999.)*

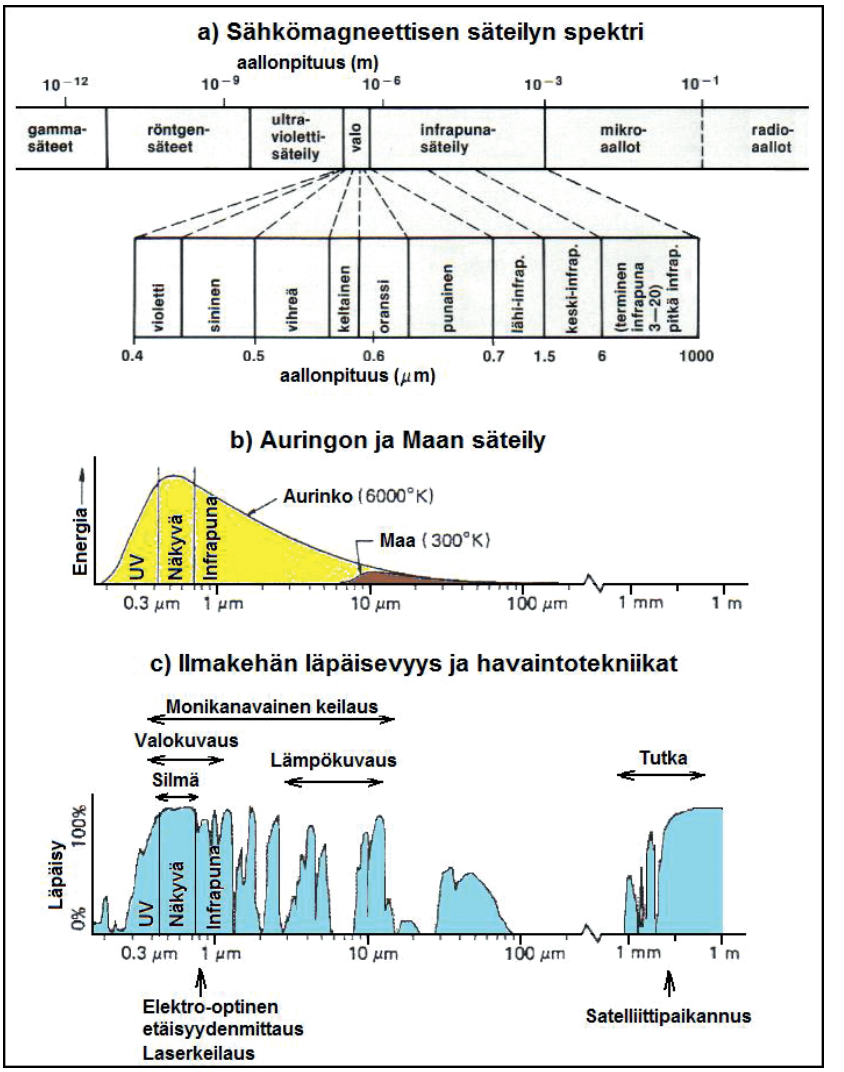
## 1.4 Sähkömagneettinen säteily

Sähkömagneettinen säteily toimii mittaustiedon kantajana sekä maanpinnalla tehtävissä mittauksissa että kaukokartoituksessa. Sähkömagneettinen säteily on sähkömagneettisen kentän aaltoliikettä. Sitä syntyy erilaisten sähköisten ilmiöiden aiheuttamana. Mittauksissa hyödynnettävä sähkömagneettinen säteily synnytetään mittauslaitteilla tai mitattava säteily on Auringon ja Maan lämpötilansa perusteella synnyttämää säteilyä. (Kuva 21, s. 24)

Sähkömagneettinen säteily etenee tyhjiössä valon nopeudella. Sähkömagneettisen säteilyn etenemisnopeus, aallonpituus ja taajuus liittyvät toisiinsa seuraavasti:

$$c = \lambda f \tag{1}$$

jossa $c$ on valon nopeus tyhjiössä (299 792 458 m/s), $\lambda$ on säteilyn aallonpituus (m) ja $f$ on säteilyn taajuus (1/s).



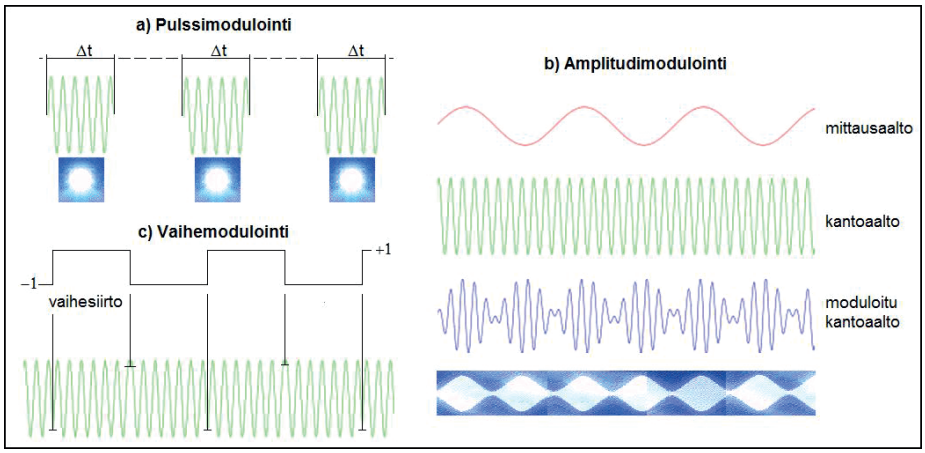

**KUVA 21** *a) Sähkömagneettisen säteilyn spektri (Punkari 1984, s. 8. b) Auringon ja Maan säteilyn jakauma). c) Ilmakehän läpäisevyys ja havaintotekniikat (b ja c, Lillesand, Kiefer ja Chipman 2008, s. 11). Osa sähkömagneettisesta säteilystä absorboituu ilmakehään. Tietyt aallonpituudet läpäisevät hyvin ilmakehän muodostaen siihen ikkunoita, joiden kautta mittaushavainnot voidaan tehdä.*

Osa sähkömagneettinen säteilystä absorboituu ilmakehään. Absorption vuoksi mittaus- ja kartoitustekniikassa voidaan hyödyntää lähinnä kolmea sähkömagneettisen säteilyn aallonpituusaluetta (kuva 21 a ja c, s. 24):

- optinen säteily 0,3 µm – 4,0 µm
- ultravioletti säteily (UV) 10 nm – 0.4 µm
- näkyvä valo (VIS) 0,4 µm – 0,7 µm
- lähi-infrapunavalo (NIR) 0,7 µm – 1,5 µm
- keski-infrapunasäteily (MIR) 1,5 µm – 4,0 µm
- terminen säteily, myös lämpöinfrapunasäteily (TIR) 4 µm – 100 µm
- mikroaaltosäteily (MW) 1 mm – 1 m.

Näkyvän valon aallonpituusalueella (VIS) toimitaan, kun tehdään havaintoja mittauskaukoputkella tai kaukokartoituksessa. Lähi-infrapunavaloa (NIR) käytetään elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa ja laserkeilauksessa. Termistä säteilyä (TIR) mitataan kaukokartoituksessa. Mikroaaltosäteilyä (MW) hyödynnetään satelliitipaikannuksessa ja kaukokartoituksen mikroaaltotutkissa.

Elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa ja satelliittipaikannuksessa käytettävä mittaussignaali muodostuu usein kahdesta osasta eli kantoaallosta ja siihen moduloidusta mittausaallosta. Moduloinnissa käytetään pulssi-, amplitudi ja vaihemodulointia. Kantoaalto on esimerkiksi elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa infrapunaista valoa. Pulssimoduloinnissa kantoaallosta tuotetaan hyvin lyhytkestoisia valopulsseja. Amplitudimoduloinnissa puolestaan kantoaallon kirkkautta vaihdellaan mittausaallon säätämässä tahdissa. Satelliitipaikannuksessa käytetään kantoaaltona mikroaaltosäteilyä. Mittauksissa hyödynnetään sekä kantoaaltoa sellaisenaan että siihen vaihemoduloinnilla liitettyjä mittaustietoja. (Kuva 22.)



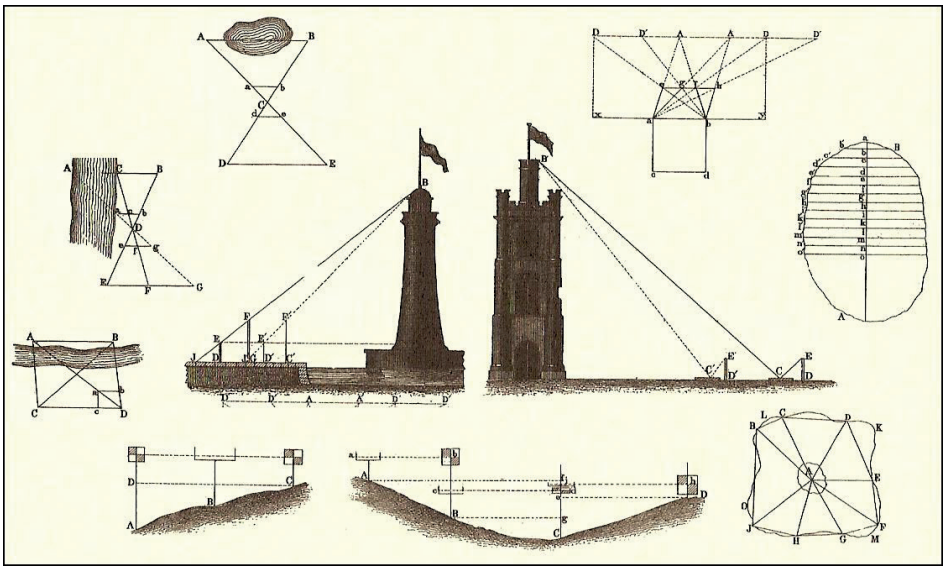

**KUVA 22** *Mittaussignaalin modulointitapoja. Pulssimodulointia (a) ja amplitudimodulointia (b) käytetään elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa. Vaihemodulointia käytetään muun muassa satelliittipaikannuksessa.*

## 1.5 Tehtäviä

1. Millainen kappale on Maan muotoa kuvaava pyörähdysellipsoidi (kuva 3, s. 4)? Miten sen muotoa ja muodostamistapaa voi kuvata sanallisesti?
2. Mitkä ovat Maan likimääräiset mitat (säde ja ympärysmitta)?
3. Kerro kuvan 7 (s. 7) perusteella, mitä tarkoittavat zeniitti ja nadiiri? Kuvassa mainitaan myös luotiviiva. Mitä se tarkoittaa ja mistä sana mahdollisesti juontuu?
4. Mihin kiintopisteitä tarvitaan? Tutustu lähiympäristössäsi (oppilaitos, koti) löytyviin runkopisteisiin. Mistä mahdollisesti on saatavissa niihin liittyviä tietoja?
5. Kuva 11 (s. 11) esittää pisteen 50501 pisteselityskorttia. Pisteselityskortilla ei ole esitetty kaikkia tekstissä mainittuja tietoja. Mitkä pisteen kuvailuun liittyvät asiat siinä ovat ja mitkä siitä puuttuvat?
6. Kuva 13 (s. 13) esittää kahta tasorunkomittausta. Laadi luettelo tai taulukko, joka kertoo mahdollisimman yksityiskohtaisesti, mitä havaintoja on tehty kuvan a) kolmiomittauksessa ja b) jonomittauksessa? Kirjaa muistiin myös mittauspisteiden luokat.
7. Kuvassa 17 (s. 20) on miniprismalla varustettu kartoitussauva, jossa prisma sijaitsee sauvan alaosassa. Mitä hyötyä tästä voi olla verrattuna sauvaan, jossa prisma sijaitsee sauvan yläosassa?

# 2 MITTAUSTEKNINEN LASKENTA

Geodeettinen laskenta tarkoittaa geodesiaan ja mittaus- ja kartoitustekniikkaan liittyvää matematiikkaa ja laskentamenetelmiä. Geodeettisen laskennan asiat liittyvät koordinaattijärjestelmiin, mittaushavaintojen käsittelyyn, havainnoista johdettavien suureiden laskentaan, mittausten virheisiin ja tarkkuuteen sekä mittaajien työtehtävistä johtuen myös rakentamisen suunnitteluun ja toteutukseen. Tämän jaottelun perusteella geodeettinen laskenta voidaan jakaa mittaustekniseen ja suunnitteluteknisen laskentaan. Kirjassa tarkastellaan ensisijaisesti mittausteknisen laskennan tehtäviä, mutta suunnitteluteknisen laskennan ongelmiakaan ei unohdeta. Mittausteknistä laskentaa käsittelevässä luvussa esitellään geodeettisen laskennan perusteita. Perusasiat ovat ensisijaisesti geometriaa, erityisesti analyyttistä geometriaa, joka tutkii geometrisia ongelmia koordinaatistoon sijoitettuna. Mittauskojeiden käytön näkökulmasta tarkasteltavat asiat liittyvät ensisijaisesti takymetrimittauksiin. Vaaituksen laskennat käsitellään myöhemmin vaaituksen yhteydessä (luku 6). Satelliittimittauksiin liittyviä laskentoja ei käsitellä, koska ne eivät kuulu mittaus- ja kartoitustekniikan perusteisiin. Mittaustekninen laskenta -luvussa tarkastellaan yleispiirteisesti myös vaativampia geodeettisen laskennan menetelmiä, kun puhutaan virhe- ja tarkkuuskäsitteistä, pienimän neliösumman periaatteesta ja tasoituslaskennasta. (Kuva 23.)



**KUVA 23** *Korkeudenmittauksiin ja tasosijainnin mittauksiin liittyviä geodeettisia ongelmia 1700- ja 1800-lukujen vaihteessa (Heck 2001, kooste s. 9 kuvista, alkuperäiset kuvat on julkaistu 1844).*

## 2.1 Geodeettinen laskenta

Perinteisen maanmittausalalla vallitsevan näkemyksen mukaan geodeettisen laskennan aihepiiriin kuuluvat tehtävät liittyvät mittaushavaintojen käsittelyyn, havainnoista johdettavien suureiden laskentaan ja rakentamisen suunnitteluun ja toteutukseen. Tämä vuoksi geodeettisen laskennan yhteydessä on tarkoituksenmukaista puhua toisaalta mittausteknisestä laskennasta ja toisaalta suunnitteluteknisestä laskennasta.

Mittausteknisen laskennan osa-alueita ovat

- havaintojen keruuseen (havaintokirjanpitoon) liittyvä laskenta
- mittaushavaintojen redukointi eli korjaaminen laskentakoordinaatistoon
- havainnoista johdettavien suureiden laskenta
- koordinaattien muunnokset esitystavasta toiseen ja koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset
- mittausten virheiden ja tarkkuuden arviointi.

Suunnitteluteknisen laskennan osa-alueita ovat puolestaan

- kaavojen ja rakennussuunnitelmien koordinaattitulkinta
- merkintämittauksiin liittyvä laskenta
- pinta-alojen ja tilavuuksien määrittäminen.

Geodeettisen laskennan perusasiat ovat geometriaa, erityisesti analyyttistä geometriaa, joka tutkii geometrisia kuvioita ja ongelmia taso- tai kolmiulotteiseen koordinaatistoon sijoitettuna. Yleisen matematiikan yhteydessä harjoitetusta analyyttisestä geometriasta geodeettinen laskenta eroaa tietyssä määrin johtuen muun muassa mittaushavaintojen suoritustekniikoista, maapalloon sidottujen koordinaatistojen määrittelystä ja maanmittausalan perinteistä.

Kun puhutaan geodeettisen laskennan perusteista, yleisesti ajatellaan, että perusteisiin liittyvät ongelmat ratkotaan suorakulmaisessa koordinaatistossa. Tämä tarkoittaa, että maapallon muotoon liittyvät ongelmat jätetään pääosin huomioimatta geodeettisen laskennan perusteita käsiteltäessä. Myöskään pienimmän neliösumman periaatteeseen perustuvat yleiset tilastomatemaattiset menetelmät (tasoituslaskennan menetelmät) ja mittausten syvälliset virheteoreettiset tarkastelut eivät kuulu geodeettisen laskennan perusteisiin. Kuitenkin eräitä pienimmän neliösumman periaatteeseen perustuvia erityisiä laskentamenetelmiä käytetään myös geodeettisen laskennan perusteisiin kuuluvien ongelmien ratkaisussa. Ne liittyvät perinteisiin jonomuotoisiin runkomittauksiin, kuten jonovaaitukseen ja monikulmiojonomittaukseen, mutta myös koordinaattimuunnoksiin.

Geodeettisen laskennan perusteisiin kuuluvissa tehtävissä mittaushavainnot suoritetaan pääasiassa vaaitsemalla tai takymetrillä. Satelliittipaikannukseen liittyviä matemaattisia ongelmia ja tehtäviä ei tämän kirjan yhteydessä käsitellä.

Geodesiaan ja mittaus- ja kartoitustekniikkaan liittyvät matemaattiset ongelmat ratkotaan nykyisin pääasiassa tietoteknisesti. Oppimistarkoituksessa ja asioiden ymmärtämisen vuoksi on kuitenkin tarkoituksenmukaista tehdä geodeettiseen laskentaan liittyvää käsityötä, mikä tarkoittaa muun muassa havainnekuvien piirtämistä, karttojen ja kuvien mittaamista ja laskimella laskemista. Kynä, viivain, astemitta ja harppi ovat geodeettisen laskennan opiskelun työvälineitä. Ne antavat paremmin aikaa ja mahdollisuuden ajatella, toisin kuin valmiiden laskentaohjelmien käyttäminen.

Mittausteknillisten asioiden ymmärtämisen vuoksi kirjassa on runsaasti geodeettiseen laskentaan liittyviä tehtäviä. Yksinkertaisetkin tehtävät pakottavat miettimään ja jäsentämään asioita. Ennen kuin ryhtyy ratkomaan jotain erityistä tehtävää, kannattaa palauttaa mieleen matemaattisten ja fysikaalisten ongelmien ratkaisuun liittyvät yleiset neuvot:

- Aluksi selvitetään, mitä tehtävässä kysytään, mitä tunnetaan, mitkä ovat havainnot, mitkä ovat määritettävät suureet, ja pitääkö jotain olettaa.
- Jos tehtävänantoon liittyy kuva, se on yleensä vain havainnekuva, jonka perusteella ei saa tehdä liian pitkälle meneviä johtopäätöksiä.
- Ongelman ratkaisua on hyvä selventää kuvan tai kuvien avulla. Kun ongelman pystyy esittämään geometrialtaan ja mittakaavaltaan oikein kuvana, sen voi myös ratkaista matemaattisesti.
- Tehtävän ratkaisu tulee perustella esittämällä ratkaisun vaiheet tekstiä, kaavoja ja kuvia käyttämällä. Tämä on tärkeää asioiden ymmärtämisen kannalta.
- Käsin laskennassa tulee noudattaa riittävää numeerista esitystarkkuutta. Tulos ilmoitetaan aina niin monen merkitsevän numeron tarkkuudella kuin on epätarkin lähtöarvo.
- Geodeettisessa laskennassa tulee aina varmistaa laskimen kulmayksikkö. Väärän kulmayksikön käyttö on yleinen laskuvirheiden syy.
- Lopuksi on hyvä arvioida laskennan oikeellisuutta. Selkeät kuvat auttavat oikeellisuuden arviointia. Usein tehtävän voi myös ratkaista vaihtoehtoisilla tavoilla. Vielä yksi tarkistuskeino on ratkaisun mittayksikön tai -yksikköjen tarkistus.

Viimeinen, tarkastuksia koskeva kohta on tärkeä, koska jokainen tekee virheitä. Oppimisen kannalta on tärkeää huomata itse omat virheensä ja korjata ne. Usein virheiden taustalla ovat väärät oletukset ja niistä johtuva ongelmien yksinkertaistaminen, siis eräänlainen toiveajattelu, että ongelmille on aina olemassa jokin yksinkertainen ja vaivaton ratkaisu.

## 2.2 Mittayksiköt ja mittakaava

### 2.2.1 Pituuden yksiköt

Mittaus- ja kartoitustekniikassa käytettävät suureet ovat ensisijaisesti pituuksia ja kulmia. Tämän vuoksi näihin suureisiin liittyvät mittayksiköt ovat mittaus- ja kartoitustekniikassa erityisen tärkeitä. Mittayksikköjen käytön lähtökohtana on kansainvälinen SI-järjestelmä (Systeme International d'Unités), jonka yleinen paino- ja mittakonferenssi (CGPM) vahvisti vuonna 1960 Pariisissa.

Metri on SI-järjestelmän pituuden yksikkö. Se määritellään nykyään pituudeksi, jonka valo kulkee tyhjiössä 1/299792458 sekunnissa. Pituuden yksikön määrittely liittyy näin ollen yhteen luonnon perusvakioon, valon nopeuteen tyhjiössä, ja ajan mittaukseen. Hyvin pieniä tai suuria pituuksia mitattaessa käytetään metrin kerrannaisyksiköitä. Suositeltavaa on käyttää $10^{3n}$:n kerrannaisia (taulukko 2). Esimerkiksi senttimetri ei ole tämän periaatteen mukaan suositeltava pituuden mittayksikkö.

**TAULUKKO 2** *Mittaus- ja kartoitustekniikassa yleisimmin käytettävät metrin kerrannaisyksiköt ja esimerkkejä niiden käytöstä.*

| Nimi | Tunnus | Suhde metriin | Esimerkkejä käytöstä |
|---|---|---|---|
| nanometri | nm | $10^{-9}$ m | valon aallonpituus |
| mikrometri | µm | $10^{-6}$ m | kuvakoordinaatit kaukokartoituksessa, pienet muodonmuutokset ja koneenosien mitat |
| millimetri | mm | $10^{-3}$ m | talon- ja koneenrakennuksen rakennepiirustusten mitat |
| metri | m | $10^{0}$ m | mitatut etäisyydet ja suorakulmaiset koordinaatit |
| kilometri | km | $10^{3}$ m | maantieteelliset etäisyydet |

### 2.2.2 Kulmayksiköt

Kulmayksikköjen käytön osalta mittaus- ja kartoitustekniikan tehtävissä usein poiketaan SI-järjestelmän suosituksista. Syynä tähän ovat maanmittausalan pitkät perinteet ja erilaisten alan tietotaitoa hyödyntävien käyttäjäryhmien tarpeet. Kansainvälisessä SI-järjestelmässä tasokulma on johdannaissuure, jonka yksikkö on radiaani. Radiaani on laaduton mittayksikkö, mutta sen yhteydessä voidaan selvyyden vuoksi käyttää rad-merkintää, esimerkiksi kulma voi olla suuruudeltaan 1.345 rad. Aste on SI-järjestelmään kuulumaton yksikkö, mutta se hyväksytään yleiskäytössä tasokulman yksiköksi. Se on ehkä yleisimmin tunnettu ja käytetty kulmayksikkö. Maanmittaustekniikka on tekniikan erikoisala, jossa on hyväksyttyä käyttää goonia (uusastetta) tasokulman yksikkönä. Maanmittausalalla goonia käytetäänkin yleisesti mittauksissa, mutta muilla tekniikan aloilla sen käyttö on harvinaista. (Taulukko 3, s. 31.)

**TAULUKKO 3** *Maanmittausalalla käytettävät kulmayksiköt.*

| Nimi | Tunnus | Esimerkkejä käytöstä |
|---|---|---|
| radiaani | rad | geodeettinen laskenta, erityisesti virheitä tutkittaessa ja tasoituslaskennassa |
| aste | ° | maantieteelliset koordinaatit, suunnat ja talon- ja koneenrakennuksen rakennepiirustusten mitat |
| gooni | gon | kulmanmittaus ja geodeettinen laskenta |
| piiru | v | pohjoissuuntien erot suomalaisilla maastokartoilla ja suunnistuksessa |

Kun goonijärjestelmässä halutaan esittää pieni kulma, se voidaan antaa milligooneina (mgon), uusina minuutteina ($^c$) tai uusina sekunteina ($^{cc}$): 1 mgon = 0.001 gon, $1^c$ = 0.01 gon ja $1^{cc}$ = 0.0001 gon. Milligooni on mittauksissa yleisimmin käytetty yksikkö näistä pienten kulmien esitystavoista.

Geodeettisessa laskennassa joudutaan suorittamaan hyvin usein kulmayksikköjärjestelmien välisiä muunnoksia. Ne suoritetaan joko täyteen kulmaan (360°) tai oikokulmaan (180°) perustuvien verrantojen avulla. Eri kulmayksikköjärjestelmissä oikokulma on 180° = 200 gon = π rad = $3000^v$. Muunnoskaavoja varten merkitään, että $d$ on kulma desimaaliasteina, $g$ on vastaava kulma gooneina, $r$ on kulma radiaaneina ja $p$ on kulma piiruina. Näillä merkinnöillä voidaan kirjoittaa muun muassa seuraavat verrannot muunnoslaskuja varten:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{g} = \dfrac{180°}{200\ \text{gon}} \\ \dfrac{d}{r} = \dfrac{180°}{\pi} \\ \dfrac{d}{p} = \dfrac{180°}{3000^v} \end{cases} . \qquad (2)$$

Astejärjestelmässä voidaan käyttää joko asteita (°), minuutteja (’) ja sekunteja (”) tai asteita ja desimaaliminuutteja tai desimaaliasteita. Desimaaliasteita on käytettävä erityisesti laskennassa, kuten kulmayksikkömuunnoksissa ja trigonometrisia funktioita käytettäessä. Koska 1° = 60’ = 3600”, asteina, minuutteina ja sekunteina annettu kulma muunnetaan desimaaliasteiksi kaavalla

$$d = a + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}, \qquad (3)$$

jossa $d$ on kulma desimaaliasteina, $a$ on kulman asteluku, $m$ on minuuttiluku ja $s$ on sekuntiluku.

Käänteisessä muunnoksessa, kun desimaaliasteet muunnetaan asteiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi, kerrotaan ensiksi asteiden desimaaliosa 60:llä, jolloin tulon kokonaisosa kertoo minuutit. Sitten kerrotaan minuuttien desimaaliosa 60:llä, jolloin saadaan sekunnit ja sen desimaalit.

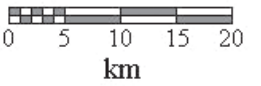
### 2.2.3 Mittakaava

Mittauksissa käytetään ja tuotetaan runsaasti karttoja, kuvia ja erilaisia suunnitelmapiirroksia. Jokaisella kuvalla ja kartalla on aina mittakaava, joka kertoo, paljonko kuvasta mitattu etäisyys on pienempi kuin vastaava etäisyys kohteessa tai maastossa. Yleensä mittakaava esitetään numeerisessa muodossa suhdelukuna

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{m} \\ m = \dfrac{s_{maasto}}{s_{kartta}} \end{cases} . \qquad (4)$$

Kaavoissa (4) $M$ on mittakaava eli pienennyssuhde, $m$ on mittakaavaluku, $s_{maasto}$ on etäisyys maastossa tai kohteessa ja $s_{kartta}$ on vastaava etäisyys kartalla tai kuvalla.

Mittakaava voidaan esittää pienennyssuhteen lisäksi myös mittakaavajanan avulla graafisesti. Mittakaavajana on tärkeä kuvan tai kartan osa, sillä se säilyttää merkityksensä myös kuvaa kopioitaessa, pienennettäessä ja suurennettaessa. Erityisesti kuvaruudulla esitettävien karttojen zoomaus on yleistä, joten mittakaavajana helpottaa kuvaruutukartan mittasuhteiden hahmottamista. Sen sijaan numeerinen mittakaava ei säily kartan koon muuttuessa. Painetuilla kartoilla, erityisesti yleisillä maastokartoilla, mittakaava on tapana ilmaista vielä sanallisesti. (Kuva 24.)

| **Sanallinen mittakaava** | **Numeerinen mittakaava** | **Graafinen mittakaava** |
|---|---|---|
| 1 cm kartalla vastaa 500 metriä maastossa | 1:50000 |   |

**KUVA 24** *Erilaisia mittakaavan esitystapoja: sanallinen, numeerinen ja graafinen mittakaava. Graafinen mittakaava on tärkeä, koska se säilyttää merkityksensä kartan tai kuvan kokoa muutettaessa.*

### 2.2.4 Tehtäviä

**8.** Miten metri on määritelty eri aikoina?
**9.** Miten radiaani määritellään? Miksi se on laaduton luku?
**10.** Muunna kulma 110°16’25” a) asteiksi ja desimaaliminuuteiksi, b) desimaaliasteiksi.
**11.** Muunna kulma 65.29981° a) asteiksi ja desimaaliminuuteiksi, b) asteiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi.
**12.** Laske kulmien 97°51’16” ja 68°56’33” summa ja erotus.
**13.** Milligooni (mgon), uusi minuutti ($^c$) ja uusi sekunti ($^{cc}$) ovat pienien kulmien yksikköjä goonijärjestelmässä. Kuinka paljon a) 14.3 mgon, b) 20.9$^c$ ja c) 190$^{cc}$ ovat gooneina?
**14.** Kartalta, jonka mittakaava on 1:5 000, mitattiin matka 53 mm. Mikä on sitä vastaava matka maastossa?
**15.** Laske ilmakuvan mittakaava, kun kuvalta mitattuna kahden kohteen etäisyys on 122 mm ja vastaava etäisyys 1:20 000 kartalta mitattuna on 89 mm.

## 2.3 Virheet ja tarkkuus

### 2.3.1 Merkitsevät numerot

Laskennassa tulee noudattaa riittävää numeerista esitystarkkuutta eli laskijalla tulee olla käsitys laskettavien suureiden lukuarvojen merkitsevien numeroiden määrästä. Merkitsevä numero voi olla mikä tahansa luvuista 1, 2, 3, …, 9 ja 0. Jos nollaa kuitenkin käytetään desimaalipisteen paikan osoittamiseen, se ei ole merkitsevä numero. Esimerkiksi luvussa 0.00415 on kolme merkitsevää numeroa ja luvussa 45.601 on viisi merkitsevää numeroa. Lukujen ns. tieteellinen esitystapa helpottaa merkitsevien numeroiden kirjaamista. Tieteellistä kirjaamistapaa käytettäessä esim. 0.00415 = 0.415E-2 = 0.415 x $10^{-2}$ ja 45.601 = 0.45601E+2 = 0.45601 x $10^2$.

Laskennassa on yleensä mukana kahdenlaisia suureita ja arvoja: toiset niistä ovat eksakteja, tarkkoja lukuja ja toiset epävarmoja havaintoja tai niistä johdettuja suureita. Eksakteissa luvuissa on aina niin monta merkitsevää numeroa kuin tarvitaan ja niitä ei huomioida, kun arvioidaan lopputuloksen merkitsevien numeroiden määrää.

Mittaushavainnot ja niistä johdetut suureet eivät ole koskaan absoluuttisen tarkkoja. Esimerkiksi etäisyys voidaan tietyssä tilanteessa mitata ja kirjata, niin että pienin yksikkö on metri. Mittaustulos voi olla esimerkiksi 16 m. Toisella kerralla vaaditaan parempaa mittaustarkkuutta, jolloin mittaustulokseksi saadaan ja kirjataan 15.94 m. Kolmannella kerralla tämäkään ei riitä, vaan mittauksessa käytetään kojetta, jolla tulokseksi saadaan ja kirjataan 15.950 m. Tuloksissa on vuorotellen kaksi, neljä ja viisi merkitsevää numeroa. Tässä tapauksessa merkitsevien numeroiden lukumäärä johtuu mittauksessa käytettyjen havaintolaitteiden erotuskyvystä.

Kun geodeettisessa laskennassa arvioidaan laskentatulosten merkitsevien numeroiden määrää, lähtökohtana on havaintolaitteiden erotuskyky ja kiintopisteiden koordinaattien merkitsevien numeroiden määrä. Yksinkertaisena sääntönä voidaan sanoa, että jos kiintopisteiden koordinaattien ja havaittujen etäisyyksien pienin yksikkö on millimetri, lopputuloksissakin pienin yksikkö on millimetri. Tätä sääntöä monimutkaistaa jossakin määrin se, että mittaushavaintoina voi olla myös kulmamittaisia suureita ja etäisyys- ja kulmamittojen vertailu ei ole aina yksinkertainen tehtävä. Kaikissa tapauksissa merkitseviin numeroihin liittyvä perussääntö on, että lopputulos ilmoitetaan niin monella merkitsevällä numerolla kuin epätarkin lähtöarvo on annettu. Aina yksinkertaisten sääntöjen tulkinta ei kuitenkaan ole helppoa.

### 2.3.2 Virhe, korjaus ja tarkkuus

Virheiden arviointi ja käsittely ovat minkä tahansa tieteenalan ydinsisältöä. Kyse on käsiteltävän tiedon pätevyysalueen määrittelystä. Erityisen tärkeää ja luonnollista virheiden käsittely on mittausten yhteydessä. Virheiden arvioinnin kannalta lähtökohta on melko yksinkertainen, sillä havainnon virheen määrittelee yhtälö

$$e_i = \ell_i - L_t\,, \tag{5}$$

jossa $e_i$ on havainnon virhe, $\ell_i$ on suureen havaittu arvo ja $L_t$ on suureen oikea arvo. Oikeaa arvoa ei normaalisti tunneta, joten se on enemmänkin teoreettinen käsite. Sen symbolina voidaan käyttää myös kreikkalaisten aakkosten myykirjainta (μ).

Jos havainnon virhe tunnetaan, havainto voidaan korjata vastakkaismerkkisellä korjauksella:

$$\begin{cases} k_i = -e_i \\ L_t = \ell_i + k_i \end{cases}, \tag{6}$$

joissa $e_i$ on havainnon virhe, $k_i$ on virhettä vastaava korjaus, $\ell_i$ on suureen havaittu arvo ja $L_t$ on suureen korjattu (oikea) arvo. Yhtälöissä (5) ja (6) on kyse kahden mittauksen peruskäsitteen, virheen ja korjauksen, keskinäisen suhteen määrittelystä ja niihin liittyvistä merkkisäännöistä.

Realistinen lähtökohta mittauksia tarkasteltaessa on, että mittaustulokset ovat aina jossakin määrin virheellisiä. Tämä tulee esille mittauksia toistettaessa. On hyvin vaikeaa saada kaksi täysin samanlaista mittaustulosta samasta kohteesta. Virheiden suuruuden määrittäminen on aina ongelmallista, mikä näkyy suoraan virheen määrittelyyhtälöstä (5). Siihenhän sisältyy mitattavan suureen oikea arvo ($L_t$), joka nimenomaan pyritään määrittämään havaintojen avulla. Jos oikea arvo tunnettaisiin etukäteen, mittaus olisi tarpeeton. Koska oikeaa arvoa ei tunneta, virheen suuruudesta voidaankin

antaa vain arvio. Se ilmoittaa mittauksen tarkkuuden. Tarkkuus on siis virheen arvioitu suuruus. Virhe ja tarkkuus kuvaavat samaa asiaa hiukan eri sanoin. Virhe- ja tarkkuusarvioihin liitetään yleensä jokin arvion epävarmuutta kuvaava todennäköisyys, joka perustuu todennäköisyyslaskennan teoreettisiin malleihin ja oletuksiin.

Mittausten virheiden arviointi ja hallinta ovat välttämättömiä kuhunkin työhön sopivan mittaustavan valinnan, mittausten tarkoituksenmukaisen suorittamisen ja mittaustyön laadunvalvonnan kannalta. Arvioinnin ongelmista huolimatta mittausten virheet pystytään hallitsemaan käytännön töissä niin, että ne voidaan suorittaa etukäteen asetettujen tarkkuusvaatimusten mukaisesti.

### 2.3.3 Virheiden luokittelu

Virheiden hallinnan kannalta on tärkeää luokitella virheitä, jotta erilaisia virheitä voidaan käsitellä mahdollisimman tehokkaasti, niille luonteenomaisella tavalla. Luokittelussa kyse on eräänlaisesta hajota ja hallitse -politiikasta. Tällä tavoin monimutkainen asia yksinkertaistetaan käytännön tarpeista lähtien. Virheet jaetaan niiden hallinnan näkökulmasta kolmeen ryhmään: systemaattisiin, karkeisiin ja satunnaisiin virheisiin.

Systemaattinen virhe on jossakin funktionaalisessa yhteydessä mittaushavaintoon ja/tai joihinkin vaikutussuureisiin. Esimerkiksi kaikissa havainnoissa samansuuruisena ilmenevä virhe, kuten virheellinen prismavakio elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa, on systemaattinen virhe. Systemaattiselle virheelle on periaatteessa aina löydettävissä jokin syy, joka vaikuttaa kaikkiin havaintoihin tai tiettyyn ryhmään havaintoja.

Karkeat virheet ovat luonteeltaan erehdyksiä tai ne johtuvat viallisista kojeista tai poikkeavista mittausolosuhteista. Karkeallekin virheelle on aina löydettävissä jokin syy, mutta se vaikuttaa vain yksittäisiin havaintoihin.

Satunnaiset virheet ilmenevät havaintojen vaihteluna mittausta toistettaessa, vaikka mittausolosuhteet tai -ajankohta eivät vaihtelisikaan. Satunnaisille virheille ei ole löydettävissä erityistä syytä. Ne vaikuttavat kaikkiin havaintoihin tavalla, jota ei voi täsmällisesti ennustaa.

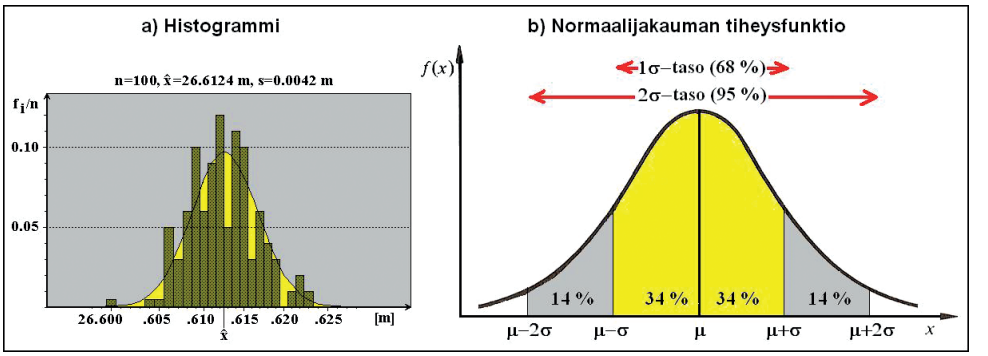
Satunnaisuuden käsite on virheiden arvioinnin kannalta tärkeä, mutta käsitteellisesti vaikea, koska satunnaisuudelle ei ole olemassa yksiselitteistä määritelmää. Satunnaisuutta luonnehtii tapahtumien jonkin asteinen ennustamattomuus. Aikaisemmin tehdyn havainnon perusteella ei voida ennustaa seuraavaa havaintoa täsmällisesti. Virheiden arvioinnin kannalta satunnaiset virheet ovat kuitenkin melko yksinkertaisia ja helposti hallittavia virheitä, koska niiden suuruusluokka saadaan esille mittauksia toistamalla.

### 2.3.4 Virheolettamukset

Mittausten virheiden arviointi perustuu osaksi todennäköisyyslaskentaan, sen teoreettisiin olettamuksiin ja laskentamenetelmiin ja osaksi tilastomatematiikan kokeellisiin menetelmiin. Tämä kokonaisuus ei toimi ilman olettamuksia. Erityisesti sijaintimittauksiin sovelletut yleiset virheolettamukset ovat seuraavat:

- tunnetut suureet, esimerkiksi mittauksen lähtöpisteiden koordinaatit ja korkeudet ovat virheettömiä
- havainnoissa ei ole systemaattisia eikä karkeita virheitä
- havainnoissa on vain satunnaisia virheitä
- satunnaiset virheet ovat normaalijakautuneita suureen oikean arvon ympärille (kuva 25).

Mittauksissa pyritään tietoisesti tilanteeseen, jossa havainnoissa on vain satunnaisia virheitä. Tässä tarkoituksessa systemaattiset virheet pyritään määrittämään ja poistamaan havainnoista mittauslaitteiden kalibroinnin, havaintoihin tehtävien korjausten ja havaintotekniikan keinoin. Karkeat virheet puolestaan pyritään havaitsemaan mittauksia suoritettaessa tai viimeistään mittausten laskennassa, ja virheelliseksi epäillyt havainnot hylätään ja tarvittaessa uusitaan. Jos systemaattiset ja karkeat virheet onnistutaan poistamaan, jäljelle jäävät satunnaiset virheet. Niiden suuruutta arvioidaan ja hallitaan mittausten toiston avulla.




**KUVA 25** *a) Histogrammi on tilastomatematiikassa käytettävä kuvaustapa. Pylväsdiagrammin pylvään korkeus kertoo kuinka monta havaintoa osuu kullekin lukuarvolla tai arvovälille. Suurin osa havainnoista keskittyy lähelle keskiarvoa ($\hat{x}$). b) Normaalijakauman tiheysfunktio on matemaattinen malli, joka kuvaa mittausten toistossa ilmenevää vaihtelua. Tiheysfunktio kertoo, että suurin osa havainnoista osuu lähelle suureen oikeaa arvoa ($\mu$). Suuret poikkeamat keskiarvosta ovat harvinaisia. Vaihtelun matemaattinen kuvaaminen mahdollistaa täsmällisten todennäköisyyksien liittämisen virhearvioihin. Keskihajonta ($\sigma$ tai $s$) kuvaa havaintojen vaihtelun eli satunnaisten virheiden keskimääräisen suuruuden 68 %:n todennäköisyydellä. Keskihajontaa käytettäessä arvioitu virhe ilmoitetaan 1$\sigma$-tasolla. Virhe voidaan ilmoittaa myös 2$\sigma$-tasolla, jolloin arvioon liittyvä todennäköisyys on 95 %.*

### 2.3.5 Satunnaisten virheiden arviointi toistomittauksessa

Kun havainnoissa on vain normaalijakautuneita satunnaisia virheitä, niiden suuruus on teoreettisesti ja laskennallisesti suhteellisen helposti hallittavissa analysoimalla toistossa ilmenevää vaihtelua. Satunnaisten virheiden keskimääräinen suuruus ilmoitetaan keskihajonnan avulla (kuva 25, s. 36). Keskihajonta on tärkeä tarkkuuden tunnusluku. Mittaustekniikassa keskihajontaa kutsutaan myös keskivirheeksi. Keskihajonnan symboli on kreikkalaisten aakkosten sigma (σ), kun ajatellaan hajonnan oikeaa teoreettista arvoa. Jos taas ajatellaan hajonnalle havainnoista johdettua arvoa, on keskihajonnan symboli $s$-kirjain.

Jos jokin suure on havaittu $n$ kertaa ja havaintoarvot ovat $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$, mittaustulos lasketaan havaintojen keskiarvona kaavalla

$$\hat{x} = \frac{\sum \ell_i}{n}. \tag{7}$$

Keskiarvo on suureen oikean arvon estimaatti eli arvioitu suuruus. Keskiarvon suhteen lasketaan yksittäisten havaintojen näennäiset virheet, joita kutsutaan myös jäännösvirheiksi, kaavalla

$$v_i = \ell_i - \hat{x}. \tag{8}$$

Havaintosarjan keskihajonta lasketaan näennäisistä virheistä kaavalla

$$s = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}. \tag{9}$$

Tämä on arvio tehdyn havaintosarjan yksittäisen havainnon satunnaisten virheiden suuruudesta 68 %:n todennäköisyydellä. Tällä tavoin laskettu keskihajonta kertoo siis yksittäisen havainnon tarkkuuden.

Keskiarvo on kuitenkin aina tarkempi kuin havaintosarjan yksittäinen havainto. Mittauksen toistoon perustuvaa tarkentumista kuvaa keskiarvon keskihajonta:

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

Keskiarvon keskihajonta kertoo mittaustuloksen arvioidun tarkkuuden 68 %:n todennäköisyydellä, kun tulos lasketaan $n$ havainnon keskiarvona. Kaava (10) on tärkeä, koska se osoittaa, että mittausta voidaan tarkentaa toistamalla, jos havainnoissa on vain satunnaisia virheitä. Virheiden hallinnan näkökulmasta tämä on erittäin käyttökelpoinen periaate.

Kaavoissa (7) – (10) *n* on havaintojen lukumäärä, $\ell_i$ on toistettu havaintoarvo, $\widehat{x}$ on keskiarvo, $v_i$ on havainnon näennäinen virhe, *s* on havainnon satunnaisia virheitä kuvaava keskihajonta ja $s_x$ on keskiarvon keskihajonta. Keskihajontaan liittyvä 68 %:n todennäköisyys perustuu teoreettisen normaalijakauman ominaisuuksiin.

Vaikka virheitä ja tarkkuutta kuvaavat käsitteet ovat melko teoreettisia asioita, tämä ei tarkoita, että itse virheet olisivat teoreettisia asioita. Virheet ovat kyllä todellisia, mutta meidän tietomme niistä on vajavaista. Kun virheet ovat todellisia, niihin voidaan myös vaikuttaa mittausteknillisin keinoin.

### 2.3.6 Satunnaisten virheiden yhdistäminen

Edellä mittaus kohdistui yksittäiseen suureeseen, jonka satunnaisten virheiden suuruus voitiin arvioida mittaustulosten vaihtelua tutkimalla. Seuraavaksi tarkastellaan ilman perusteluja välillistä mittausta, jossa suure $x$ lasketaan $n$:n suureen havainnoista $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$. Havaintojen satunnaisten virheiden arvioidut keskihajonnat ovat $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Kyse on siitä, kuinka havaintojen virheet periytyvät laskennan lopputulokseen eli mikä on suureen $x$ arvioitu virhe? Yleisesti tällaisen selvityksen yhteydessä puhutaan satunnaisvirheiden kasautumisen tutkimisesta.

Tässä yhteydessä keskihajonnan symbolina käytetään kreikkalaisten aakkosten sigmaa (σ), koska hajonta-arvot ajatellaan teoreettisiksi arvoiksi. Kaavoissa esiintyvää keskihajonnan toista potenssia ($\sigma^2$) kutsutaan varianssiksi.

Jos suure $x$ lasketaan havainnoista kaavalla

$$x = a_1\ell_1 + a_2\ell_2 + \cdots + a_3\ell_n, \tag{11}$$

$x$:n satunnaisten virheiden suuruutta kuvaava varianssi on

$$\sigma_x^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2 \tag{12}$$

ja $x$:n todennäköisten virheiden keskihajonta on

$$\sigma_x = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2}\,. \tag{13}$$

Kaavoissa (11) – (13) kertoimet $a_1, a_2, \cdots a_n$ ovat vakioita, joten suureiden $x$ ja $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ välinen riippuvuus on lineaarinen. Tämä on tärkeää, koska satunnaisten virheiden laskusäännöt ovat ensisijaisesti määritelty vain lineaarisille yhtälöille. Kaavan (12) perusteella sanotaan, että satunnaiset virheet yhdistetään neliöllisesti, koska satunnaisia virheitä yhdistettäessä lasketaan havaintojen varianssit yhteen.

Jos $x$:n yhteys havaintoihin $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ on epälineaarinen, yleisesti muotoa $x = f(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$, todennäköisten virheiden arviointi edellyttää laskentayhtälön linearisointia. Satunnaiset virheet yhdistetään nyt seuraavasti:

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_n}\right)^2 \sigma_n^2 \qquad (14)$$

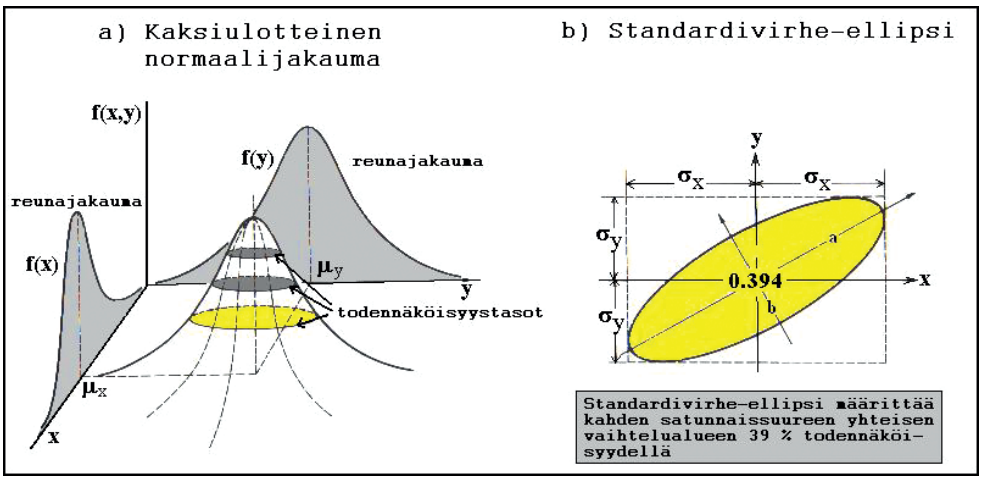
ja

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \ell_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_n}\right)^2 \sigma_n^2}\ . \qquad (15)$$

Muotoa $\frac{\partial f}{\partial \ell_i}$ olevat termit ovat laskentayhtälön osittaisderivaattoja, jotka lasketaan havaintojen suhteen. Kaikki edellä esitetyt satunnaisten virheiden yhdistämiskaavat pätevät vain, jos satunnaissuureet ovat toisistaan riippumattomia eli korreloimattomia. Korreloimattomuus tarkoittaa, että tarkasteltavilla suureilla ei ole yhteisiä virhelähteitä.

### 2.3.7 Virhe-ellipsit

Pisteen tasosijainti esitetään kahden koordinaatin avulla. Kummankin koordinaattiluvun virheitä ja tarkkuutta voidaan tarkastella erikseen keskihajontojen avulla. Kuva pisteen sijaintitarkkuudesta kuitenkin täsmentyy, kun tarkastellaan koordinaattien arvioituja virheitä samanaikaisesti. Matematiikan näkökulmasta lähtökohtana on koordinaattien satunnaisten virheiden yhteisjakauma, joka on kaksiulotteinen normaalijakauma. Tällöin pisteen todennäköinen sijainti voidaan kuvata matemaattisen täsmällisesti virhe-ellipsin avulla. Virhe-ellipsin mittojen laskennan lähtökohtana ovat tarkasteltavan pisteen koordinaattien varianssit ja niiden välinen kovarianssi, jotka johdetaan havaintojen satunnaisista virheistä virheiden kasautumista mallintavien yhtälöiden avulla. (Kuva 26, s. 40.)




**KUVA 26** *Kaksiulotteinen normaalijakauma (a) ja standardivirhe-ellipsi (b) kuvaavat kohteen tasosijainnin todennäköisiä virheitä. Standardivirhe-ellipsi määrittää tasosijainnin 39 %:n todennäköisyydellä. Virhe-ellipsi asettuu koordinaattien keskihajontojen ($\sigma_x$ ja $\sigma_y$) määrittämän suorakaiteen sisälle. Virhe-ellipsin muoto ja suunta määräytyvät havaintojen virheistä ja mittauksen geometriasta.*

Myöhemmin opitaan, että mittaus- ja kartoitustekniikassa käytetään kahdenlaisia virhe-ellipsejä, absoluuttisia ja suhteellisia virhe-ellipsejä. Absoluuttinen virhe-ellipsi kuvaa koordinaattien tarkkuutta. Suhteellinen virhe-ellipsi kuvaa koordinaattierojen tarkkuutta.

### 2.3.8 Yleiset tavoitetarkkuudet

Mittauksia ei tehdä mittausten itsensä vuoksi. Mittaukset liittyvät johonkin muuhun toimintaan, kuten kartan valmistamiseen, liikkumiseen paikasta toiseen ja rakentamiseen. Erityisesti rakentamisen ja teollisuuden asennusmittausten tarkkuus- ja laatuvaatimukset voivat olla hyvin korkeat. Nykyaikaisten mittauskojeiden ja -menetelmien avulla voidaan tehdä hyvinkin tarkkoja mittauksia. Esimerkiksi etäisyydenmittauksissa muutamien millimetrien tarkkuus kilometrienkin matkoilla on yleisesti saavutettavissa. (Taulukko 4, s. 41.)

**TAULUKKO 4** *Eri tehtävissä vaadittavat yleispiirteiset mittaustarkkuudet. Mittaustarkkuus ajatellaan tässä paikannuksen tai etäisyydenmittauksen tarkkuudeksi.*

| Tarkkuustaso | Mittauksen tarkoitus |
|---|---|
| 100 m | |
| | Halutaan tietää yleisesti missä ollaan |
| 10 m | |
| | Halutaan pysyä reitillä (tie, katu, vesiväylä) ja löytää haluttu kohde |
| 1 m | |
| | Halutaan kerätä paikkatietoja kartoitusta ja tutkimusta varten |
| 0.1 m | |
| | Halutaan kartoittaa maastoa ja rakennettua ympäristöä tarkasti ja ohjata rakentamista |
| 0.01 m | |
| | Halutaan tehdä tarkkoja geodeettisia ja geofysikaalisia mittauksia ja ohjata vaativien kohteiden rakentamista |
| 0.001 m | |
| | Halutaan tehdä tieteellisiä tutkimuksia ja mitata erityiskohteita |
| 0.0001 m | |

## 2.3.9 Hyvä mittaustapa

Mittausten tarkkuus ja tulosten yleinen luotettavuus varmistetaan laadunvalvonnalla, jonka suorittamista muun muassa erilaiset mittausohjeet tukevat. Laadunvalvonta perustuu yleisesti hyvään mittaustapaan. Käsite tarkoittaa sitä, että mittauksissa sovelletaan käytännössä hyviksi koettuja mittausmenetelmiä ja yleisesti hyväksyttyä mittausteknillistä tietämystä. Täsmällisemmin hyvän mittaustavan sisältöä voidaan kuvata seuraavasti:

- Mittausten yhteydessä käytettävien käsitteiden ja matemaattisen esitystavan tulee olla alan käytännön mukaista. Tämä mahdollistaa sen, että mittausten kanssa tekemisiin joutuvat ymmärtävät muun muassa mittausten tuloksia ja pystyvät hyödyntämään alan ohjeita ja kirjallisuutta.
- Mittauksissa käytettävät kojeet tulee tarkistaa eli kalibroida säännöllisesti.
- Havaintojen teossa kiinnitetään huomiota mittausten toistoon ja sellaisten havaintomenetelmien käyttöön, joilla mittausten virheitä voidaan hallita.

Mittauksen sulkeminen on eräs käyttökelpoinen tapa hallita mahdollisia virheitä. Kun mittaus suljetaan, mittaustulos tarkastetaan jonkin tunnetun pisteen tai suureen avulla. Sulkemisen yhteydessä määritetään sulkuvirhe, joka on suureen mitatun arvon ja oikeana pidetyn arvon erotus. Mittauksen sulkeminen voidaan toteuttaa hieman eri tavoin erilaisissa mittauksissa ja erilaisissa mittaustilanteissa. Erityisesti jonomuotoisissa runkomittauksissa, jonovaaituksessa ja jonomittauksessa (monikulmiojonomittauksessa), puhutaan sulkuvirheistä, kun arvioidaan mittausten tarkkuutta.

## 2.3.10 Tehtäviä

**16.** Millaista numeerista esitystarkkuutta (merkitsevien numeroiden määrää) tulee noudattaa, kun muunnetaan gooneina annettu kulma a) desimaaliasteiksi, b) asteiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi, c) piiruiksi, d) radiaaneiksi? Gooneina annetun kulman pienin yksikkö on 0.0001 gon.

**17.** Muunna a) 90°25’26” gooneiksi, b) 143.3724 gon asteiksi, minuuteiksi ja sekunneiksi, c) 0.470324 rad gooneiksi, d) 18$^{v}$ desimaaliasteiksi. Huomioi riittävä määrä merkitseviä numeroita

**18.** Laske etäisyyksien 561.32 m, 491.6 m ja 86.954 m summa ja anna lopputulos sopivaa merkitsevien numeroiden määrää käyttäen.

**19.** Laske lukujen 349.1 ja 863.4 tulo ja anna lopputulos sopivaa merkitsevien numeroiden määrää käyttäen.

**20.** Laske osamäärä $56.3/\sqrt{5}$ ja anna lopputulos sopivaa merkitsevien numeroiden määrää käyttäen. Lausekkeessa luku 5 on tarkka arvo.

**21.** Jos mittauskaukoputken tähtäystä siirretään yksi milligoonia, niin kuinka paljon tähtäyspiste siirtyy 100 m päässä?

**22.** Etäisyys on mitattu kymmenen kertaa ja havainnot ovat 47.614, 47.610, 47.609, 47.615, 47.612, 47.608, 47.609, 47.604, 47.617, 47.611 metriä. Laske keskiarvo, havainnon keskihajonta ja keskiarvon keskihajonta.

**23.** Havaintojen $\ell_1$ ja $\ell_2$ keskihajonnat ovat $\sigma_1 = 0.052$ m ja $\sigma_2 = 0.038$ m. Laske suureiden $x_1 = \ell_1 + \ell_2$ ja $x_2 = \ell_1 - 2\ell_2$ keskihajonnat.

**24.** Kolmion kanta on $a$ = 75.23 m ja korkeus $h$ = 19.55 m. Suureiden arvioidut keskihajonnat ovat $\sigma_a = \sigma_h = 0.03$ m. Mitkä ovat kolmion pinta-ala ja sen keskihajonta? Mikä on lasketulle pinta-alalle sopiva merkitsevien numeroiden määrä?

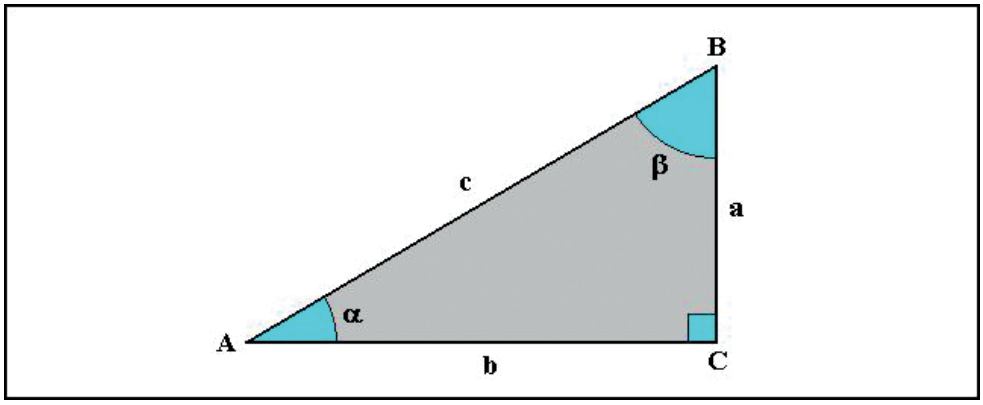
**25.** Miten tulisi suhtautua mittaukseen, jossa mittaustulos ei toistettaessa lainkaan muutu?

**26.** Piirrä kolmio, mittaa sen kaikki kulmat astemitalla ja laske kolmion kulmasulkuvirhe.

## 2.4 Kolmion ratkaisut

### 2.4.1 Suorakulmainen kolmio

Geodeettisessa laskennassa jatkuvasti esiintyvä geometrinen kuvio on kolmio. Sen ratkaisukaavat luovatkin pohjan pidemmälle meneville laskennoille. Tarkastellaan aluksi suorakulmaista kolmiota, joka on kolmion erikoistapaus (kuva 27).




**KUVA 27** *Suorakulmaisen kolmion osat: $a$ ja $b$ ovat kateetteja ja $c$ on hypotenuusa, $\alpha$ ja $\beta$ ovat kateettien vastaiset kulmat ja kulma C on suorakulma.*

Suorakulmaisessa kolmiossa määritellään muun muassa trigonometriset funktiot. Geodeettisessa laskennassa yleisimmin käytettyjä trigonometrisiä funktioita ovat sini-, kosini- ja tangenttifunktiot. Ne määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c}, \\ \tan\alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases} \tag{16}$$

jossa $\alpha$ on kulma, $a$ on kulman vastainen kateetti, $b$ on kulman viereinen kateetti ja $c$ on hypotenuusa.

Kun näitä kaavoja käytetään kulmien ratkaisuun, tarvitaan trigonometristen funktioiden käänteisfunktioita eli arcusfunktioita. Esimerkiksi kulma $\alpha$ voidaan ratkaista yhtälöistä (16) seuraavasti:

$$\begin{cases} \alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\ \alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \\ \alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \end{cases} \quad (17)$$

Merkintöjen arcsin, arccos ja arctan sijasta voidaan käyttää myös merkintöjä $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ja $\tan^{-1}$. Trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot ovat jaksollisia funktioita. Geodeettisessa laskennassa tähän ominaisuuteen törmätään erityisesti käänteisfunktioita käytettäessä suuntien laskennan yhteydessä.

Trigonometristen funktioiden ohella Pythagoraan kaava on tärkeä suorakulmaiseen kolmioon liittyvä kaava. Se kertoo suorakulmaisen kolmion sivujen suhteen seuraavasti:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad (18)$$

jossa $c$ on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja $a$ ja $b$ sen kateetit.

### 2.4.2 Määräinen kolmio

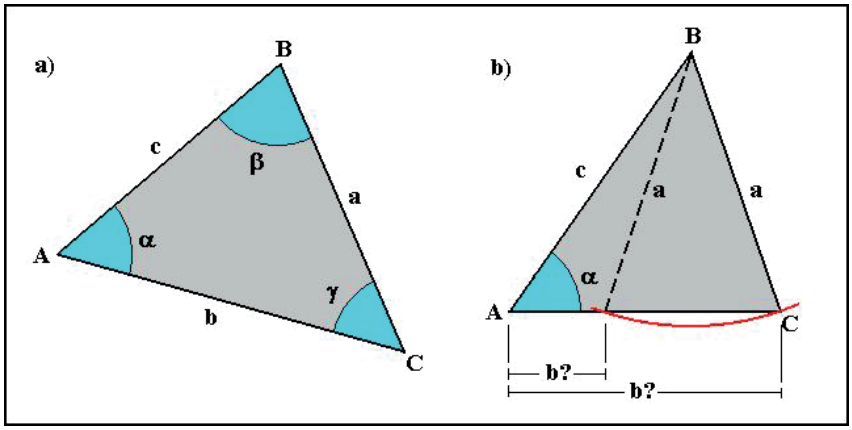
Kolmiossa on kuusi osaa: kulmat $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ sekä niiden vastaiset sivut $a$, $b$ ja $c$ (kuva 28 a, s. 45). Jos kolmiossa tunnetaan kolme osaa, joista vähintään yksi on sivu, kolmio on yksikäsitteisesti määrätty eli määräinen kolmio. Tällöin sen tuntemattomat osat voidaan ratkaista. Tuntemattomien osien ratkaisut perustuvat kulmien summakaavaan ja sini- ja kosinilauseisiin.

Kulmien summakaava kertoo yleisesti tunnetun asian, että kolmion kulmien summa on oikokulma eli 180° = 200 gon = $\pi$ rad:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200\,\text{gon}\,. \quad (19)$$

Sinilauseen mukaan kolmion sivujen suhde on sivujen vastaisten kulmien sinien suhde. Tähän perustuen voidaan kirjoittaa useita yhtälöitä, esimerkiksi seuraavat kolme yhtälöä:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \\ \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} \end{cases}. \qquad (20)$$




**KUVA 28** *a) Kolmion osat. b) Kolmio ei ole aina määräinen, vaikka siinä tunnettaankin sivu ja kaksi muuta osaa. Kolmion sivut merkitään yleensä pienillä kirjaimilla a, b ja c ja kulmat kreikkalaisilla aakkosilla α, β ja γ (alfa, beeta ja gamma). Sivut ja kulmat merkitään myötäpäivään kiertäen, sivun a vastainen kulma on α, b:n vastainen kulma on β ja c:n vastainen kulma on γ.*

Summakaavan ja sinilauseen lisäksi kolmion tuntemattomien osien ratkaisut voivat perustua kosinilauseeseen, joka kertoo sivun ja sen vastaisen kulman kosinin suhteen. Tähän periaatteeseen perustuvia kaavoja voidaan kirjoittaa kolme:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \cdot \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases} \qquad (21)$$

Kaavoissa (19) – (21) α, β, ja γ ovat kolmion kulmat myötäpäivään kiertäen ja *a*, *b* ja *c* ovat niiden vastaiset sivut.

Poikkeuksena luvun alussa esitetystä kolmion yksikäsitteisyydestä on tilanne, jossa kolmion kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma tunnetaan (kuva 28 b, s. 45). Tällainen kolmio ei ole kaikissa tilanteissa määräinen. Ongelma tulee esille käytettäessä sinilausetta kulmien ratkaisuun ja liittyy sinifunktion jaksollisuuteen. Kulmien α ja 200 gon – α sinit ovat nimittäin yhtä suuret.

### 2.4.3 Tehtäviä

**27.** Tutki, miten kulmayksikkö asetetaan ja vaihdetaan laskimessasi.

**28.** Kun kulmat ovat $\alpha$ = 45.2309°, $\beta$ = 205.0739 gon ja $\gamma$ = 5.299021 rad ja luku $x$ = – 0.602301, niin laske a) sin $\alpha$, b) cos $\beta$, c) tan $\gamma$, d) arccos $x$ ja e) arctan $x$. Anna kohtien d) ja e) tulokset gooneina. Huomioi kohtien d) ja e) yhteydessä funktioiden jaksollisuus.

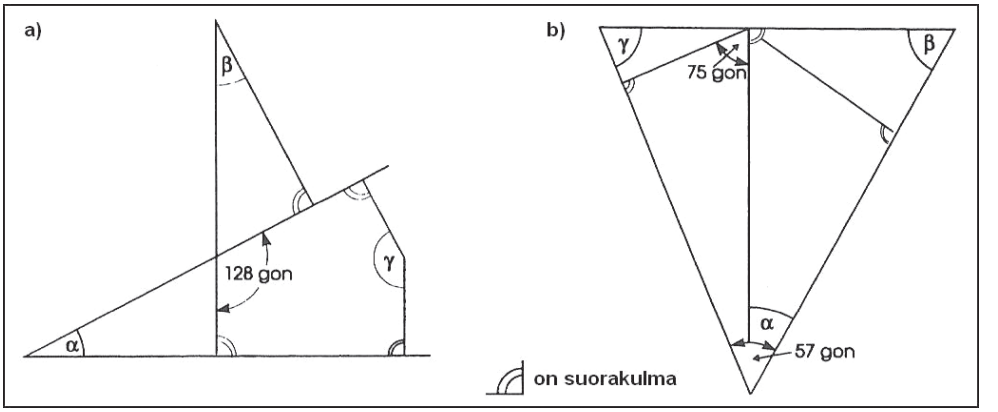
**29.** Kolmion kaksi kulmaa ovat 26°49’37” ja 36°10’23”. Mikä on kolmannen kulman suuruus?

**30.** Nelikulmion kolme kulmaa ovat 91.3450 gon, 101.0923 gon ja 97.0206 gon. Mikä on neljännen kulman suuruus?

**31.** Kolmion kulma on 25°23’16” ja sen viereisten sivujen pituudet ovat 75.345 m ja 54.008 m. Piirrä kolmio johonkin täsmälliseen mittakaavaan ja laske kolmion puuttuvat osat.

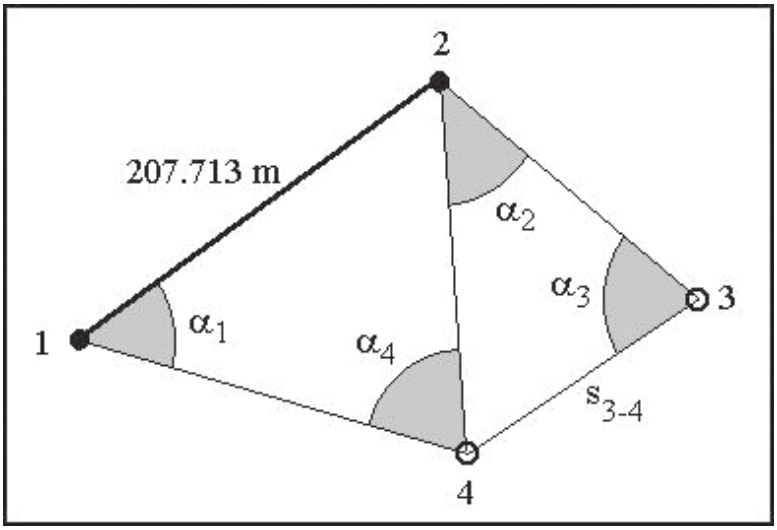
**32.** Kolmion kaksi sivua ovat 70.1 m ja 61.7 m. Näistä jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 51.9°. a) Selvitä piirtämällä ratkaisujen lukumäärä. b) Laske kolmion puuttuvat osat kaikissa tapauksissa.

**33.** Määritä kulmat $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ kummassakin kuvan 29 esittämässä tilanteessa (a ja b). Perustele ratkaisusi.



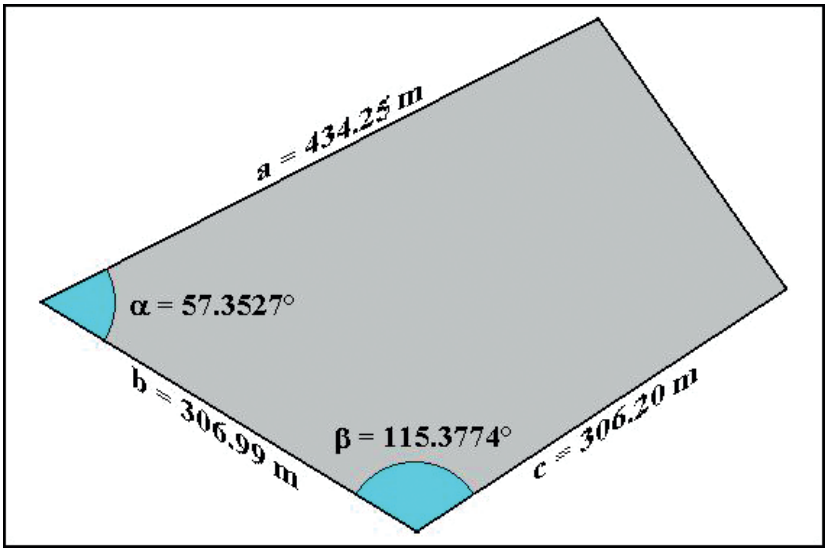

**KUVA 29** *Tehtävän 33 kuva: kulmat $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ pitää ratkaista ja ratkaisu perustella (Gross 2004, s. 2).*

**34.** Laske sivun 3-4 pituus viereisen kuvan kolmiomittauksessa. Sivun 1-2 pituus on $s_{12}$ = 207.713 m ja kulmat ovat $\alpha_1$ = 58.1178 gon, $\alpha_2$ = 57.1384 gon, $\alpha_3$ = 79.0958 gon ja $\alpha_4$ = 82.1114 gon. (Kuva 30.)




**KUVA 30** *Tehtävä 34.*

**35.** Laske viereisen kuvan nelikulmion tuntemattomien sivujen ja lävistäjien pituudet sekä tuntemattomat kulmat (kuva 31).

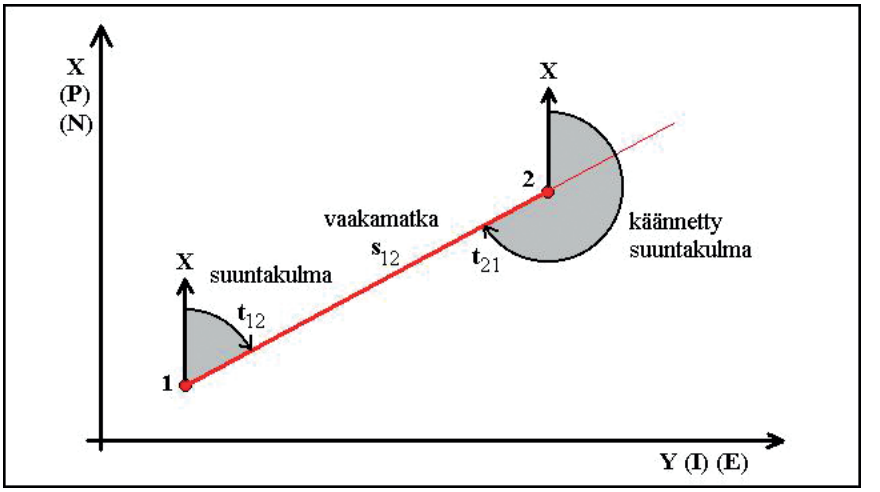



**KUVA 31** *Tehtävä 35.*

## 2.5 Koordinaattien laskennan peruskaavat

### 2.5.1 Suorakulmainen koordinaatisto ja suuntakulma

Tasosijaintiin liittyvien mittausten laskenta tehdään yleensä suorakulmaisessa koordinaatistossa, Se voi olla havaintopaikan vaakatasossa määritelty paikallinen suorakulmainen koordinaatisto tai jokin yleinen koordinaatisto, kuten Suomen kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) tai ETRS89-järjestelmän mukainen koordinaatisto. Mittausten laskennassa koordinaatisto on niin sanottu vasenkätinen koordinaatisto. Sen yksi akseli kasvaa pohjoiseen ja toinen itään. Pohjoisakselin symbolina on matemaattisessa tarkastelussa yleensä ”X” ja itäakselin ”Y”. Kartastokoordinaattijärjestelmässä käytetään usein symboleja ”P” ja ”I” tai ”p” ja ”i”, jotka viittaavat sanoihin pohjoinen ja itä. Mittauskojeissa ja ETRS89-järjestelmässä käytetään myös englannin kieleen pohjautuvia symboleja ”N” ja ”E”. Ne tulevat sanoista Northing ja Easting. (Kuva 32.)




**KUVA 32** *Geodeettisessa laskennassa käytetyn suorakulmaisen koordinaatiston akselit sekä suuntakulma ja käännetty suuntakulma. Koordinaatiston tason ajatellaan olevan havaintopaikan vaakatason suuntainen. Pisteiden 1 ja 2 välistä janaa kutsutaan geodeettisessa laskennassa sivuksi, mittaussivuksi tai lähtösivuksi, jos se on tunnettu pisteväli. Sivun pituutta merkitään s-kirjaimella ja suuntakulmaa t-kirjaimella ja alaindeksein osoitetaan pisteet, joiden välisistä suureista on kysymys.*

Mittauspaikalla koordinaatiston määrittävät tasokiintopisteet. Niitä tarvitaan vähintään kaksi. Pisteiden keskinäisen aseman koordinaatistossa määrittävät pisteiden välinen etäisyys eli vaakamatka ($s_{12}$) ja suuntakulma ($t_{12}$). Matematiikassa näitä suureita sanotaan pisteen 2 napakoordinaateiksi pisteen 1 suhteen. Suuntakulma on geodeettisen laskennan keskeisimpiä käsitteitä. Sen ymmärtäminen on edelly-

tys koordinaattimuotoisten mittausten ymmärtämiselle. Suuntakulma osoittaa sivun suunnan koordinaatistossa. Se on X-akselin (koordinaatiston pohjoissuunnan) ja sivun välinen kulma. Suuntakulma kasvaa myötäpäivään. Sen määrittelyalue on kulmayksiköstä riippuen joko [0 gon, 400 gon) tai [0°, 360°).

Suuntakulmia ja koordinaattitasossa määritettyjä kulmia voidaan laskea yhteen ja vähentää. Tarkasteltavien kulmien tulee olla saman pisteen ympäri kiertyviä. Jos esimerkiksi suuntakulma pisteestä 1 pisteeseen 2 on $t_{12}$ ja sen suhteen on mitattu myötäpäivään pisteeseen 3 kulma $\alpha$, suuntakulma pisteestä 1 pisteeseen 3 on

$$t_{13} = t_{12} + \alpha\,, \tag{22}$$

Toisaalta, jos pisteeltä 1 tunnetaan suuntakulmat pisteisiin 2 ja 3 ($t_{12}$ ja $t_{13}$), niiden välinen kulma on

$$\alpha = t_{13} - t_{12}\,, \tag{23}$$

jossa $\alpha$ on sivujen välinen kulma, $t_{12}$ on vasemmanpuoleisen sivun suuntakulma ja $t_{13}$ on oikeanpuoleisen sivun suuntakulma. Tämän yksinkertaisen kaavan laskentajärjestys on merkityksellinen, koska siihen sisältyy ajatus kulman ja suuntakulman kasvusuunnasta. Kulma ja suuntakulma kasvavat myötäpäivään.

Kun mittaussivua tarkastellaan sen eri päätepisteistä, saadut suuntakulmat eroavat toisistaan oikokulman eli 200 gon (kuva 32, s. 48). Jos siis sivun suuntakulma pisteeltä 1 pisteeseen 2 on $t_{12}$, suuntakulma pisteeltä 2 pisteeseen 1 eli sivun käännetty suuntakulma on

$$t_{21} = t_{12} \pm 200\ \text{gon}\,. \tag{24}$$

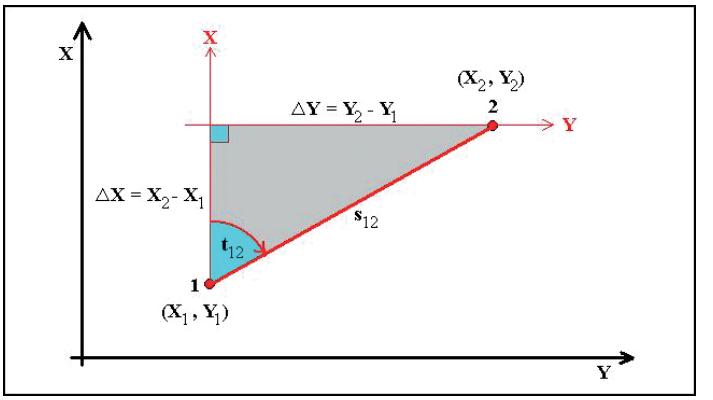
Suuntakulmiin ja kulmiin liittyvien laskutoimitusten yhteydessä saatetaan joutua suuntakulman määrittelyalueen ulkopuolelle. Tällöin päästään takaisin määrittelyalueelle, kun negatiiviseen suuntakulmaan lisätään 400 gon ja yli 400 gon suuntakulmasta vähennetään 400 gon. Suuntakulman määrittelyalueella pysyminen ei ole laskennan kannalta sinänsä välttämätöntä, koska esimerkiksi trigonometriset funktiot ovat jaksollisia funktioita. Mittaajan ja laskijan on kuitenkin helpompi hahmottaa mittaustilanne, kun määrittelyalueesta pidetään kiinni.

### 2.5.2 Geodeettinen käänteistehtävä

Koordinaattien laskeminen edellyttää suuntakulmien määrittämistä. Suuntakulmaa ei voida mitata suoraan, koska se perustuu koordinaatiston matemaattiseen määrittelyyn eikä mihinkään mitattavaan fysikaaliseen ilmiöön. Tämän vuoksi mitta-

uksissa käytetään kahden tasorunkopisteen muodostamaa lähtösivua, jonka suhteen uusien mittaussivujen suuntakulmat määritetään. Lähtösivun suuntakulma ja pituus lasketaan sivun päätepisteiden koordinaateista. Lähtösivun ratkaisuun eli suuntakulman ja pituuden laskentaan liittyvistä matemaattisista ratkaisuista käytetään nimitystä geodeettinen käänteistehtävä. Laskennan lähtökohtana on kuvan 33 suorakulmainen kolmio. Sivun päätepisteiden (1 ja 2) koordinaateista lasketaan kateettien pituudet X- ja Y-akselien suunnissa kaavoilla

$$\begin{cases} \Delta X = X_2 - X_1 \\ \Delta Y = Y_2 - Y_1 \end{cases}. \tag{25}$$




**KUVA 33** *Suorakulmainen kolmio, jonka perusteella voidaan johtaa sekä geodeettisen käänteis- että päätehtävän ratkaisut.*

Tangenttifunktion määrittelyn perusteella saadaan, että suuntakulman tangentti on

$$\tan t_{12} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}. \tag{26}$$

Edelleen saadaan, että suuntakulma pisteestä 1 pisteeseen 2 on

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right) = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right). \tag{27}$$

Lähtösivun pituus saadaan Pythagoraan lauseen perusteella:

$$s_{12} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \tag{28}$$

Kaavoissa (25) – (28) $t_{12}$ on suuntakulma pisteeltä 1 pisteelle 2, $s_{12}$ on pisteiden välinen vaakaetäisyys, $X_1$ ja $Y_1$ ovat pisteen 1 koordinaatit ja $X_2$ ja $Y_2$ ovat pisteen 2 koordinaatit.

Kaavat (27) ja (28) muodostavat geodeettisen käänteistehtävän ratkaisun. Kaavojen käyttötarkoitus voidaan sanoa tiivistetysti, että niiden avulla määritetään mittauksessa käytettävä koordinaatisto.

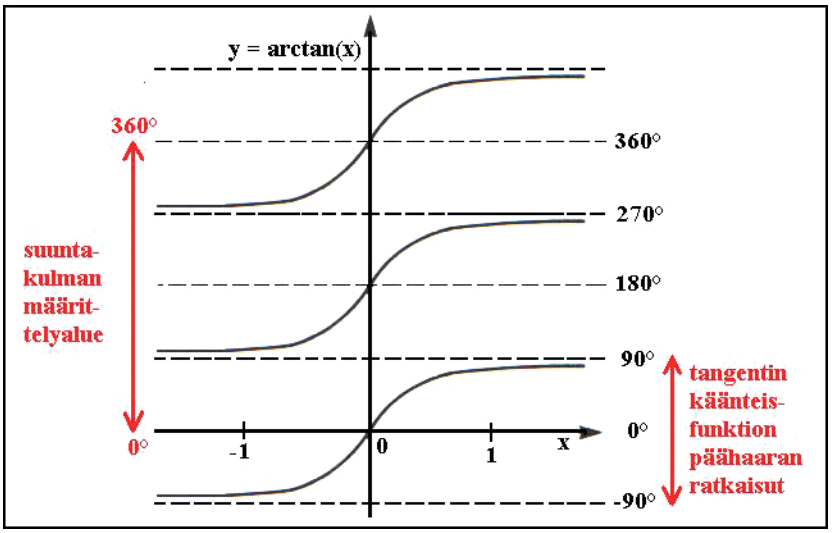
### 2.5.3 Koordinaatiston neljänneksen tutkiminen

Suuntakulman laskennassa on ongelmana, että tangentin käänteisfunktion päähaaran määrittelyalue (–100 gon, +100 gon) eroaa suuntakulman määrittelyalueesta [0 gon, 400 gon) (kuva 34, s. 52). Ongelma liittyy tangentin käänteisfunktion jaksollisuuteen. Tämän laskennallisen ongelman ratkaisemiseksi tulee selvittää koordinaattierojen merkkien avulla se koordinaatiston neljännes, johon suunta osuu. Koordinaatiston neljänneksen perusteella korjataan käänteisfunktion palauttamaa kulmaa (kuva 35, s. 52):

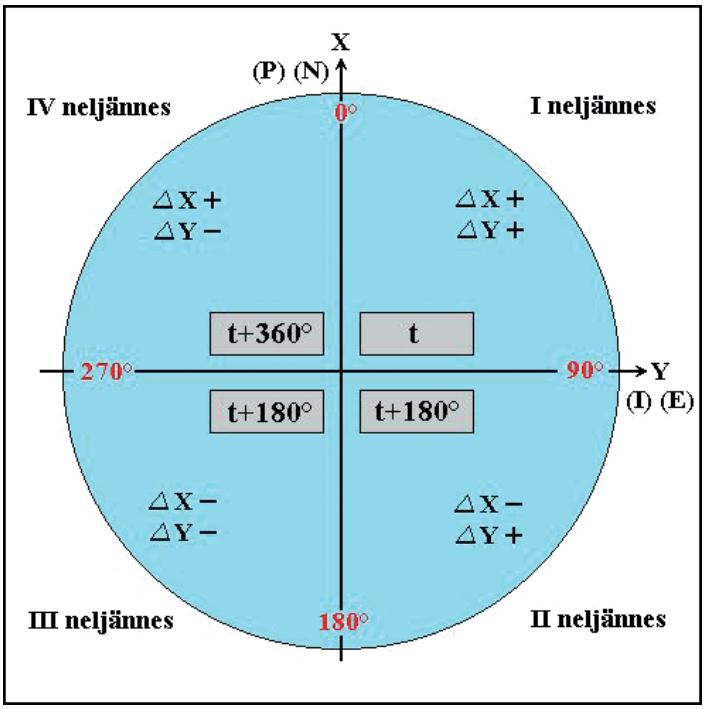
- I neljänneksessä kulmaa ei tarvitse korjata
- II ja III neljänneksessä korjaus on oikokulma (200 gon tai 180°)
- IV neljänneksessä korjaus on täysi kulma (400 gon tai 360°).

Kun suuntakulman korjaus päätellään koordinaattierojen merkkien perusteella, on selvää että koordinaattierojen laskentajärjestys on merkityksellinen asia. Kun siis halutaan laskea suuntakulma pisteestä 1 pisteeseen 2, koordinaattierot lasketaan järjestyksessä $X_2 - X_1$ ja $Y_2 - Y_1$. Käsin laskennassa suuntakulman korjauksen voi päätellä myös havainnekuvan perusteella, jos mittaustilanteeseen liittyvä kuva on sijoitettu oikein koordinaatistoon.

Suuntakulman laskennassa pitää huomioida myös tangentin käänteisfunktion epäjatkuvuuskohta $\Delta X = X_2 - X_1 = 0$ (kaava 26, s. 50). Epäjatkuvuuskohdassa suuntakulma on $t_{12} = 100$ gon, kun $\Delta Y > 0$ tai $t_{12} = 300$ gon, kun $\Delta Y < 0$.




**KUVA 34** *Tangentin käänteisfunktion jaksollisuus. Suuntakulman määrittelyalueelle osuu kolme jaksoa. Kuvassa käytetty kulmayksikkö on aste.*




**KUVA 35** *Koordinaatiston neljännekset ja suuntakulman laskennassa tehtävät korjaukset neljänneksittäin. Kuvan korjaukset ovat asteina.*

Geodeettisen käänteistehtävän ratkaisuina saatavat lähtösivun suuntakulma ja vaakamatka ovat analogisia matematiikassa käytetyn napakoordinaattiesityksen kanssa. Useissa laskimissa löytyy niiden laskentaa varten napakoordinaattitoiminto. Se ei kuitenkaan anna suoraan samoja tuloksia kuin geodeettinen käänteistehtävä, koska geodeettisessa laskennassa käytettävän koordinaatiston akselien nimeäminen ja suuntakulman määrittely eroavat matematiikassa käytetyistä määrittelyistä.

### 2.5.4 Geodeettinen päätehtävä

Kun tunnetulta pisteeltä on määritetty suuntakulma ja vaakaetäisyys tuntemattomaan pisteeseen, sen koordinaatit voidaan laskea kaavoilla, joista käytetään nimitystä geodeettinen päätehtävä. Ratkaisun lähtökohta on kuten käänteistehtävässäkin kuvan 33 (s. 50) suorakulmainen kolmio. Tehtävässä tunnetaan lähtöpisteen 1 koordinaatit ($X_1$, $Y_1$) sekä suuntakulma ($t_{12}$) ja vaakaetäisyys ($s_{12}$) tulopisteelle 2. Sini- ja kosinifunktioiden määrittelyn perusteella saadaan, että

$$\begin{cases} \cos t_{12} = \dfrac{X_2 - X_1}{s_{12}} \\ \sin t_{12} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{s_{12}} \end{cases}. \tag{29}$$

Tästä saadaan pisteen 2 koordinaatit

$$\begin{cases} X_2 = X_1 + s_{12} \cos t_{12} \\ Y_2 = Y_1 + s_{12} \sin t_{12} \end{cases}, \tag{30}$$

joissa $X_1$ ja $Y_1$ ovat lähtöpisteen koordinaatit, $X_2$ ja $Y_2$ ovat tulopisteen koordinaatit, $s_{12}$ on vaakaetäisyys ja $t_{12}$ on suuntakulma lähtöpisteeltä tulopisteelle.

Geodeettisen päätehtävän ratkaisukaavat esittävät, kuinka koordinaatistossa liikutaan pisteestä toiseen suuntakulmien ja etäisyyksien avulla. Kaavat ovat laskennan kannalta ongelmattomia, sillä niihin ei liity epäjatkuvuuskohtia tai muita matemaattisia ongelmia.

## 2.5.5 Tehtäviä

**36.** Laske suuntakulmat ja matkat pisteeltä 1 pisteisiin 11, 12, 13 ja 14, kun pisteiden koordinaatit ovat:

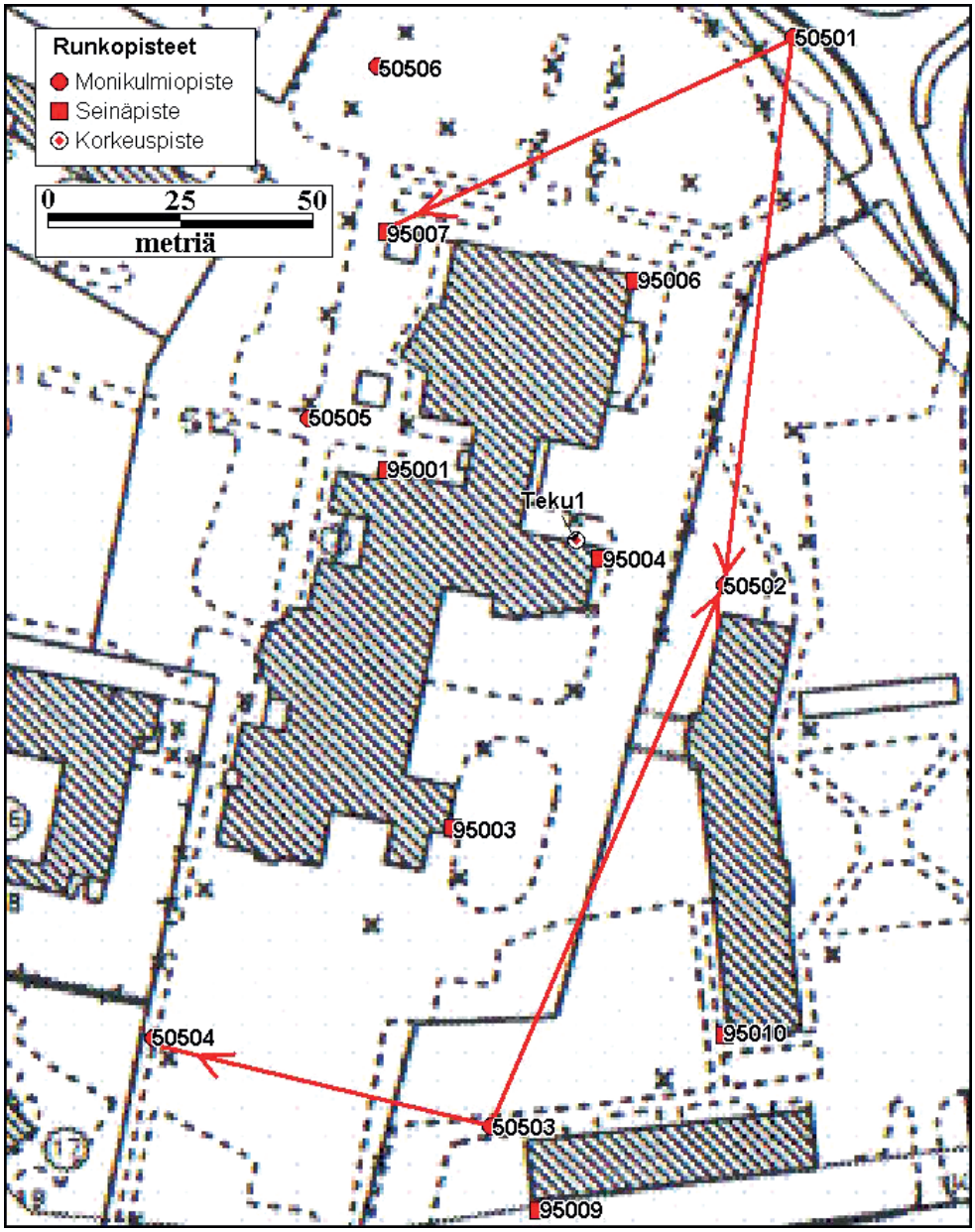
| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| 1 | 1201.239 | 5010.453 |
| 11 | 1272.220 | 5039.110 |
| 12 | 1194.920 | 4937.413 |
| 13 | 1308.997 | 5000.645 |
| 14 | 1178.029 | 5112.503 |

**37.** Laske kolmion sivut ja kulmat ja piirrä kolmio johonkin täsmälliseen mittakaavaan, kun sen kärkipisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| A | 3738.519 | 6424.256 |
| B | 4153.116 | 6031.496 |
| C | 3739.660 | 6156.235 |

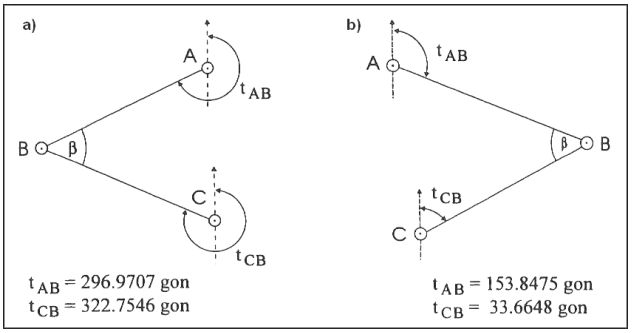
**38.** Alus purjehti 48.28 km suuntaan 30.27°. Sitten se muutti kurssia ja jatkoi 80.47 km suuntaan 315.80°. a) Piirrä kuva aluksen reitistä johonkin sopivaan mittakaavaan ja merkitse kuvaan laskennassa esiintyvät suureet. b) Mihin suuntaan ja kuinka pitkän matkan aluksen tulee purjehtia päästäkseen viimeisestä reittipisteestä takaisin lähtöpisteeseen? c) Mitä vaihtoehtoisia ratkaisutapoja tehtäväs-sä voidaan käyttää? Ratkaise tehtävä kahdella tavalla.

**39.** Tee kuvan 36 (s. 54) kartan perusteella seuraavat tehtävät. a) Mikä on kartan mittakaava? b) Arvioi tai mittaa suuntakulmat $t_{50501\text{-}50502}$, $t_{50501\text{-}95007}$, $t_{50503\text{-}50502}$ ja $t_{50503\text{-}50504}$, kun pohjoissuunta on ylhäällä. c) Mittaa kartalta b-kohdan pistevälien pituudet ja laske pituudet koordinaatistossa. d) Piirrä kartalle koordinaattiruu-dukko 100 m:n välein, kun pisteen 50503 koordinaatit ovat $P$ = 7377104 m ja $I$ = 3443234 m. e) Mittaa kartalta pisteiden 50501 ja 50504 koordinaatit.



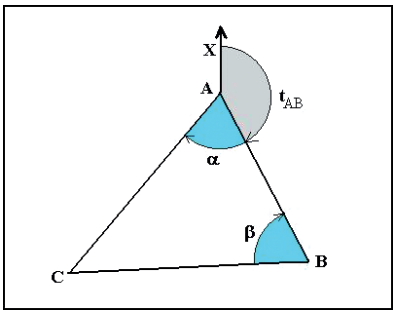

**KUVA 36** *Tehtävä 39: mittakaava, suuntakulmien ja matkojen arviointi sekä koordinaatiston piirtäminen ja koordinaattien mittaaminen.*

**40.** Laske kulma β kummassakin kuvan 37 esittämässä tapauksessa (a ja b). Kuvat ovat periaatekuvia, joten ne eivät esitä kulmia ja suuntia oikean kokoisina.



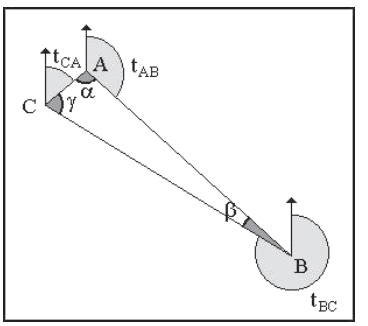

**KUVA 37** *Tehtävä 40: laske kulma β kummassakin tapauksessa (Gross 2004, s. 41).*

**41.** Kuvan 38 kolmiossa sivun AB suuntakulma on $t_{AB}$ = 167.7824 gon ja sivun viereiset kulmat ovat α = 67.8892 gon ja β = 71.0780 gon. Laske sivujen BC ja CA suuntakulmat $t_{BC}$ ja $t_{CA}$.




**KUVA 38** *Tehtävä 41.*

**42.** Kuvan 39 kolmiossa sivujen suuntakulmat ovat $t_{AB}$ = 138.2812 gon, $t_{BC}$ = 329.7941 gon ja $t_{CA}$ = 48.0056 gon. Laske kolmion kulmat.

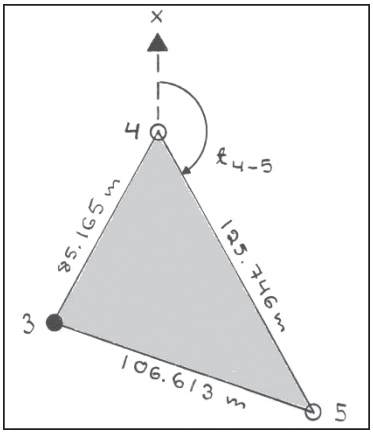



**KUVA 39** *Tehtävä 42.*

**43.** Kuvan 40 pisteiden 1 ja 2 koordinaatit ovat $X_1$ = 20.0 m, $Y_1$ = 25.0 m, $X_2$ = 155.0 m ja $Y_2$ = 70.0 m. a) Mikä on kuvan mittakaava? b) Piirrä kuvaan koordinaattiakselit, kun niiden järjestys on määritelty maanmittaustekniikassa noudatetun käytännön mukaisesti.

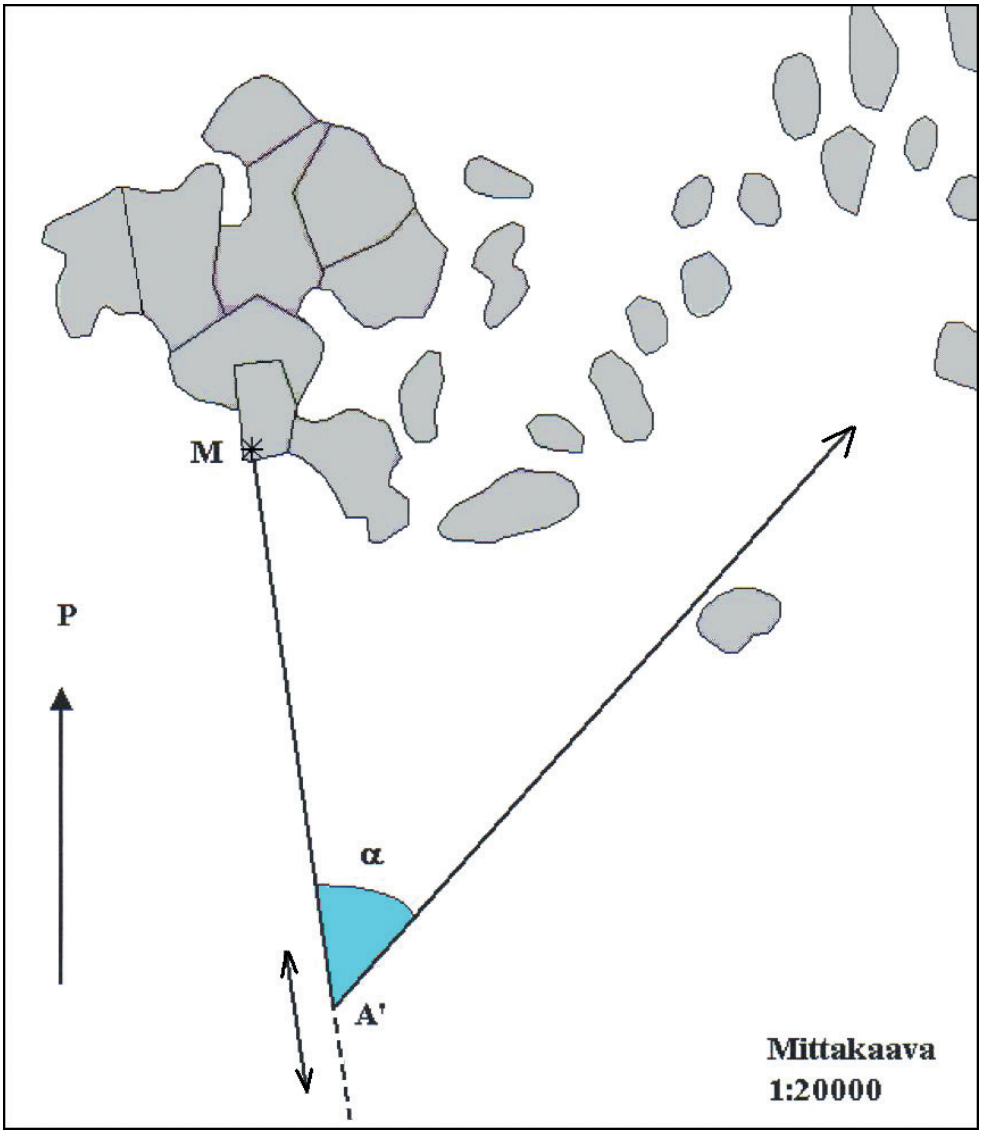
**KUVA 40** *Tehtävä 43: laske kuvan mittakaava ja piirrä koordinaattiakselit.*

**44.** Laske kuvan 41 kolmion kärkipisteiden 4 ja 5 koordinaatit. Pisteen 3 koordinaatit ovat $X_3$ = 1649.753 m ja $Y_3$ = 2597.956 m ja sivun 4-5 suuntakulma on $t_{45}$ = 167.8706 gon.




**KUVA 41** *Tehtävä 44.*

**45.** Veneen arvioitu paikka oli alkutilanteessa kuvan 42 (s. 58) mukaisesti kohdassa A'. Tästä paikasta loisto M näkyi kulkusuuntaan nähden vasemmalla kulmassa $\alpha$ = 50°. Kun loisto näkyi kulmassa $2\alpha$ = 100°, oli alus edennyt suuntansa säilyttäen 1300 m. Piirrä karttaan veneen oikea alku- ja loppusijainti ja esitä ratkaisun perustelut. Tehtävässä on kyse eräästä perinteisestä navigointimenetelmästä, joka tunnetaan kaksinkertaisen keulakulman menetelmänä. Opastus: kuvan suuntien katsotaan olevan oikein, joten veneen oikea alkusijainti sijaitsee jossakin suoralla MA'.




**KUVA 42** *Tehtävä 45: navigointi kaksinkertaisen keulakulman menetelmällä.*

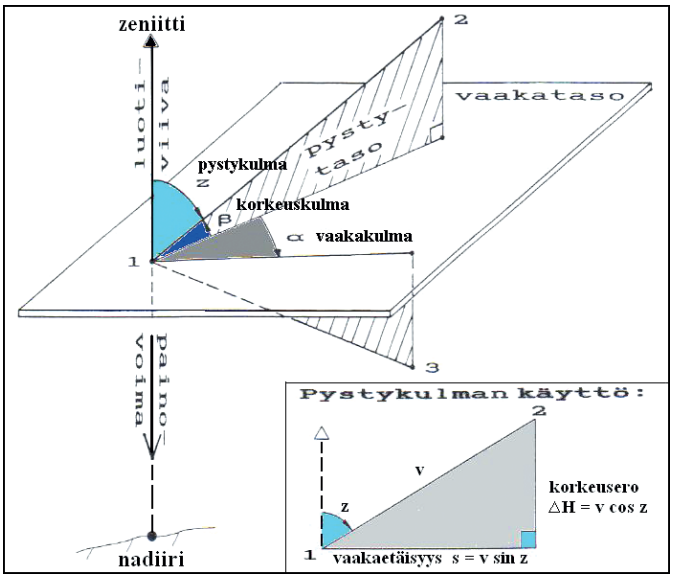
## 2.6 Takymetrimittauksen peruskaavat

### 2.6.1 Kulmakäsitteet

Teodoliitit ja takymetrit ovat geodeettisia mittauskojeita, joilla mitataan vaaka- ja pystykulmia (kuva 43). Vaakakulma ($\alpha$) mitataan kojeen vaakatasossa olevalta vaakakehältä ja se on kahden tähtäyssuunnan erotus. Pystykulma ($z$) mitataan kojeen pystykehältä ja se on luotiviivan ja tähtäysakselin välinen kulma. Joskus on tarkoituksenmukaista käyttää pystykulman sijasta korkeuskulmaa ($\beta$). Se on tähtäysakselin ja vaakatason välinen kulma. Pysty- ja korkeuskulman välinen yhteys on

$$\beta = 100\,\text{gon} - z\,. \tag{31}$$

Pystykulma on aina positiivinen luku, mutta korkeuskulma voi olla myös negatiivinen luku. Tällöin tähtäys osuu havaintokojeen vaakatason alapuolella sijaitsevaan pisteeseen.




**KUVA 43** *Kulmakäsitteet: pystykulma ($z$), korkeuskulma ($\beta$) ja vaakakulma ($\alpha$). Pystykulman perusteella vinomatka ($v$) redukoidaan vaakamatkaksi ($s$) ja lasketaan korkeusero ($\Delta H$).*

Pystykulman merkitys liittyy etäisyyksien käsittelyyn ja korkeudenmittaukseen. Koordinaattien laskentaa varten mitatut vinoetäisyydet ($v$) muunnetaan eli redukoidaan vaakaetäisyyksiksi ($s$) kaavalla

$$s = v \sin z\,. \tag{32}$$

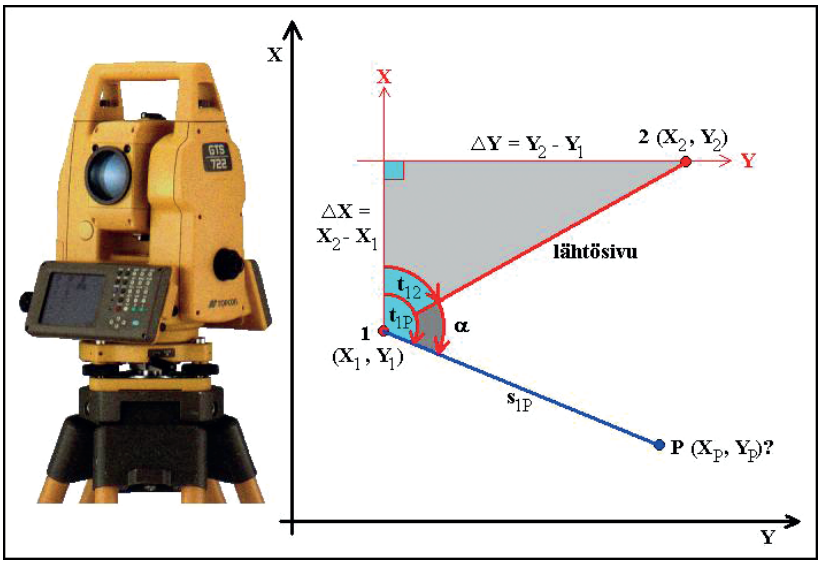
Vinoetäisyyden ($v$) ja pystykulman ($z$) avulla voidaan myös laskea havaintokojeen vaaka-akselin ja tähtäyspisteen välinen korkeusero

$$\Delta H = v\cos z\,. \tag{33}$$

Kun korkeuksien määrityksessä hyödynnetään tällä tavoin mitattuja korkeuseroja, puhutaan trigonometrisesta korkeudenmittauksesta.

### 2.6.2 Säteittäinen mittaus

Säteittäinen mittaus on kartoitus- ja merkintämittauksissa käytettävä yksinkertainen mittausmenetelmä. Siinä mitataan tunnetun lähtösivun suhteen kulma ja etäisyys määritettävään pisteeseen. Mittauskojeena on normaalisti takymetri, mutta myös bussolia, teodoliittia ja vaakakehällä varustettua vaaituskojetta ja mittanauhaa voidaan käyttää säteittäisessä mittauksessa. (Kuva 44.)




**KUVA 44** *Säteittäisen mittauksen periaate. Mittauskojeena on takymetri. Pistettä 1, jossa mittauskoje on, kutsutaan asemapisteeksi ja pistettä 2, josta lähtösuunta otetaan, kutsutaan liitospisteeksi. Piste P on määritettävä piste.*

Määritettävän pisteen (P) koordinaatit ratkaistaan seuraavasti:

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \tag{34}$$

$$t_{1P} = t_{12} + \alpha, \tag{35}$$

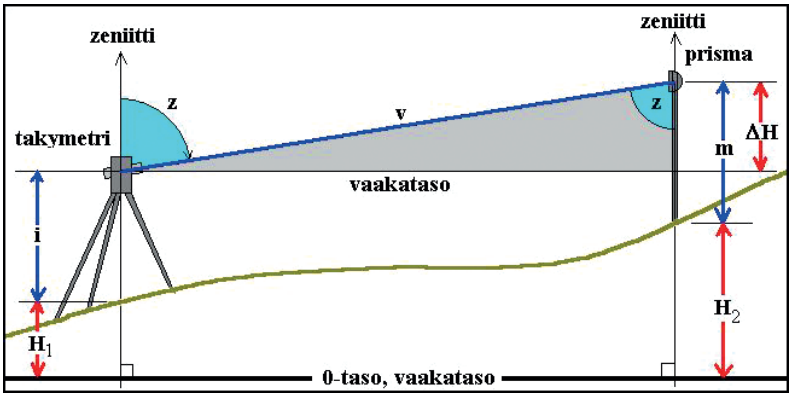
$$\begin{cases} X_P = X_1 + s_{1P}\cos t_{1P} \\ Y_P = Y_1 + s_{1P}\sin t_{1P} \end{cases}. \qquad (36)$$

Kaavoissa $X_1$ ja $Y_1$ ovat asemapisteen koordinaatit, $X_2$ ja $Y_2$ ovat liitospisteen koordinaatit, $X_P$ ja $Y_P$ ovat määritettävän pisteen koordinaatit, $t_{12}$ on lähtösivun suuntakulma, $\alpha$ on lähtösivun suhteen mitattu kulma, $s_{1P}$ on määritettävälle pisteelle mitattu vaakamatka ja $t_{1P}$ on määritettävälle pisteelle laskettu suuntakulma.

Kun takymetrillä tehdään säteittäistä mittausta, koje yleensä orientoidaan mittauksen aluksi koordinaatistoon. Orientoinnissa takymetrin vaakakehän nollapiste asetetaan koordinaatiston pohjoissuuntaan. Tämän jälkeen kojeella havaitaan suoraan suuntakulmia, joten kulma $\alpha$ ei välttämättä esiinny havainnoissa eikä laskennassa.

### 2.6.3 Trigonometrinen korkeudenmittaus

Trigonometrisella korkeudenmittauksella määritetään mittauspisteen korkeus pystykulman ja etäisyyden avulla. Havaintokojeena on takymetri. Se pystytetään korkeudeltaan tunnetulle asemapisteelle. Takymetrillä mitataan pystykulma mittauspisteellä olevaan prismaan ja kojeen ja prisman välinen vinoetäisyys. Lisäksi mitataan kojeen ja prisman korkeudet. (Kuva 45.)




**KUVA 45** *Trigonometrisen korkeudenmittauksen periaate.*

Määritettävän pisteen korkeuden laskentakaava voidaan johtaa havainnoista ja lähtötiedoista seuraavaan muotoon:

$$H_2 = H_1 + v\cos z + i - m, \qquad (37)$$

jossa $H_1$ on asemapisteen korkeus, $H_2$ on määritettävän pisteen korkeus, $v$ on vinoetäisyys määritettävälle pisteelle, $z$ on pystykulma määritettävälle pisteelle, $i$ on kojekorkeus ja $m$ on prisman korkeus eli tähyskorkeus.

Trigonometrisen korkeudenmittauksen peruskaavaa (37) voidaan käyttää luotettavasti ainoastaan lyhyillä etäisyyksillä (< 200 m). Syynä rajoitukseen on ensinnäkin Maan kaarevuus, minkä vuoksi korkeuden 0-taso ei ole oikeasti taso vaan kaareva pinta. Toiseksi tähtäyssäde ei kulje suoraan vaan kaareutuu ilmakehässä valon taittumisen eli refraktion vuoksi.

### 2.6.4 Tehtäviä

**46.** Laske pisteiden 1001 ja 1002 koordinaatit. Asemapisteen 27 koordinaatit ovat $X_{27}$ = 2209.507 m ja $Y_{27}$ = 3937.433 m, suuntakulma liitospisteelle 28 on $t_{27\text{-}28}$ = 385.5025 gon ja havainnot ovat seuraavat. Taulukossa Ap on asemapiste ja Tp on tähtäyspiste.

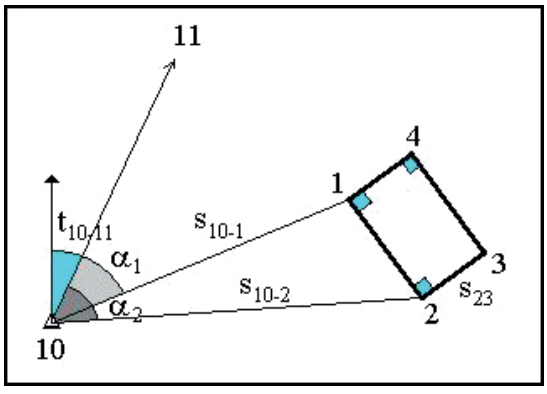
| Ap | Tp | Suunta / gon | Vaakamatka / m |
|---|---|---|---|
| 27 | 28 | 123.8971 | |
| | 1001 | 193.1594 | 45.455 |
| | 1002 | 310.5741 | 63.773 |

**47.** Laske pisteiden 71 ja 72 välinen vaakaetäisyys ja korkeusero, kun asemapisteeltä tehtiin takymetrillä seuraavassa taulukossa olevat havainnot. Mittauksesta käytetään usein nimitystä piiloviivan mittaus. Taulukossa Tp on tähtäyspiste.

| Tp | Suunta / gon | Pystykulma / gon | Vinomatka / m | Tähyskorkeus / m |
|---|---|---|---|---|
| 71 | 22.4768 | 103.5010 | 66.368 | 1.675 |
| 72 | 63.8570 | 102.7536 | 42.266 | 1.623 |

**48.** Laske tähtäyspisteen korkeus, kun asemapisteen korkeus on 81.345 m, kojekorkeus on 1.520 m, mitattu pystykulma on 90.0054 gon, mitattu vinoetäisyys on 87.593 m ja tähyskorkeus on 1.703 m.

**49.** Kuvan 46 (s. 63) esittämän suorakulmaisen rakennuksen nurkat 1 ja 2 mitattiin säteittäisellä mittauksella asemapisteeltä 10. Kojeelle näkymättömien nurkkien määrittämiseksi mitattiin mittanauhalla sivu 2-3. Laske rakennuksen kaikkien nurkkien koordinaatit, kun $X_{10}$ = 1158.183 m ja $Y_{10}$ = 2392.165 m, $t_{10\text{-}11}$ = 26.6088 gon, $\alpha_1$ = 43.034 gon, $s_{10\text{-}1}$ = 67.739 m, $\alpha_2$ = 66.254 gon, $s_{10\text{-}2}$ = 69.696 m ja $s_{2\text{-}3}$ = 15.00 m.



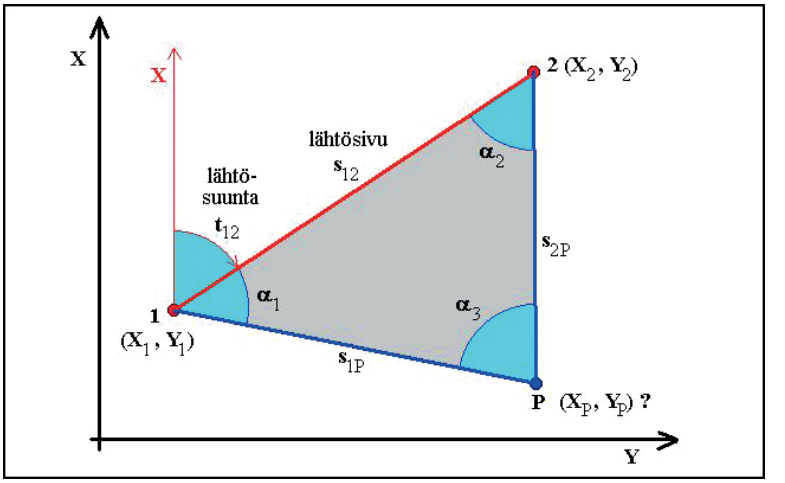

**KUVA 46** *Tehtävä 49.*

## 2.7 Geodeettiset leikkaukset

### 2.7.1 Mittauksen kolmio ja sen ratkaisut

Tasosijainnin määrittämisen perusmenetelmät perustuvat määräisen kolmion muodostamiseen. Mittauksen kolmio muodostuu kahdesta lähtöpisteestä (tasokiintopisteestä) ja yhdestä määritettävästä pisteestä (kuva 47, s. 64). Mittauksen kolmiossa tunnetaan lähtösivu. Jos siitä mitataan kaksi muuta osaa, kolmiosta muodostuu määräinen kolmio, jonka puuttuvat osat ja määritettävän pisteen koordinaatit voidaan ratkaista. Määritettävän pisteen koordinaattien laskenta tapahtuu pääpiirteittäin seuraavasti:

- Lähtösivun suuntakulma ($t_{12}$) ja pituus ($s_{12}$) ratkaistaan geodeettisella käänteistehtävällä.
- Mittauksen kolmiosta ratkaistaan ne osat, jotka määrittävät suuntakulman ja etäisyyden tunnetulta pisteeltä määritettävään pisteeseen. Ratkaisut perustuvat sini- ja kosinilauseisiin.
- Määritettävän pisteen koordinaatit lasketaan geodeettisella päätehtävällä.



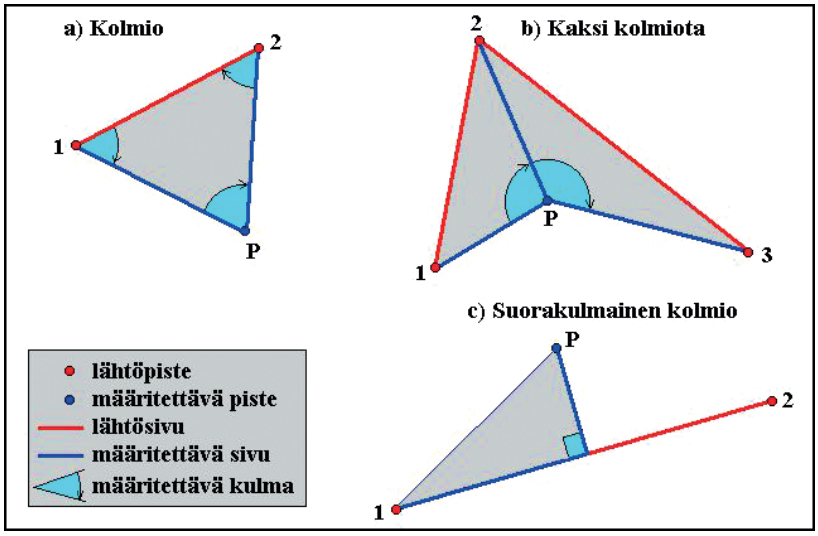

**KUVA 47** *Mittauksen kolmiossa tunnetaan lähtösivu (suuntakulma $t_{12}$ ja sivun pituus $s_{12}$) ja mitataan kaksi osaa, jolloin siitä muodostuu määräinen kolmio. Tämän jälkeen määritettävän pisteen P koordinaatit voidaan laskea jollakin geodeettisella leikkauksella.*

Tasosijainnin määrittämisen perusmenetelmistä käytetään tiettyjä nimityksiä riippuen siitä, millaisin mittauksin määräinen kolmio muodostetaan. Yleisesti näitä ratkaisuja kutsutaan geodeettisiksi leikkauksiksi. Yleisimmät geodeettiset leikkaukset ovat kaarileikkaus, eteenpäinleikkaus ja taaksepäinleikkaus.

Kun tarkastellaan mittauksen kolmiota (kuva 47), nähdään, että siinä on mahdollista havaita viisi suuretta: kulmat $\alpha_1$, $\alpha_2$ ja $\alpha_3$ sekä etäisyydet $s_{1P}$ ja $s_{2P}$. Kun mittauksen kolmion määräisyyteen riittää kaksi havaittua suuretta, mittaukset voidaan suorittaa kahden havainnon kombinaatioina kymmenellä eri tavalla. Mahdollisia kombinaatioita ovat seuraavat (suluissa on menetelmän nimi tai rajoitus):

- $\alpha_1$ ja $s_{1P}$ (säteittäinen mittaus pisteeltä 1)
- $\alpha_2$ ja $s_{2P}$ (säteittäinen mittaus pisteeltä 2)
- $\alpha_1$ ja $\alpha_2$ (eteenpäinleikkaus)
- $\alpha_1$ ja $\alpha_3$ (palautuu eteenpäinleikkaukseksi)
- $\alpha_2$ ja $\alpha_3$ (palautuu eteenpäinleikkaukseksi)
- $s_{1P}$ ja $s_{2P}$ (kaarileikkaus)
- $s_{1P}$ ja $\alpha_3$ (sivultaleikkaus)
- $s_{2P}$ ja $\alpha_3$ (sivultaleikkaus)
- $\alpha_1$ ja $s_{2P}$ (ratkaisu ei ole välttämättä yksikäsitteinen)
- $\alpha_2$ ja $s_{1P}$ (ratkaisu ei ole välttämättä yksikäsitteinen).

Säteittäinen mittaus edustaa kaikkein yksinkertaisinta tapaa ratkaista mittauksen kolmio (s. 59). Sitä ei kuitenkaan aina mielletä yhdeksi geodeettisista leikkauksista. Varsinaisia geodeettisia leikkauksia ovat siis kaari-, eteenpäin- ja sivultaleikkaukset, joista yleisimmin käytetään kahta ensiksi mainittua menetelmää.

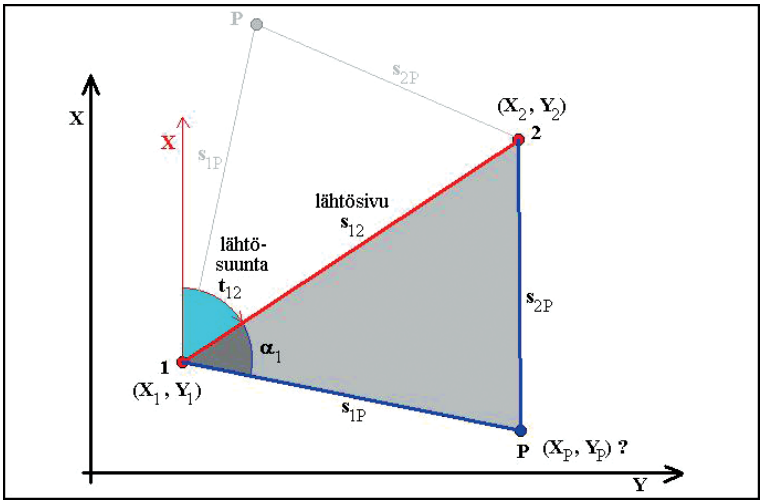



**KUVA 48** *Geodeettisten leikkausten vaihtoehdot. a) Kaarileikkaus ja eteenpäinleikkaus ovat yhteen kolmioon perustuvia leikkauksia, joissa havainnot ovat joko etäisyyksiä tai kulmia. b) Taaksepäinleikkaus perustuu kulmanmittaukseen ja kahteen toisiinsa liittyvään kolmioon. c) Suorakulmainen mittaus perustuu etäisyydenmittaukseen ja suorakulmaiseen kolmioon.*

Edellä kerrotut geodeettiset leikkaukset perustuvat yhden kolmion ratkaisuun, mutta muitakin vaihtoehtoja on olemassa (kuva 48). Taaksepäinleikkaus on menetelmä, joka perustuu kulmanmittaukseen ja kahden toisiinsa liittyvän kolmion ratkaisuun. Suorakulmainen mittaus puolestaan perustuu suorakulmaiseen kolmioon, jonka kateettien pituudet mitataan (luku 5.3.2 Suorakulmainen mittaus ja sen laskennat, s. 186).

## 2.7.2 Kaarileikkaus

Kaarileikkauksessa mitataan lähtöpisteiden ja määritettävän pisteen väliset vaakaetäisyydet ($s_{1P}$ ja $s_{1P}$). Niistä lasketaan määritettävän pisteen koordinaatit (kuva 49, s. 66). Havainnot voidaan tehdä määritettävältä pisteeltä, minkä vuoksi menetelmä sopii muun muassa takymetrin orientointiin vapaata asemapistettä käytettäessä. Ratkaisu voidaan laskea joko lähtöpisteen 1 tai 2 kautta. Seuraavassa laskenta suoritetaan lähtöpisteen 1 kautta. Kaarileikkauksella on aina kaksi ratkaisua, joista pitää valita oikea ratkaisu. Mittaustilanteessa ratkaisu on yleensä selvä, mutta matemaattisen esityksen kannalta asia pitää sopia. Seuraavissa kaavoissa noudatetaan periaatetta, että ratkaisu löytyy lähtösivun 1-2 oikealta puolelta.




**KUVA 49** *Kaarileikkaukseen liittyvät suureet. Kaarileikkaus perustuu etäisyydenmittaukseen. Sillä on kaksi ratkaisu, jollei määritettävän pisteen paikkaa sovita. Tämän kirjan kaavoissa oletetaan, että haluttu ratkaisu on lähtösivun 1-2 oikealla puolella.*

Määritettävän pisteen laskennassa lähdetään liikkeelle ratkaisemalla lähtösivun suuntakulma ja pituus geodeettisella käänteistehtävällä:

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \tag{38}$$

$$s_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}\ . \tag{39}$$

Seuraavaksi ratkaistaan lähtöpisteellä 1 kulma $\alpha_1$ kosinilauseella (kuva 49, s. 64):

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{{s_{12}}^2 + {s_{1P}}^2 - {s_{2P}}^2}{2 s_{12} s_{1P}}\right). \tag{40}$$

Suuntakulma lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P on

$$t_{1P} = t_{12} + \alpha_1. \tag{41}$$

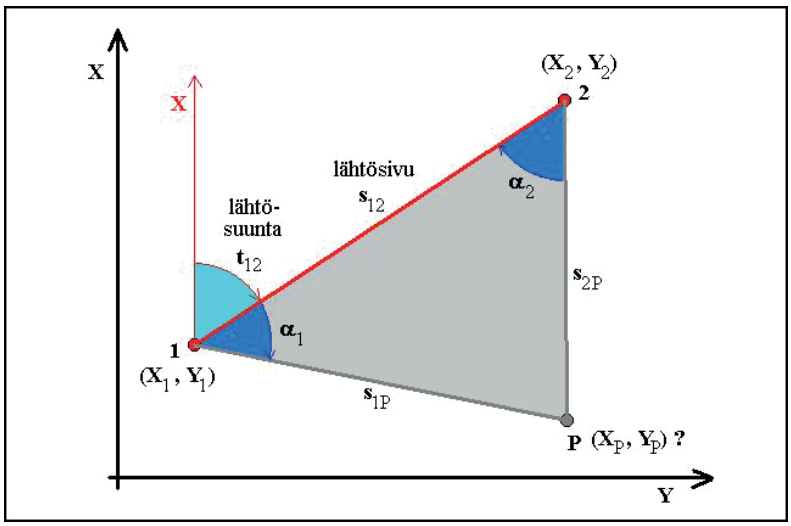
Lopuksi lasketaan määritettävän pisteen koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

$$\begin{cases} X_P = X_1 + s_{1P}\cos t_{1P} \\ Y_P = Y_1 + s_{1P}\sin t_{1P} \end{cases}. \tag{42}$$

Kaavoissa (38) – (41) $X_1$, $Y_1$, $X_2$ ja $Y_2$ ovat lähtöpisteiden koordinaatit, $t_{12}$ on lähtösivun suuntakulma, $s_{12}$ on lähtösivun pituus, $s_{1P}$ ja $s_{2P}$ ovat mitatut etäisyydet, $\alpha_1$ on kulma lähtöpisteellä 1, $t_{1P}$ on suuntakulma lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P ja $X_P$ ja $Y_P$ ovat määritettävän pisteen koordinaatit.

### 2.7.3 Eteenpäinleikkaus

Eteenpäinleikkauksessa mitataan lähtöpisteiltä vaakakulmat lähtösivun suhteen määritettävään pisteeseen ja havainnoista lasketaan määritettävän pisteen koordinaatit (kuva 50). Havainnot joudutaan tekemään kummaltakin lähtöpisteeltä. Kuten kaarileikkauksella, myös eteenpäinleikkauksella on periaatteessa kaksi ratkaisua. Seuraavassa eteenpäinleikkauksen ratkaisu esitetään jälleen niin, että määritettävä piste on lähtösivun oikealla puolella. Jos laskennan lähtökohtana ovat alkuperäiset teodoliitilla tai takymetrillä tehdyt suuntahavainnot, ne määrittävät laskettavan pisteen sijainnin yksikäsitteisesti, kun noudatetaan sääntöä, että suuntien ja kulmien positiivinen kierto tapahtuu myötäpäivään.




**KUVA 50** *Eteenpäinleikkaukseen liittyvät suureet. Ratkaisu sijaitsee lähtösivun oikealla puolla. Eteenpäinleikkaus perustuu kulmanmittaukseen (suuntien mittaukseen). Havainnot pitää tehdä kummaltakin lähtöpisteeltä.*

Eteenpäinleikkauksen laskentakaavat voidaan johtaa joko lähtöpisteen 1 tai 2 kautta. Seuraavassa kaavojen johtaminen suoritetaan jälleen lähtöpisteen 1 kautta, kuten kaarileikkauksenkin kaavojen osalta edellisessä luvussa tehtiin. Määritettävän pisteen laskennassa lähdetään jälleen liikkeelle ratkaisemalla lähtösivun suuntakulma ja pituus geodeettisella käänteistehtävällä:

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \tag{43}$$

$$s_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}\ . \tag{44}$$

Seuraavaksi ratkaistaan vaakaetäisyys $s_{1P}$ lähtöpisteeltä 1 määritettävään pisteeseen P sinilauseella:

$$s_{1P} = \frac{s_{12} \sin \alpha_2}{\sin(200\ \text{gon} - \alpha_1 - \alpha_2)}. \tag{45}$$

Vielä tarvitaan suuntakulma määritettävään pisteeseen. Se on, kun määritettävä piste on lähtösivun oikealla puolella,

$$t_{1P} = t_{12} + \alpha_1. \tag{46}$$

Lopuksi lasketaan määritettävän pisteen koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

$$\begin{cases} X_P = X_1 + s_{1P} \cos t_{1P} \\ Y_P = Y_1 + s_{1P} \sin t_{1P} \end{cases}. \tag{47}$$

Kaavoissa (43) – (47) $X_1$, $Y_1$, $X_2$ ja $Y_2$ ovat lähtöpisteiden koordinaatit, $t_{12}$ on lähtösivun suuntakulma, $s_{12}$ on lähtösivun pituus, $\alpha_1$ ja $\alpha_2$ ovat lähtöpisteiltä mitatut kulmat, $s_{1P}$ on vaakamatka lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P, $t_{1P}$ on suuntakulma lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P ja $X_P$ ja $Y_P$ ovat määritettävän pisteen koordinaatit.

Tässä ja edellisessä luvussa esitellyt geodeettiset leikkaukset, kaarileikkaus ja eteenpäinleikkaus, eivät ole takymetrimittauksissa yhtä yleisiä menetelmiä kuin säteittäinen mittaus, joka on yleinen mittausmenetelmä kartoitus- ja merkintämittauksissa. Kaarileikkausta voidaan käyttää takymetrin orientointiin vapaalle asemapisteelle. Sekä kaari- että eteenpäinleikkauksia voidaan käyttää yksittäisten runko- ja apupisteiden mittauksissa ja erilaisissa erikoismittauksissa. Ne ovat myös monimutkaisempien mittausten likiarvolaskennan menetelmiä.

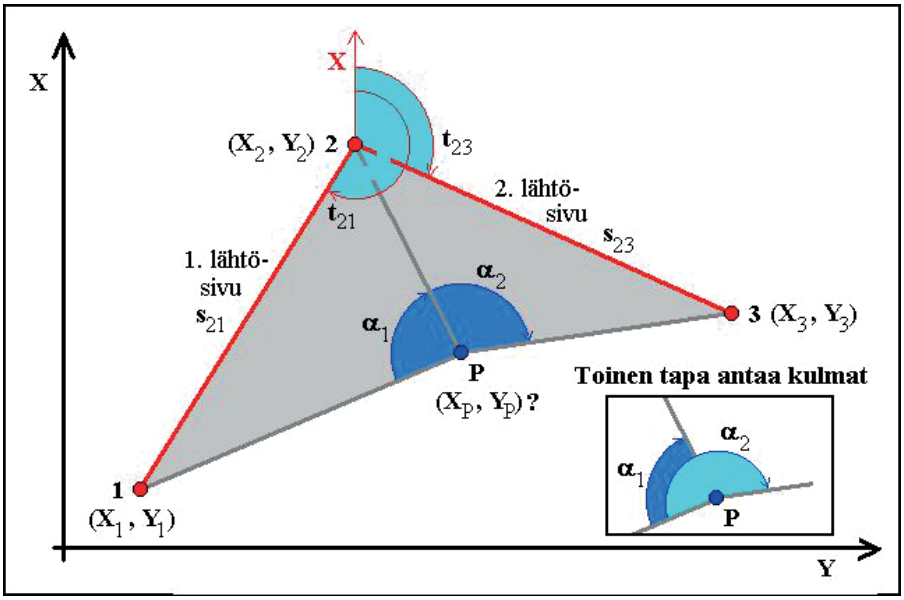
### 2.7.4 Taaksepäinleikkaus

Taaksepäinleikkaus poikkeaa edellä kuvatuista yhden kolmion varaan rakentuvista geodeettisista leikkauksista, koska siinä mittaus rakentuu kahden toisiinsa liittyvän kolmion varaan (kuva 51, s. 69). Mittauksessa on mukana kolme lähtöpistettä. Mittaushavainnot tehdään määritettävältä pisteeltä, jossa mitataan lähtöpisteiden

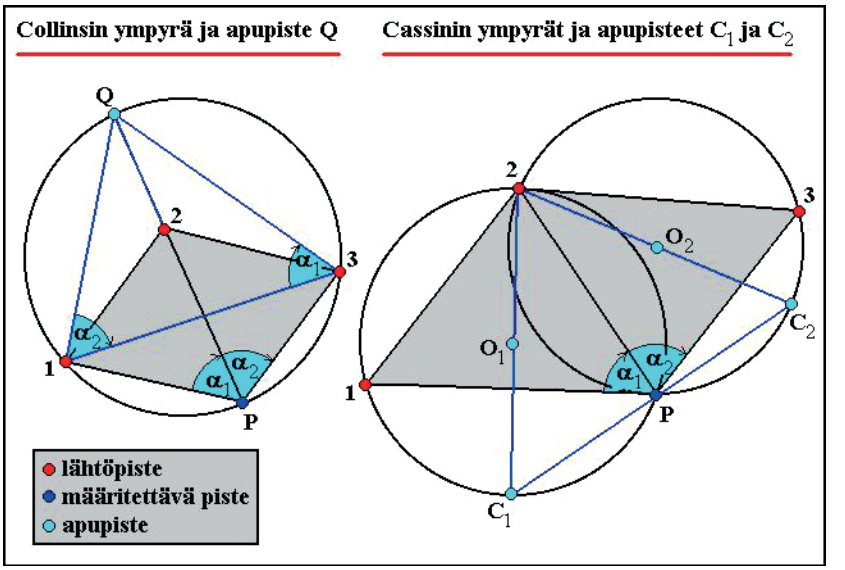
väliset kulmat tai kulmanmittauskojeiden rakenteen vuoksi oikeammin tähtäyssuunnat lähtöpisteille. Koska havainnot tehdään määritettävältä pisteeltä, menetelmä sopii takymetrin orientointiin vapaalle asemapisteelle.

Taaksepäinleikkauksen laskenta on oleellisesti monimutkaisempi tehtävä kuin kaari- tai eteenpäinleikkauksen laskenta. Määritettävän pisteen koordinaatit voidaan ratkaista monin tavoin. Vaihtoehtoisten ratkaisutapojen tarkastelu tarjoaakin hyvän mahdollisuuden harjoitella geometrian perusasioita. Useissa taaksepäinleikkauksen ratkaisuissa hyödynnetään joko Collinsin tai Cassinin ympyröitä ja niihin liittyviä apupisteitä (kuva 52, s. 70). Erilaisiin ratkaisutapoihin perehtymistä varten on syytä palauttaa mieleen muutamia ympyrän geometriaan liittyviä lauseita:

- samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria
- kaarta vastaava keskuskulma on kaksi kertaa kehäkulma
- puoliympyrän kaarta vastaava kehäkulma on suorakulma.




**KUVA 51** *Taaksepäinleikkauksen lähtötilanne. Mitatut kulmat ($\alpha_1$ ja $\alpha_2$) voidaan antaa joko kulmina, joissa lähtösivut näkyvät määritettävältä pisteeltä, tai lähtöpisteen 1 suhteen mitattuina muunnoskulmina (pieni kuva oikeassa alanurkassa).*

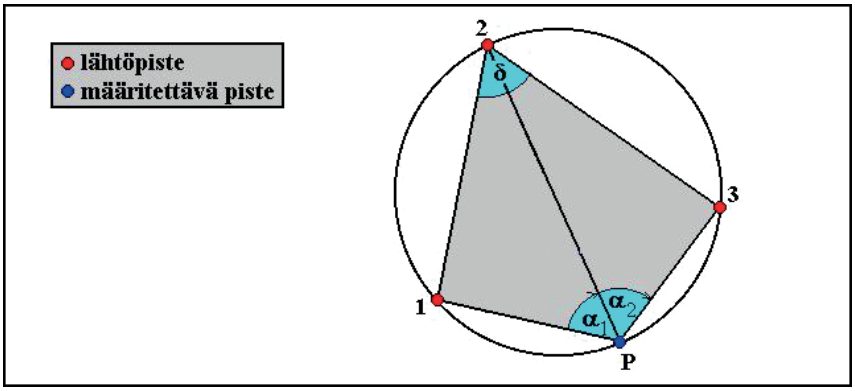



**KUVA 52** *Taaksepäinleikkauksen laskennassa hyödynnetään yleensä kahta apukuviota, jotka tunnetaan Collinsin ja Cassinin ympyröinä.*

Edellisten lauseiden (s. 67) perusteella esimerkiksi Collinsin ympyrässä pisteellä P mitatut kulmat ($\alpha_1$ ja $\alpha_2$) löytyvät myös lähtöpisteiltä 1 ja 3. Cassinin ympyröissä puolestaan määritettävällä pisteellä P kulmat $\angle C_1P2$ ja $\angle 2PC_2$ ovat suoria kulmia. Tässä kirjassa ei esitetä yhtäkään mahdollisista taaksepäinleikkauksen ratkaisuista. Kuitenkin lukijaa neuvotaan miettimään mahdollisia ratkaisuja itsenäisesti ja tutustumaan maanmittausalan kirjallisuudessa esitettyihin ratkaisuihin. (Kuva 52)

### 2.7.5 Taaksepäinleikkauksen vaarallinen ympyrä

Taaksepäinleikkauksen yhteydessä puhutaan vaarallisesta ympyrästä. Tämä tarkoittaa tilannetta, jolloin kaikki kolme lähtöpistettä ja määritettävä piste sijaitsevat saman ympyrän kehällä. Pisteet muodostavat tällöin jännenelikulmion. (Kuva 53, s. 71)




**KUVA 53** *Vaarallinen ympyrä. Jos kaikki neljä taaksepäinleikkauksen pistettä sijaitsevat samalla ympyrän kaarella, määritettävän pisteen P paikka ei ole yksikäsitteisesti määrätty, vaan se voi sijaita missä tahansa kaaren 1P3 pisteessä.*

Jännenelikulmiossa vastakkaisten nurkkien kulmien summa on aina oikokulma eli 200 gon. Kuvan 53 merkinnöin taaksepäinleikkauksessa ollaan tässä tilanteessa, kun

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \delta = 200\ \text{gon}\,, \tag{48}$$

jossa $\alpha_1$ ja $\alpha_2$ ovat mitatut kulmat ja $\delta$ on lähtösivujen välinen kulma.

Vaarallisen ympyrän tilanteessa pisteen P ratkaisuina voivat olla kaikki kaarella 1P3 sijaitsevat pisteet, koska samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria. Mittauksella ei ole siis yksikäsitteistä ratkaisua. Vaarallinen ympyrä on kärjistetty esimerkki mittauksen rakenteen (geometrian) ja tarkkuuden välisestä riippuvuudesta. Vaarallisen ympyrän tilanteessa tarkka mittaus on mahdoton tehtävä. Myös muissa mittauksissa, kuten eteenpäin- ja kaarileikkauksissa, mittauksen geometria voi heikentää koordinaattien määritystarkkuutta.

### 2.7.6 Tehtäviä

**50.** Piirrä kuva mittaustilanteesta johonkin täsmälliseen mittakaavaan ja laske pisteen 45 koordinaatit (kumpikin mahdollisista ratkaisuista), kun pisteeltä 45 on mitattu vaakamatkat $s_{45\text{-}301}$ = 84.783 m ja $s_{45\text{-}317}$ = 79.547 m runkopisteille 301 ja 317. Kiintopisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 301 | 15835.730 | 92737.642 |
| 317 | 15876.219 | 92869.886 |

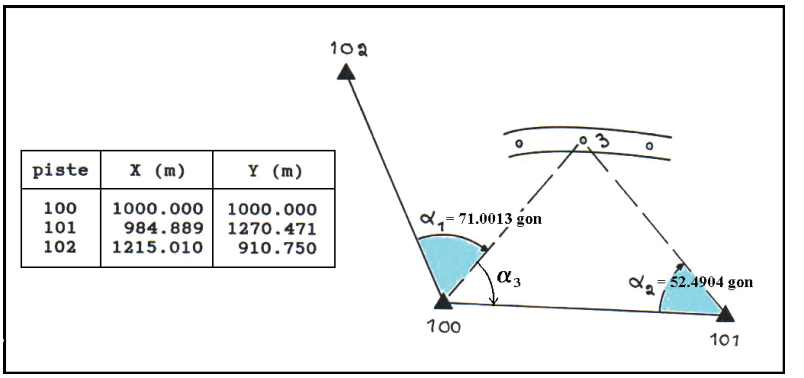
**51.** Pisteet 11 ja 12 muodostavat mittauksen lähtösivun. Määritettävä piste 5 sijaitsee lähtösivun vasemmalla puolella, kun katsotaan pisteeltä 11 pisteelle 12. Pisteellä 11 mitattu määritettävän pisteen ja lähtösivun välinen kulma on 71.0016 gon ja pisteellä 12 mitattu kulma on 52.4896 gon. Piirrä kuva mittaustilanteesta johonkin täsmälliseen mittakaavaan ja laske pisteen 5 koordinaatit. Kiintopisteiden 11 ja 12 koordinaatit ovat:

| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| 11 | 984.889 | 2270.471 |
| 12 | 1215.010 | 1910.750 |

**52.** Sivulla 63 sanotaan, että mittauksen kolmion ratkaisut $\alpha_1$ ja $s_{2P}$ sekä $\alpha_2$ ja $s_{1P}$ eivät ole välttämättä yksikäsitteisiä. Mitä tämä tarkoittaa ja miksi näin on?

**53.** Minkä ympyrägeometriaa kuvaavan lauseen perusteella a) Collinsin ympyrässä pisteellä P mitatut kulmat ($\alpha_1$ ja $\alpha_2$) löytyvät myös lähtöpisteiltä 1 ja 3, b) Cassinin ympyröissä määritettävällä pisteellä P kulmat $\angle C_1P2$ ja $\angle 2PC_2$ ovat suoria kulmia? (Kuva 52, s. 70.)

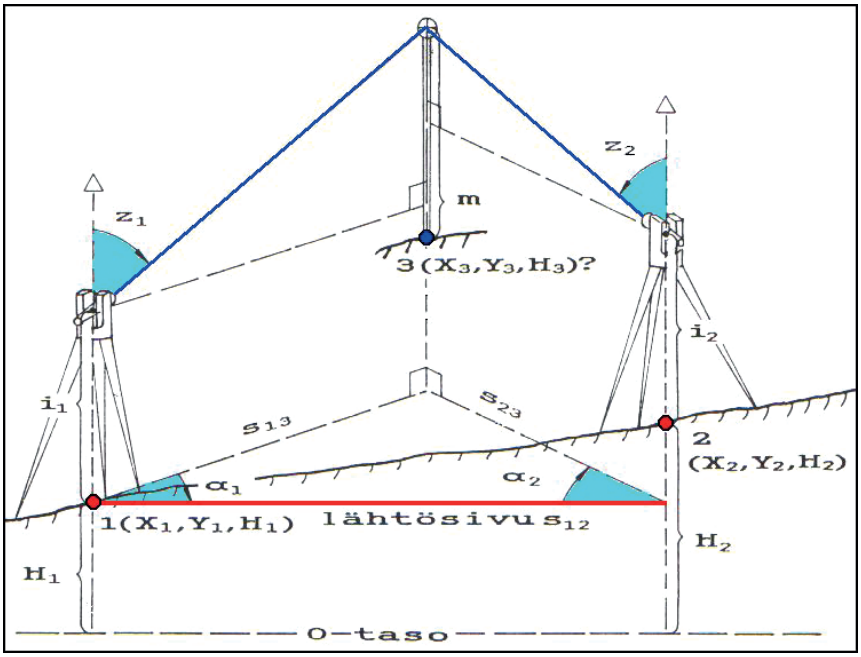
**54.** Laske pisteen 3 koordinaatit kuvan 54 esittämässä mittauksessa.




**KUVA 54** *Tehtävä 52: eteenpäinleikkaus kahdelta lähtösivulta.*

## 2.8 Kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus

Kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus tarkoittaa mittausmenetelmää, jossa kulmahavainnoilla määritetään mittauspisteelle sekä koordinaatit että korkeus. Mittaukset tehdään tunnetun lähtösivun suhteen, jolloin tasokoordinaatit määräytyvät eteenpäinleikkauksella ja korkeus trigonometrisesti. (Kuva 55, s. 73.)




**KUVA 55** *Kolmiulotteisen eteenpäinleikkauksen mittausasetelma.*

Kolmiulotteisessa eteenpäinleikkauksessa mittaushavainnot tehdään kahdelta asemapisteeltä. Havaintoina ovat asemapisteeltä 1 määritettävään pisteeseen 3 mitattu pystykulma ($z_1$), määritettävän pisteen ja lähtösivun 1-2 välinen vaakakulma ($\alpha_1$) sekä vastaavalla tavalla asemapisteeltä 2 mitatut pystykulma ($z_2$) ja vaakakulma ($\alpha_2$). Lisäksi laskentaa varten tulee mitata kojeiden ja tähysten korkeudet ($i_1$, $i_2$ ja $m$). Kun lähtöpisteiden koordinaatit ja korkeudet tunnetaan, määritettävän pisteen koordinaatit voidaan laskea eteenpäinleikkauksella. Korkeuksien laskenta puolestaan perustuu trigonometrisen korkeudenmittauksen periaatteeseen. Laadunvalvonnan kannalta on tärkeää huomata, että korkeus voidaan laskea kummaltakin asemapisteeltä. Korkeuden osalta lopputulos voidaan näin ollen aina tarkistaa. (Kuva 55.)

Koska kolmiulotteisessa eteenpäinleikkauksessa ei mitata etäisyyksiä, täytyy trigonometrisen korkeudenmittauksen kaava esittää vaakaetäisyyksien avulla (vertaa kuva 45 ja kaava 37, s. 61). Vaakaetäisyyden avulla esitettynä määritettävän pisteen korkeus on asemapisteeltä 1 mitattuna

$$H_3' = H_1 + \frac{s_{13}}{\tan z_1} + i_1 - m \qquad (49)$$

ja asemapisteeltä 2 mitattuna

$$H_3'' = H_2 + \frac{s_{23}}{\tan z_2} + i_2 - m. \qquad (50)$$

Määritettävän pisteen lopullinen korkeus on näiden keskiarvo

$$H_3 = \frac{H_3' + H_3''}{2}. \qquad (51)$$

Kaavoissa (49) – (51) $H_1$ on asemapisteen 1 korkeus, $H_2$ on asemapisteen 2 korkeus, $H_3$ on määritettävän pisteen 3 korkeus, $H_3'$ on määritettävän pisteen korkeus asemapisteeltä 1 mitattuna, $H_3''$ on määritettävän pisteen korkeus asemapisteeltä 2 mitattuna, $s_{13}$ on vaakaetäisyys pisteeltä 1 määritettävälle pisteelle, $s_{23}$ on vaakaetäisyys pisteeltä 2 määritettävälle pisteelle 3, $z_1$ ja $z_2$ ovat asemapisteiltä mitatut pystykulmat, $i_1$ ja $i_2$ ovat kojekorkeudet ja $m$ on tähyskorkeus.

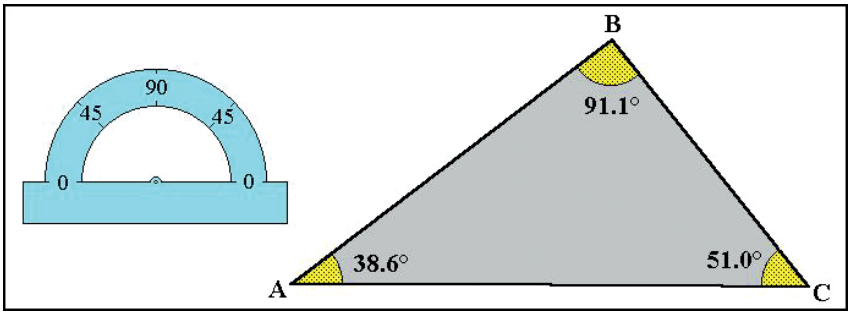
Kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus sopii luoksepääsemättömien tai jollakin tavoin vaarallisten kohteiden koordinaattien ja korkeuksien mittaamiseen, koska kohteeseen ei tarvitse kuljettaa mitään mittauslaitteita. Oikein suoritettuna se on myös erittäin tarkka mittausmenetelmä, minkä vuoksi sitä käytetään muun muassa vaativissa teollisuusmittauksissa.

## 2.9 Pienimmän neliösumman periaate ja tasoituslaskenta

### 2.9.1 Ylimääritetty mittaus

Edellä kolmiulotteisen eteenpäinleikkauksen yhteydessä nähtiin, että kohteen korkeus voidaan laskea kahdella tavalla. Jos mittauksessa menetellään tällä tavoin eli tehdään enemmän havaintoja kuin välttämättä tarvitaan määritettävien suureiden laskentaan, sanotaan että tehdään ylimääräisiä havaintoja. Ylimääräisten havaintojen vuoksi määritettävät suureet voidaan laskea usealla tavalla. Eri tavoin lasketut tulokset todennäköisesti eroavat toisistaan havaintojen virheiden vuoksi. Ylimääritys tuo siis esille mittauksen mahdollisia virheitä ja mahdollistaa lopputulosten tarkkuuden arvioinnin.

Ylimääritykseen liittyvä yksinkertainen esimerkki on kolmion kulmien määrittäminen. Kolmion kulmien summa on tunnetusti oikokulma eli 180°. Jos kolmion kaksi kulmaa ($\alpha_1$ ja $\alpha_2$) mitataan, kolmas kulma voidaan laskea kaavalla $\alpha_3 = 180° - \alpha_1 - \alpha_2$. Sanotaan, että tässä mittauksessa havaintojen minimimäärä, joilla tehtävä ratkeaa, on kaksi havaintoa. Jos mittaaja kuitenkin mittaa kolmannen kulman, ongelmaksi voi muodostua se, että havaintojen summaksi ei tulekaan oikokulma. Tulos voi siis olla ristiriidassa tunnettujen tosiasioiden kanssa, jolloin ei ole täysin selvää, mitkä kulmien parhaat mahdolliset arvot ovat. (Kuva 56., s. 75)




**KUVA 56** *Jos kaikki kolmion kulmat mitataan astemitalla, mittaaja tekee yhden ylimääräisen havainnot. Virheistä johtuen kulmien summaksi ei todennäköisesti tulekaan oikokulma (180°) vaan jotain muuta, esimerkiksi kuvan arvoilla 180.7°. Havaintojen summan ja oikean arvon erotusta, 180.7° – 180° = 0.7°, kutsutaan kulmasulkuvirheeksi. Kun kulmasulkuvirhe poikkeaa nollasta, herää kysymys mittaus- ja laskentatulosten oikeellisuudesta.*

Ylimääritetyssä mittauksessa yksikäsitteisen lopputuloksen saamiseksi täytyy tehdä ylimääräistä laskentatyötä. Matematiikassa puhutaan lisäehdoista, jotka määrittävät parhaan ratkaisun. Mittausten laskennassa käytetään yleensä pienimmän neliösumman ehtoa ylimääritetyn mittauksen lisäehtona. Pienimmän neliösumman ehtoon perustuvasta laskennasta käytetään geodeettisen laskennan yhteydessä nimitystä tasoituslaskenta. Nimitys johtuu siitä, että laskennassa tavallaan jaetaan eli tasoitetaan havaintojen virheet uudestaan.

### 2.9.2 Pienimmän neliösumman periaate

Pienimmän neliösumman menetelmää on käytetty mittausten laskennassa yli 200 vuotta. Siitä on tullut geodeettisen ja mittausteknillisen laskennan perusmenetelmä, koska se tuottaa hyvin perusteltuja mittaustuloksia virhe- ja tarkkuusarvioineen. Nimenomaan tarkkuuden ja mittausten laadunvalvonnan vuoksi mittauksissa pyritään aina tekemään ylimääräisiä havaintoja. Nykyaikaisin mittausmenetelmin tehdyt mittaukset tuottavat runsaasti ylimääräisiä havaintoja ja ne lasketaan yleensä pienimmän neliösumman periaatteeseen perustuvia laskentamenetelmiä käyttäen sekä maastossa että toimistossa.

Pienimmän neliösumman menetelmä on tilastomatemaattinen estimointimenetelmä. Laskennassa ratkaistaan varsinaisten tuntemattomien eli määritettävien suureiden lisäksi jäännösvirheet. Jäännösvirhe eli residuaali tai näennäinen virhe määritellään seuraavasti:

$$v_i = \ell_i - \widehat{x}\,, \tag{52}$$

jossa $v_i$ on jäännösvirhe, $\ell_i$ on havaintoarvo ja $\widehat{x}$ on suureen laskettu arvo. Usein maanmittausalan kirjallisuudessa ja laskentaohjelmissa jäännösvirhe määritellään kuitenkin vastakkaismerkkisenä. Tällöin jäännösvirhe on laskettu arvo miinus havaintoarvo. Näin määritelty jäännösvirhe voidaan tulkita havainnon korjaukseksi.

Pienimmän neliösumman periaatteella tehtävässä laskennassa huomioidaan havaintojen arvioitu tarkkuus painojen avulla. Painojen avulla huomioidaan myös havaintojen erilaiset mittayksiköt. Näin on mahdollista selvittää tasapuolisesti esimerkiksi kulma- ja etäisyyssuureiden merkitys lopputulosten kannalta. Painon määrittelee yhtälö

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \tag{53}$$

jossa $\sigma_i$ on havainnon keskihajonta, $\sigma_i^2$ on havainnon varianssi ja $\sigma_0^2$ on a priori varianssikerroin. Latinan termi ”a priori” tarkoitta, että kyseessä on etukäteen valittu vertailuarvo, jonka lukuarvo voidaan valita vapaasti. Usein a priori varianssikertoimen arvoksi annetaan laaduton luku yksi, mutta muutoinkin voidaan menetellä. A priori varianssikerroin on tärkeä testisuure, jonka avulla laskentaohjelmissa testataan mittauksen virheitä koskevia olettamuksia.

Pienimmän neliösumman periaatteen mukaan tehtävässä laskennassa ratkaistaan varsinaiset tuntemattomat ja jäännösvirheet minimoimalla jäännösvirheiden painotettu neliösumma. Matemaattisesti voidaan esittää, että ratkaisussa minimoidaan funktio

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2, \tag{54}$$

jossa $p_i$ on havainnon paino, $v_i$ on havainnon jäännösvirhe ja $n$ on havaintojen lukumäärä. Nimitys ”pienimmän neliösumman menetelmä” tulee tästä periaatteesta ja yhtälöstä.

Ratkaisun osatuloksena saadut jäännösvirheet ovat havaintojen satunnaisten virheiden estimaatteja eli virheiden arvioituja suuruuksia. Niistä lasketaan estimoitu varianssikerroin kaavalla

$$s_0^2 = \frac{\Phi}{r} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2, \tag{55}$$

jossa $s_0^2$ on estimoitu varianssikerroin, $\Phi$ on minimoitava funktio, $r$ on havaintojen ylimäärä, $p_i$ on havainnon paino, $v_i$ on havainnon jäännösvirhe ja $n$ on havaintojen lukumäärä.

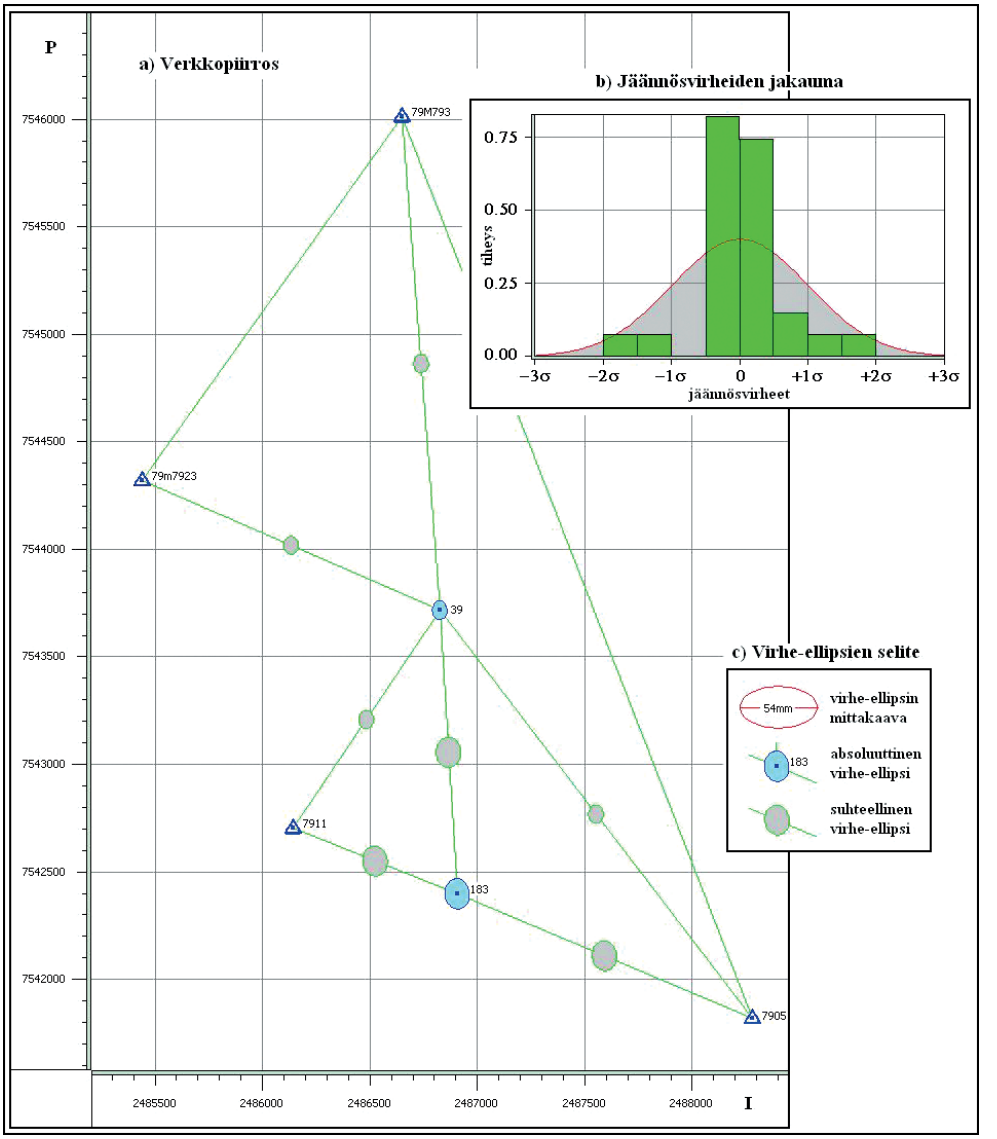
Estimoitu varianssikerroin ( $s_0^2$ ) on a priori varianssikerrointa ( $\sigma_0^2$ ) vastaava vertailusuure. Sen ja a priori varianssikertoimen avulla voidaan testata tilastomatemaattisesti havaintojen ja laskentatulosten tarkkuusarvioiden oikeellisuutta. Estimoidun varianssikertoimen neliöjuurta ($s_0$) kutsutaan painoyksikön keskivirheeksi. (Kuva 57.)

**KUVA 57** *Pienimmän neliösumman ratkaisussa haetaan tasapaino etukäteen tehdyn virhearvion ja toteutuneiden virheiden välille. Arvioitujen ja toteutuneiden virheiden yhteensopivuus testataan tilastomatemaattisesti.*

Jos estimoitu varianssikerroin ei poikkea tilastomatemaattisen testin perusteella merkitsevästi a priori arvosta, antavat havaintojen virheitä koskevat oletukset (keskihajonnat $\sigma_i$) ja niistä saatu kokeellinen otos (jäännösvirheet $v_i$) saman kuvan mittauksen virheistä ja tarkkuudesta. Tällöin havaintojen keskihajonnoista voidaan luotettavasti johtaa laskennan lopputulosten tarkkuusarviot.

### 2.9.3 Tasoituslaskennan laskentaohjelmat

Geodesiassa ja mittaus- ja kartoitustekniikassa pienimmän neliösumman menetelmällä tehtyä laskentaa kutsutaan tasoituslaskennaksi. Laskentateknisesti tasoituslaskenta on melko vaativaa tekemistä, joten sitä tehdään tietokoneohjelmien avulla. Ohjelmallinen laskenta perustuu matriisilaskentaan.




**KUVA 58** *Satelliittimittausten laskentaohjelmalla lasketun runkoverkon tuloksia. a) Verkkopiirros esittää lähtöpisteet (79M793, 79m7923, 7911 ja 7905), määritettävät pisteet (39 ja 183) ja lopputulosten tarkkuutta kuvaavat virhe-ellipsit. b) Jäännösvirheiden jakauma esitetään histogrammin muodossa ja toteutuneiden virheiden jakaumaa verrataan teoreettiseen normaalijakaumaan. c) Virhe-ellipsien selite kertoo, että verkkopiirroksessa on kahdenlaisia virhe-ellipsejä. Absoluuttinen virhe-ellipsi kuvaa määritetyn pisteen koordinaattien tarkkuuden virheettöminä pidettyjen lähtöpisteiden suhteen. Suhteellinen virhe-ellipsi kuvaa pisteväli-en koordinaattierojen tarkkuutta. (Kooste Pinnacle-ohjelman tulosteista.)*

Laskentaohjelmat esikäsittelevät havainnot ja samalla arvioivat eri tavoin havaintojen tarkkuuden eli satunnaisten virheiden suuruutta kuvaavat keskihajonnat. Laskennassa otetaan huomioon havaintojen arvioitu tarkkuus painojen avulla. Pienimmän neliösumman periaatteen mukaisessa ratkaisussa virheet jaetaan uudelleen painojen suhteessa eli tasoitetaan. Tuloksena saadaan määritettävien suureiden arvot ja niiden tarkkuusarviot. Yksittäisten suureiden tarkkuusarviot esitetään keskihajontoina. Mittauspisteiden tasosijainnin tarkkuudet esitetään yleensä havainnollisemmin virhe-ellipsien avulla. Myös pistevälien koordinaattierojen tarkkuuksia kuvaavat suhteelliset virhe-ellipsit ovat tärkeitä, erityisesti runkomittauksissa. (Kuva 58, s. 78.)

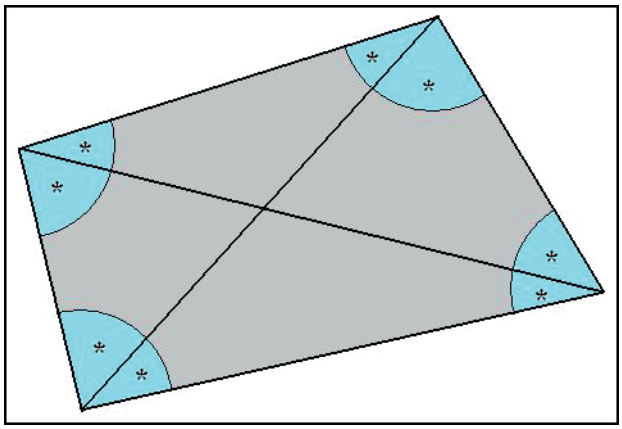
Monet tasoituslaskennan ohjelmat mahdollistavat myös mittausten suunnittelun ja virheiden simuloinnin. Ohjelmien avulla voidaan suunnitella korkeus- ja tasorunkoverkkojen rakenne ja havaintojen suoritus, niin että mittauksissa on mahdollista päästä etukäteen asetettuihin tarkkuusvaatimuksiin.

### 2.9.4 Tehtäviä

**55.** Voidaanko mittausta pitää virheettömänä, jos kolmion kulmia mitattaessa niiden summaksi tulee oikokulma?

**56.** Mikä on havaintojen minimimäärä kaarileikkauksessa (luku 2.7.2 Kaarileikkaus, s. 65)? Jos kaarileikkauksessa tehdään ylimääräisiä havaintoja, mitä tämä käytännössä voi tarkoittaa?

**57.** Määritä havaintojen ylimäärä kuvan 59 nelikulmiossa. a) Mittauksen tavoitteena on nelikulmion muodon määrittäminen. Tätä varten mitataan kaikki tähdellä merkityt kulmat. b) Mittauksen tavoitteena on nelikulmion muodon ja koon määrittäminen. Tätä varten mitataan kaikki tähdellä merkityt kulmat ja kaikkien sivujen ja lävistäjien pituudet.

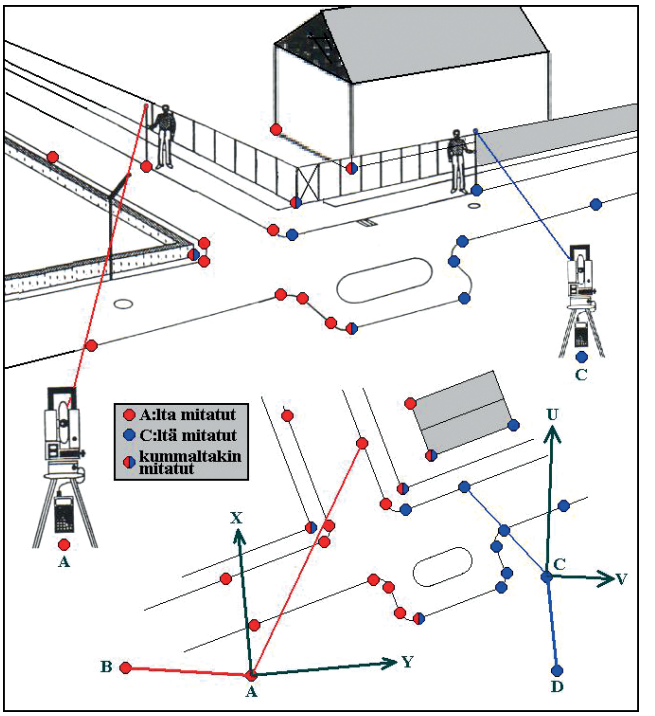


**KUVA 59** *Tehtävä 57.*

## 2.10 Helmertin muunnos

### 2.10.1 Alkuasetelma

Mittauksissa ja niiden laskennassa joudutaan monesti toimimaan kahdessa tai useammassa suorakulmaisessa koordinaatistossa. Tällöin syntyy tarve muuntaa koordinaatteja koordinaatistosta toiseen. Ajatellaan kuvitteellinen tilanne, jossa kaksi mittausryhmää tekee kartoitusmittauksia takymetrillä samalla alueella toisistaan tietämättä. Lähtökohta on, että alueelta puuttuu koordinaatisto, joten kumpikin mittausryhmä tekee alueelle oman koordinaatistonsa. Aluksi punainen ryhmä toimii alueella ja määrittää koordinaatistonsa pisteiden A ja B avulla. Piste A on heidän koordinaatistonsa origo, johon takymetri pystytään. Pohjoissuunta kiinnitetään pisteen B avulla. Tämän jälkeen ryhmä kartoittaa haluamansa kohteet. Myöhemmin sininen ryhmä tulee mittaamaan alueelle. Se määrittää koordinaatistonsa pisteiden C ja D avulla ja tekee tarvitsemansa mittaukset asemapisteeltä C. (Kuva 60.)

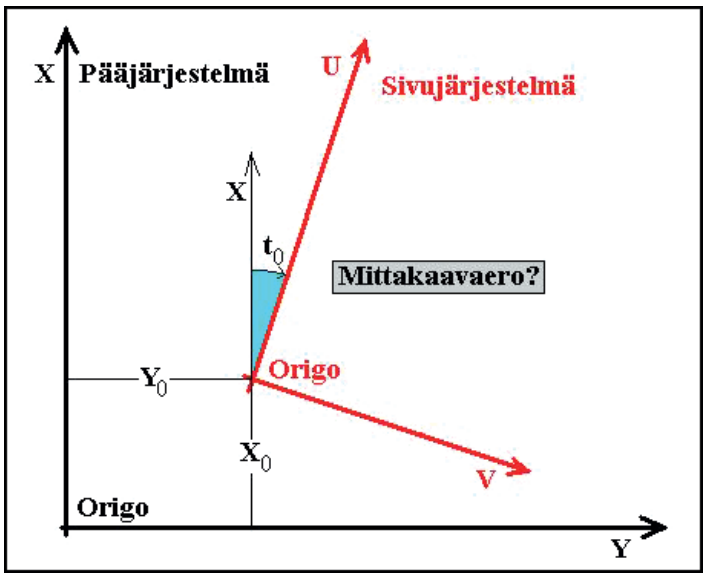



**KUVA 60** *Kuvitteellinen tilanne, jossa kaksi mittausryhmää toimii toisistaan tietämättä samalla alueella. Punainen ryhmä toimii pisteiltä A ja B ja sininen ryhmä toimii pisteiltä C ja D. Myöhemmin syntyy tarve yhdistää ryhmien mittaukset. Yhdistäminen voidaan tehdä yhteisten pisteiden avulla jotain sopivaa koordinaatistomuunnosta käyttäen. Punaisen ryhmän perustamaa XY-koordinaatistoa kutsutaan tässä yhteydessä pääjärjestelmäksi ja sinisen ryhmän perustamaa UV-koordinaatistoa sivujärjestelmäksi. Pääjärjestelmä on ensisijainen koordinaatisto, jossa asiat halutaan esittää.*

Aikanaan ryhmille selviää, että ne tekevät töitä samalla alueella ja ne haluavat hyödyntää toistensa mittauksia. Kuinka siis sinisen ryhmän mittaukset voidaan yhdistää punaisen ryhmän mittauksiin ja päinvastoin? Tässä tulee ilmeisestikin käyttää jotain matemaattista muunnosta, jonka muunnosyhtälöitä muodostaessa joudutaan huomioimaan ainakin ryhmien käyttämien koordinaatistojen origojen erot ja koordinaattiakselien erisuuntaisuus. Lisäksi on mahdollista, että ryhmien mittauksilla on mittakaavaero. Takymetrimittauksessa mittakaavaero voi johtua esimerkiksi siitä, että toinen ryhmä on tehnyt mittaamiinsa etäisyyksiin sääkorjauksen mutta toinen ryhmä ei ole tehnyt korjausta.

### 2.10.2 Helmertin muunnoksen muunnoskaavat

Eräs paljon käytetty suorakulmaisten koordinaatistojen välinen muunnos on lineaarinen yhdenmuotoisuusmuunnos, joka maanmittaustekniikassa tunnetaan Helmertin muunnoksena. Se on koordinaatistomuunnos, jossa kohteita tarkastellaan kahdessa suorakulmaisessa koordinaatistossa. Toinen koordinaatistoista nimetään pääjärjestelmäksi (XY) ja toinen sivujärjestelmäksi (UV). Tarkoituksena on määrittää muunnos sivujärjestelmästä pääjärjestelmään. (Kuva 61.)



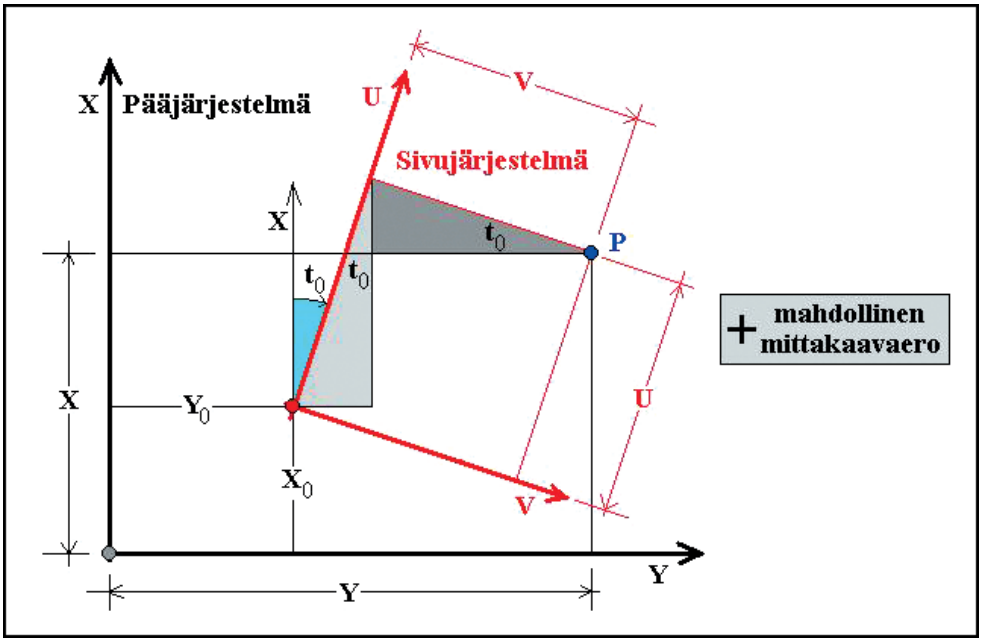

**KUVA 61** *Pää- ja sivujärjestelmien koordinaatistot.*

Muunnoksessa huomioidaan koordinaatistojen origon erot, akselien kierto sekä mittakaavaero. Mittakaavaero oletetaan samaksi kaikissa suunnissa, jolloin muunnettavien kuvioiden muoto säilyy. Tämän ominaisuuden vuoksi puhutaan yhdenmuotoisuusmuunnoksesta. Helmertin muunnosta hyödynnetään mittaus- ja kartoitustekniikassa monenlaisissa laskennoissa. Sitä voidaan käyttää varsinaisten

koordinaattimuunnosten lisäksi esimerkiksi vapaan asemapisteen ja epätäydellisesti sulkeutuvien jonojen laskennassa, pääpistelaskennassa ja mitattaessa tietoja kartoilta ja piirustuksista. Myös kaukokartoituskuvien mittauksissa Helmertin muunnosta käytetään, muiden mahdollisten koordinaatistomuunnosten ohella.

Helmertin muunnoksen muunnosyhtälöt muodostetaan, niin että seuraavat ehdot toteutuvat:

- Kumpikin koordinaatisto on suorakulmainen koordinaatisto.
- Sivujärjestelmän origon paikka pääjärjestelmässä on $(X_0, Y_0)$.
- Sivujärjestelmän koordinaattiakselit ovat kiertyneet pääjärjestelmän akselien ympäri kulman $t_0$ verran. Positiivinen kiertosuunta on myötäpäivään.
- Sivujärjestelmän koordinaatit on kerrottava mittakaavaluvulla $m$, ennen kuin ne vastaavat pääjärjestelmän koordinaatteja.




**KUVA 62** *Helmertin muunnoksen muunnosyhtälöiden johtamisessa tarpeellinen apukuvio.*

Muunnosyhtälöt sivujärjestelmästä pääjärjestelmään voidaan kirjoittaa kuvan 62 perusteella muotoon

$$\begin{cases} X = X_0 + mU\cos t_0 - mV\sin t_0 \\ Y = Y_0 + mU\sin t_0 + mV\cos t_0 \end{cases}. \tag{56}$$

Nämä yhtälöt ovat tällaisenaan käyttökelpoiset, mutta kehitetään ne vielä yleisemmin käytettyyn esitysmuotoon merkitsemällä

$$\begin{cases} k_1 = m\cos t_0 \\ k_2 = m\sin t_0 \end{cases}. \tag{57}$$

Useissa kirjallisissa lähteissä kertoimien $k_1$ ja $k_2$ sijasta käytetään merkintöjä *a* ja *b*. Tässä näistä perinteisistä merkinnöistä on luovuttu, koska ne voivat helposti sekoittua suorakulmaisiin kartoitusmittoihin (a- ja b-mitat). Suorakulmaiseen mittaukseen liittyvissä laskennoissa voidaan käyttää Helmertin muunnosta apuna, jolloin samanlaiset merkinnät voivat aiheuttaa epäselvyyksiä.

Kaavat (56) ja (57) yhdistämällä Helmertin muunnos sivujärjestelmästä pääjärjestelmään voidaan esittää kaavoilla

$$\begin{cases} X = k_1 U - k_2 V + X_0 \\ Y = k_2 U + k_1 V + Y_0 \end{cases}. \tag{58}$$

Muunnosparametrien $k_1$ ja $k_2$ sekä mittakaavaluvun $m$ ja kiertokulman $t_0$ välillä ovat lisäksi voimassa seuraavat yhtälöt, jotka perustuvat trigonometristen funktioiden määrittelyyn ja ominaisuuksiin:

$$\begin{cases} t_0 = \arctan\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right) \\ m = \sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2} \end{cases}. \tag{59}$$

Kaavoissa (56) – (59) $U$ ja $V$ ovat pisteen sivujärjestelmän koordinaatit, $X$ ja $Y$ ovat sen pääjärjestelmän koordinaatit, $m$ on mittakaavaluku, $t_0$ on sivujärjestelmän U-akselin suuntakulma pääjärjestelmässä, $k_1$ ja $k_2$ ovat koordinaatiston kierron ja mittakaavaeron välittävät muunnosparametrit ja $X_0$ ja $Y_0$ ovat sivujärjestelmän origon koordinaatit pääjärjestelmässä. Suureita $k_1$, $k_2$, $X_0$ ja $Y_0$ (tai vaihtoehtoisesti $m$, $t_0$, $X_0$ ja $Y_0$) kutsutaan muunnosparametreiksi. Koska niitä on neljä kappaletta, Helmertin muunnosta kutsutaan 4-parametriseksi muunnokseksi.

### 2.10.3 Muunnosparametrit kahden pisteen avulla

Muunnosyhtälöiden (kaava 58) neljä muunnosparametria voidaan ratkaista, kun tunnetaan vähintään kahden yhteisen pisteen koordinaatit sekä sivujärjestelmässä että pääjärjestelmässä. Tässä tarkoituksessa on tärkeää, että kuvan 60 (s. 80) mittausryhmät mittasivat joukon yhteisiä pisteitä.

Kahden yhteisen pisteen (seuraavissa kaavoissa pisteet 1 ja 2) avulla voidaan kirjoittaa neljä yhtälöä:

$$\begin{cases} X_1 = k_1 U_1 - k_2 V_1 + X_0 \\ Y_1 = k_2 U_1 + k_1 V_1 + X_0 \end{cases} \cdot \quad \begin{cases} X_2 = k_1 U_2 - k_2 V_2 + X_0 \\ Y_2 = k_2 U_2 + k_1 V_2 + Y_0 \end{cases} \tag{60}$$

Kun merkitään

$$\begin{cases} \Delta X = X_2 - X_1 \\ \Delta Y = Y_2 - Y_1 \\ \Delta U = U_2 - U_1 \\ \Delta V = V_2 - V_1 \end{cases}, \tag{61}$$

muunnosparametrien ratkaisu on

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{\Delta Y \Delta V + \Delta X \Delta U}{\Delta U^2 + \Delta V^2} \\ k_2 = \dfrac{k_1 \Delta U - \Delta X}{\Delta V} \\ X_0 = X_1 - k_1 U_1 + k_2 V_1 \\ Y_0 = Y_1 - k_2 U_1 - k_1 V_1 \end{cases} \cdot \tag{62}$$

Kaavoissa (60) – (62) $X_1$ ja $Y_1$ ovat pisteen 1 pääjärjestelmän koordinaatit, $U_1$ ja $V_1$ sen sivujärjestelmän koordinaatit, $X_2$ ja $Y_2$ ovat pisteen 2 pääjärjestelmän koordinaatit, $U_2$ ja $V_2$ sen sivujärjestelmän koordinaatit, $k_1$ ja $k_2$ ovat koordinaatiston kierron ja mittakaavaeron välittävät muunnosparametrit ja $X_0$ ja $Y_0$ ovat sivujärjestelmän origon koordinaatit pääjärjestelmässä.

### 2.10.4 Muunnosparametrit ylimääritetyssä mittauksessa

Edellisen perusteella Helmertin muunnoksen neljä muunnosparametria voidaan määrittää yksikäsitteisesti, kun tunnetaan kahden pisteen koordinaatit pää- ja sivujärjestelmissä. Jos käytettävissä on useampi kuin kaksi yhteistä pistettä, on kyseessä ylimääritetty mittaus. Tällöin muunnosparametrien laskenta perustuu pienimmän neliösumman periaatteeseen. Mittauksissa pyritään ylimääritettyyn tilanteeseen, koska tällöin voidaan laskentatulosten perusteella arvioida luotettavasti mahdollisia karkeita virheitä ja mittauksen tarkkuutta. Seuraavassa esitetään muunnosparametrien laskenta ylimääritetyssä tapauksessa ilman perusteluita, koska tässä yhteydessä ei ole mahdollista paneutua yleisemmin pienimmän neliösumman periaatteen käyttöön.

Aluksi lasketaan tarkasteltavien pisteiden, joita on *k* kappaletta, sivujärjestelmän koordinaattien keskiarvot:

$$\begin{cases} U_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i \\ V_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} V_i \end{cases} . \tag{63}$$

Seuraavaksi lasketaan sivujärjestelmän siirretyt koordinaatit:

$$\begin{cases} u_i = U_i - U_k \\ v_i = V_i - V_k \end{cases} . \tag{64}$$

Muunnosparametrit lasketaan seuraavasti:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i u_i + Y_i v_i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(u_i{}^2 + v_i{}^2\right)} \\ k_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_i u_i - X_i v_i\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(u_i{}^2 + v_i{}^2\right)} \\ X_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \\ Y_0 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i \end{cases} . \tag{65}$$

Kaavoissa (63) – (65) yhteisiä pisteitä on *k* kappaletta. $X_i$ ja $Y_i$ ovat tarkasteltavien pisteiden pääjärjestelmän koordinaatit, $U_i$ ja $V_i$ ovat sivujärjestelmän koordinaatit, $U_k$ ja $V_k$ ovat sivujärjestelmän keskiarvokoordinaatit, $u_i$ ja $v_i$ ovat keskiarvojen suhteen lasketut sivujärjestelmän siirretyt koordinaatit, $k_1$ ja $k_2$ ovat koordinaatiston kierron ja mittakaavaeron välittävät muunnosparametrit ja $X_0$ ja $Y_o$ ovat sivujärjestelmän siirretyn origon koordinaatit pääjärjestelmässä.

Kun edellä lasketuilla parametreilla (kaavat 65) halutaan muuntaa pisteitä sivujärjestelmästä pääjärjestelmään, ensiksi tulee laskea siirretyt sivujärjestelmän koordinaatit (kaava 64). Vasta tämän jälkeen lasketaan pääjärjestelmän koordinaatit (kaava 58, s. 83). Kaavat 65 ja 58 voidaan myös yhdistää muotoon

$$\begin{cases} X_i = k_1(U_i - U_k) - k_2(V_i - V_k) + X_0 \\ Y_i = k_2(U_i - U_k) + k_1(V_i - V_k) + Y_0 \end{cases}, \tag{66}$$

jossa $U_i$ ja $V_i$ ovat muunnettavan pisteen sivujärjestelmän koordinaatit, $U_k$ ja $V_k$ ovat sivujärjestelmän keskiarvokoordinaatit ja $X_i$ ja $Y_i$ ovat pääjärjestelmään muunnetut koordinaatit.

### 2.10.5 Jäännösvirheet ja muunnoksen tarkkuus

Ylimääritetyssä mittauksessa muunnoksen tarkkuutta voidaan arvioida jäännösvirheiden avulla. Jäännösvirheet pääjärjestelmässä ($XY$) lasketaan muuntamalla muunnosparametrien laskennassa käytetyt pisteet pääjärjestelmään ja laskemalla tunnettujen ja muunnettujen arvojen erot. Jäännösvirheet sivujärjestelmässä ($UV$) lasketaan seuraavilla melko monimutkaisilla kaavoilla. Jäännösvirheet sivujärjestelmässä ovat:

$$\begin{cases} v_{u,i} = -\dfrac{k_1 X_i + k_2 Y_i - (k_1^2 + k_2^2)u_i - k_1 X_0 - k_2 Y_0}{k_1^2 + k_2^2} \\ v_{v,i} = -\dfrac{-k_2 X_i + k_1 Y_i - (k_1^2 + k_2^2)v_i + k_2 X_0 - k_1 Y_0}{k_1^2 + k_2^2} \end{cases} \tag{67}$$

Jäännösvirheiden merkki on määritelty kuten kaavassa (52, s. 75). Pää- tai sivujärjestelmässä laskettujen jäännösvirheiden perusteella voidaan edelleen laskea painoyksikön keskivirhe ja muunnosparametrien keskihajonnat:

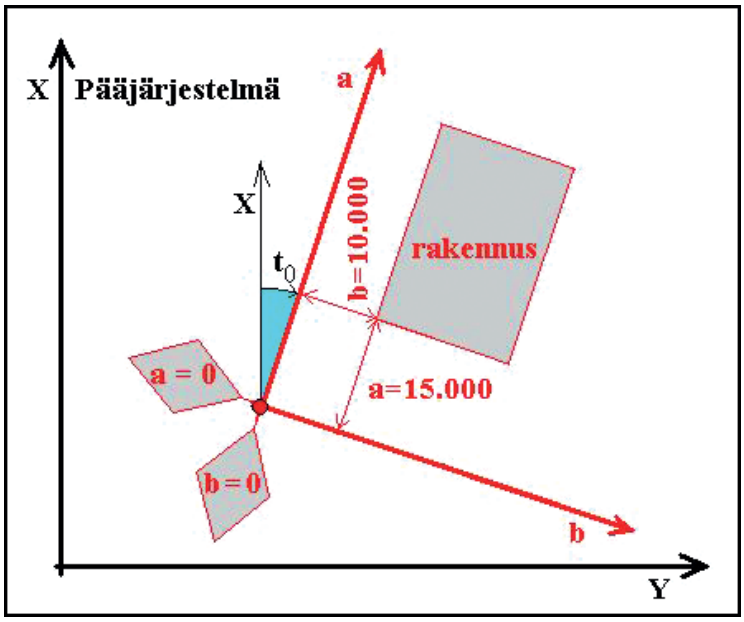
$$\begin{cases} r = 2k - 4 \\ s_0 = \sqrt{\dfrac{\sum (v_{u,i}^2 + v_{v,i}^2)}{r}} \\ s_{k_1} = s_{k_2} = \dfrac{s_0}{\sqrt{\sum (u_i^2 + v_i^2)}} \\ s_{X_0} = s_{Y_0} = \dfrac{s_0}{\sqrt{k}} \end{cases} \tag{68}$$

Kaavoissa (67) ja 68) $k$ on muunnosparametrien laskennassa käytettyjen pisteiden lukumäärä, $r$ on havaintojen ylimäärä, $v_{u,i}$ ja $v_{v,i}$ ovat pää- tai sivujärjestelmän jäännösvirheet, $s_0$ on painoyksikön keskivirhe, $u_i$ ja $v_i$ ovat sivujärjestelmän siirretyt koordinaatit (kaava 64, s. 85) ja $s_{k1}$, $s_{k2}$, $s_{X0}$ ja $s_{Y0}$ ovat muunnosparametrien keskihajonnat.

Laskennan jälkeen jäännösvirheet tutkitaan ja katsotaan, onko joukossa muista poikkeavia arvoja. Jos poikkeavia arvoja löytyy, ne voivat johtua esimerkiksi yksittäisten muunnospisteiden karkeista virheistä. Poikkeavien arvojen syyt pitää aina selvittää.

### 2.10.6 Muunnosparametrit muista lähtötiedoista

Useissa laskentatilanteissa, muun muassa suorakulmaisessa mittauksessa ja suunnitteluteknisessä laskennassa, muunnosparametrit saadaan muista lähtötiedoista kuin laskemalla yhteisten pisteiden avulla. Esimerkiksi talonrakentamisen yhteydessä rakennuskohteen mitoitus esitetään viitelinjojen suhteen, jotka ovat toisiinsa nähden suorassa kulmassa (kuva 63). Viitelinjat muodostavat sivujärjestelmän ab-koordinaatiston. Tässä asetelmassa sivujärjestelmän origon koordinaatit ($X_0$, $Y_0$) pääjärjestelmässä ja a-akselin suuntakulma ($t_0$) määräytyvät asemapiirroksen perusteella. Asemapiirroksessa määrätään rakennuksen pääpisteiden sijainti rajamittojen avulla ja rakennuksen sivujen suunnat rajoihin nähden. Kun koordinaatistojen välisen mittakaavaluvun voidaan olettaa olevan $m = 1$ (kumpikin koordinaatisto on samassa mittakaavassa), muut muunnosparametrit voidaan laskea annetuista lähtötiedoista, esimerkiksi kaavalla (57, s. 83). Vastaavia mahdollisuuksia muunnosparametrien määrittämiseen voi tarjoutua monissa muissakin mittaus- ja laskentatilanteissa.




**KUVA 63** *Rakennuskohteen mitoitus tehdään viitelinjojen a ja b suhteet. Viitelinjat sidotaan esimerkiksi tontin rajoihin.*

## 2.10.7 Tehtäviä

**58.** Johda Helmertin muunnoksen muunnosyhtälöt (kaava 56, s. 82).

**59.** Johda muunnosparametrien $k_1$ ja $k_2$ sekä mittakaavaluvun $m$ ja kiertokulman $t_0$ väliset yhtälöt (kaava 59, s. 83).

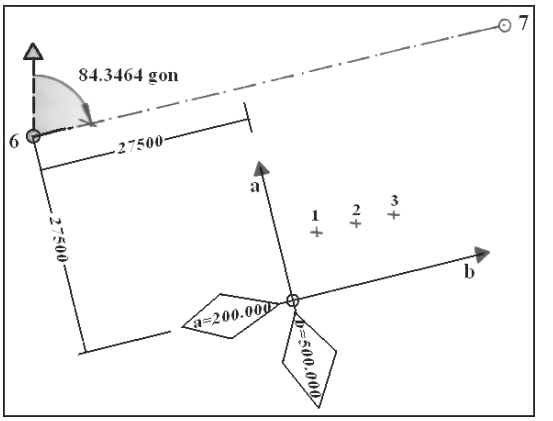
**60.** Laske asemapisteen koordinaatit, kun niiden määrittämiseksi mitattiin seuraavat suunnat ja vaakaetäisyydet kahteen liitospisteeseen. Taulukossa Tp on tähtäyspiste, $t$ on havaittu vaakasuunta (muunnoskulma), $s$ on havaittu vaakamatka ja $X$ ja $Y$ ovat liitospisteen koordinaatit. Laske myös muunnoksen kiertokulma ja mittakaavaluku. Mitä kiertokulma tarkoittaa tässä yhteydessä? Mitä mittakaavaluku mahdollisesti kertoo tehdystä mittauksesta ja sen tarkkuudesta?

| Tp | $t$ / gon | $s$ / m | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|---|---|
| 102 | 0.0000 | 105.950 | 2434.219 | 4382.029 |
| 101 | 75.0015 | 93.914 | 2482.741 | 4281.776 |

**61.** Vapaalta asemapisteeltä 500 mitattiin seuraavat suunnat ja vaakaetäisyydet neljään liitospisteeseen. Taulukossa Tp on tähtäyspiste, $t$ on havaittu vaakasuunta (muunnoskulma), $s$ on havaittu vaakamatka ja $X$ ja $Y$ ovat liitospisteen koordinaatit. Laske myös muunnoksen mittakaavaluku. Mitä se kertoo tehdystä mittauksesta?

| Tp | $t$ / gon | $s$ / m | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|---|---|
| 414 | 0.0000 | 158.282 | 2983.641 | 1184.831 |
| 415 | 74.7937 | 166.165 | 2831.554 | 1281.075 |
| 410 | 245.9820 | 164.656 | 2778.453 | 963.090 |
| 413 | 315.6271 | 169.660 | 2950.923 | 985.546 |

**62.** Rakennuksen käyttöpisteiden sijainti mitoitettiin kuvan 64 esittämien viitelinjojen muodostamassa koordinaatistossa.

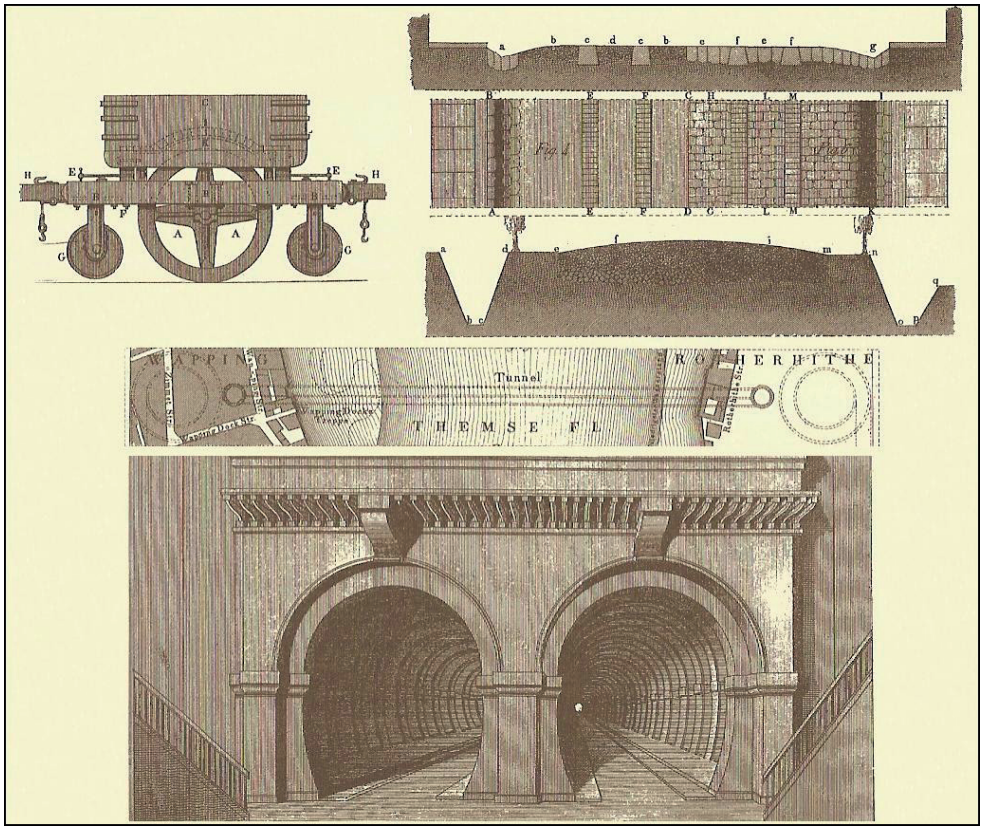



**KUVA 64** *Tehtävä 62: käyttöpisteiden koordinaatit.*

Koordinaatiston b-akseli on yhdensuuntainen rajan 6-7 kanssa. Rajan suuntakulma on 84.3464 gon. Rajapyykin 6 kunnalliset koordinaatit ovat $X_6$ = 15735.795 m ja $Y_6$ = 92301.646 m. Viitelinjojen leikkauspisteessä olevan tihennyspisteen ($a$ = 200.000 m, $b$ = 500.00 m) sijainti määräytyy suorakulmaisista rajamitoista kuvan esittämällä tavalla. Mitat ovat millimetreinä. Laske Helmertin muunnoksella käyttöpisteiden 1, 2 ja 3 kunnalliset koordinaatit, kun niiden koordinaatit mitoituskoordinaatistossa ovat 1($a_1$ = 207.500 m, $b_1$ = 505.00 m), 2 ($a_2$ = 207.500 m, $b_2$ = 510.00 m) ja 3 ($a_3$ = 207.500 m, $b_3$ = 515.00 m).

# 3 SUUNNITTELUTEKNINEN LASKENTA

Geodeettinen laskenta voidaan jakaa mittaus- ja suunnitteluteknisen laskentaan. Geodeettinen laskenta liittyy mittausten käsittelyyn ja suunnitteluteknisen laskenta rakentamisen suunnitteluun ja toteuttamiseen. Rakentaminen on mittaus- ja kartoitustekniikan näkökulmasta monin tavoin tärkeä toimiala. Maanmittaajat tekevät rakentamisen suunnittelun vaatimia kartoituksia ja suunnitelmien toteuttamiseen liittyviä merkintä-, asennus- ja valvontamittauksia. Mittausten tiukat tarkkuusvaatimukset palvelevat erityisesti rakentamisen tarpeita. Nykyinen valmiisiin rakennusosiin perustuva rakennustapa vaatii tarkkoja mittauksia, koska ilman niitä rakennusosia on vaikeaa ja kallista sovittaa yhteen. (Kuva 65.)

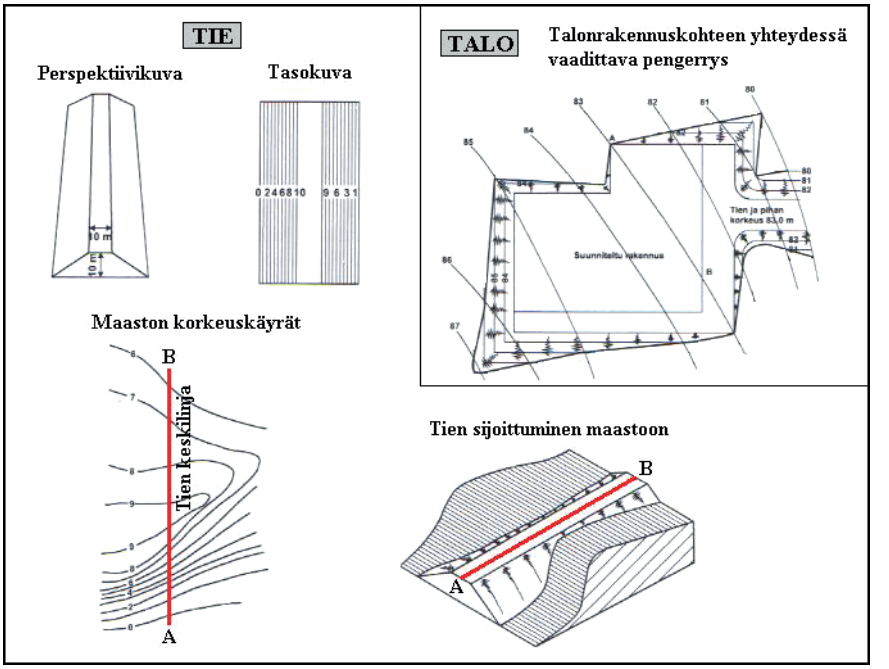



**KUVA 65** *Kadun ja tunnelinrakentamista 1700- ja 1800-lukujen vaihteesta. Ylhäällä kadunrakentamisessa käytetty kone ja kaksi kadun poikkileikkausta. Alhaalla Thamesjoen ali suunniteltu tunneli Lontoossa. (Heck 2001, kooste s. 538 kuvista, alkuperäiset kuvat on julkaistu 1844.)*

## 3.1 Suunnitteluteknisen laskennan tehtävät

Mittaaminen ja rakentaminen liittyvät läheisesti toisiinsa, koska rakentamisen suunnittelussa ja toteutuksessa tarvitaan erilaisia mittauksia. Perinteisesti tähän yhteyteen liittyvät laskennat kuuluvat geodeettisen laskennan piiriin. Tätä geodeettisen laskennan osa-aluetta kutsutaan suunnitteluteknikseksi laskennaksi. Sen tehtävät voidaan ryhmitellä seuraavasti (kuva 66):

- kaavoitukseen, tonttijakoon ja rakennusteknilliseen suunnitteluun liittyvä koordinaattitulkinta
- merkintämittauksiin liittyvä laskenta
- pinta-alojen määrittäminen
- tilavuuksien määrittäminen.




**KUVA 66** *Suunnitteluteknisessä laskennassa on kyse teiden ja talonrakennuskohteiden geometrisesta mallintamisesta. Siinä yhdistetään maastoa kuvaavat mittaustiedot suunnitelmatietoihin. Tietoja hyödynnetään merkintä- ja määrämittauksissa. (Salmenperä 1993, s. 114–115.)*

Perinteisessä koordinaattitulkinnassa on kyse siitä, että alkuaan graafiset suunnitelmat on pitänyt muuttaa koordinaattimuotoisiksi tiedoiksi merkintämittauksia varten. Tässä tarkoituksessa suunnitelmakartoissa esitetyt rajat, linjojen kulku ja rakenteiden sijainti on pitänyt tulkita ja laskea mittauspaikan koordinaatistoon. Teiden rakentamissuunnitelmiin liittyvää koordinaattitulkintaa kutsutaan pääpistelaskennaksi. Nykyinen suunnittelukäytäntö tukeutuu tietotekniikkaan ja perin-

teistä koordinaattitulkintaa ei juurikaan tarvita, koska suunnitteluohjelmistot pitävät suunnitelmat koko ajan koordinaattimuodossa. Kuitenkin on tärkeää tuntea koordinaattitulkintaan liittyviä käsitteitä ja laskentatekniikoita, jotta voi ymmärtää suunnitteluohjelmien toimintaa ja merkintämittausten menettelytapoja.

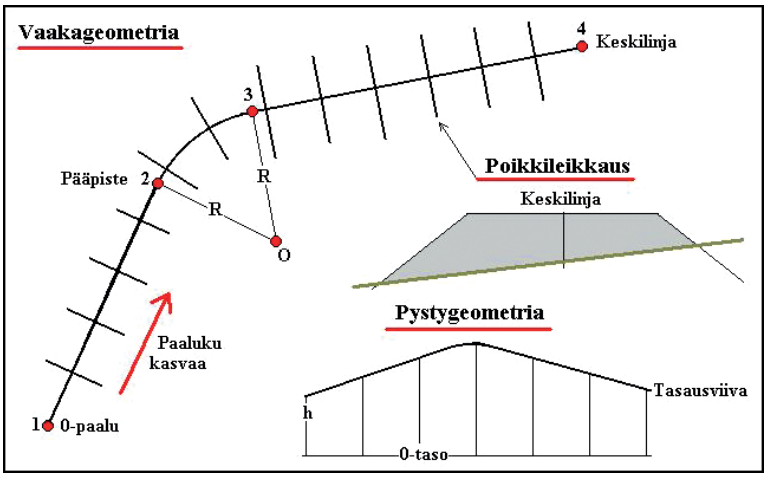
Pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämisessä on kyse määrämittauksista. On rahanarvoista tuntea tonttien pinta-alat ja rakentamisen yhteydessä siirrettävät maa- ja kalliomassat. Tilavuuslaskennan menetelmien ymmärtämisen näkökulmasta on tarpeellista tuntea mm. tien linjauksen geometriseen mitoitukseen liittyvät asiat, koska mitoituksen yhteydessä tulevat tutuiksi myös massojen ositteluun liittyvät perusasiat.

Nykyisen tietotekniikan käyttöön perustuvan rakennussuunnittelun näkökulmasta voidaan sanoa, että suunnitteluteknisessä laskennassa on kyse maaston ja suunnitelmien geometrisesta mallintamisesta ja näiden tietojen hyödyntämisestä merkintä- ja määrämittauksissa. (Kuva 66, s. 92.)

## 3.2 Linjauksen suunnittelu

### 3.2.1 Tien mittalinja

Tien mittalinja on tien keskilinja. Sen kulku kuvataan vaaka- ja pystytasossa. Rakennussuunnitelmiin liittyy poikkileikkauksia, jotka esittävät tien rakenteellisen mitoituksen. Vaakatasossa kuvataan tien vaakageometria. Sen kuvaamiseen liittyvät pääpisteet ja pääpistelaskenta. Pystytasossa puolestaan esitetään mittalinjan korkeus tasausviivan avulla. (Kuva 67.)



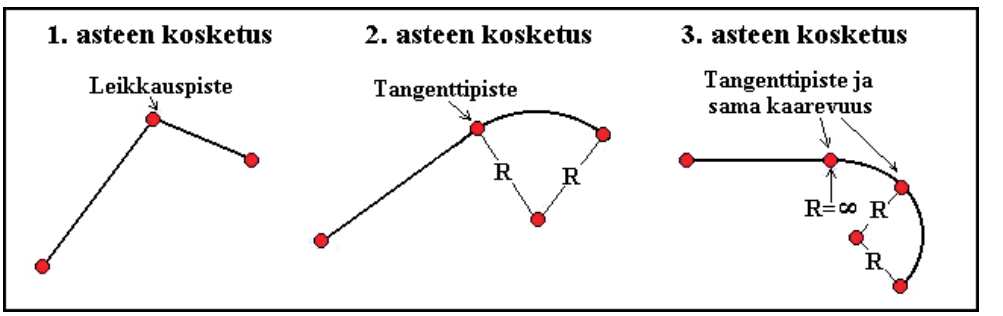

**KUVA 67** *Tien mittalinja on tien keskilinja. Sen kulku ja tien rakenteellinen mitoitus kuvataan pääpisteiden (kuvan pisteet 1-4), tasausviivan ja poikkileikkausten avulla.*

Poikkileikkaukset esittävät tien rakenteellisen mitoituksen. Poikkileikkauksia hyödynnetään rakentamiseen liittyvien massojen laskennassa. Poikkileikkaukset määritetään mittalinjalle tasavälein: usein niiden välimatka on 20 m. Poikkileikkausten ja muiden linjaukseen liittyvien kohteiden sijainti linjalla esitetään paaluluvun avulla. Paaluluku on linjan alusta (0-paalulta) linjaa pitkin mitattu matka.

### 3.2.2 Pääpistelaskenta

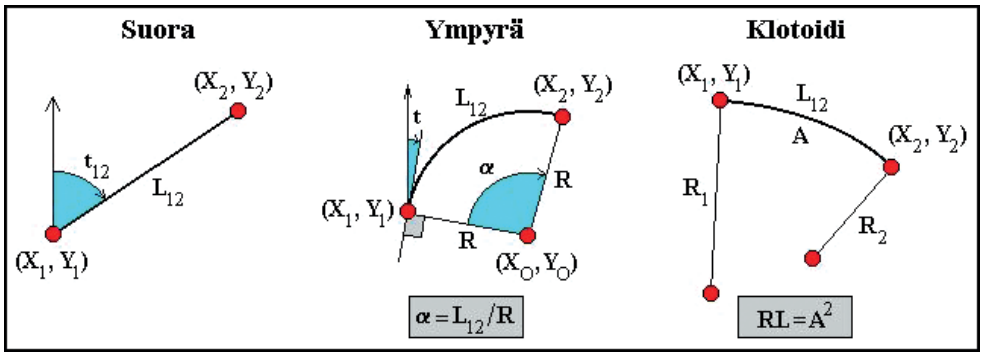
Pääpistelaskennassa määritetään tielinjan kulkua kuvaavien pääpisteiden koordinaatit ja linjan osien kaarevuus. Pääpiste on piste, jossa linjan kaksi osaa liittyvät toisiinsa tai linjan alku- tai loppupiste. Myös linjan kaarevan osan kaarevuuskeskipiste voidaan katsoa pääpisteeksi. Linjan osia kutsutaan elementeiksi. Elementti on kahden pääpisteen rajoittama linjan osa. Tien linjauksessa käytettävät elementit ovat joko suoria, ympyräkaaria tai klotoidin kaaria. Pääpisteiden välillä linjan kulun määrittää sen kaarevuus. Kaarevuuden määrittää kaarevuussäde ja kaarevuuden suunta. Voidaan esimerkiksi sopia, että kaarevuus on positiivinen, kun linja kaartuu kulkusuuntaan nähden oikealle. Linja sidotaan koordinaatistoon pakkopisteiden avulla. Ne ovat koordinaateiltaan tunnettuja pisteitä, joiden kautta linjan on kuljettava.

Tien linjauksessa elementit voivat liittyä toisiinsa joko ensimmäisen, toisen tai kolmannen kertaluvun kosketuksella (kuva 68). Ensimmäisen kertaluvun kosketuksessa viereisillä elementeillä on yhteinen piste. Toisen kertaluvun kosketuksessa elementeillä on myös yhteinen tangentti. Tällöin pääpiste on linjan tangenttipiste. Kolmannen kertaluvun kosketuksessa elementeillä on sekä yhteinen tangentti että sama kaarevuus. Kaaria, jotka voivat toteuttaa kolmannen kertaluvun kosketuksen, kutsutaan siirtymäkaariksi. Niiden kaarevuuden tulee olla jatkuvasti muuttuva. Klotoidin kaari on Suomessa normaalisti käytetty siirtymäkaari. Toinen maailmalla melko yleisesti käytetty siirtymäkaari on paraabeli. Kun elementin kaarevuus muuttuu jatkuvasti, muuttuu tiellä ajavan auton tai muun kulkuvälineen sivuttaiskiihtyvyys tasaisesti. Tämä on tärkeä ominaisuus turvallisuuden ja ajomukavuuden kannalta.




**KUVA 68** *Elementtien mahdolliset liitostavat. Suoran kaarevuussäde on ääretön ($R = \infty$).*

Pääpistelaskennan tavoitteena on, että linjaukseen kuuluvat elementit ovat täysin määrättyjä. Tällöin pääpisteiden koordinaatit sekä elementtien pituudet ja kaarevuudet tunnetaan. Laskennan alussa elementit, tai ainakin osa niistä, ovat vain osittain määrättyjä. Tällöin ne voivat olla koordinaatistoon sidottuja tai geometrialtaan määrättyjä, jolloin niiden kaarevuus ja pituus tunnetaan. (Kuva 69 ja taulukko 5.)




**KUVA 69** *Elementtien määrityssuureet.*

**TAULUKKO 5** *Elementtien määräytymisaste ja määrityssuureet. Klotoidi ei voi olla linjauksen suunnittelun alussa koordinaatistoon sidottu elementti.*

| Elementti | Täysin määrätty | Koordinaatistoon sidottu | Geometrialtaan määrätty |
|---|---|---|---|
| Suora | $X_1$, $Y_1$, $X_2$ ja $Y_2$ tai $X_1$, $Y_1$, $t_{12}$ ja $L_{12}$ | Kaksi pakkopistettä tai pakkopiste ja suunta | $L_{12}$ |
| Ympyräkaari | $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ ja R tai $X_1$, $Y_1$, t, R ja $L_{12}$ tai $X_o$, $Y_o$, t, R ja $L_{12}$ | Kaksi pakkopistettä ja R tai $X_o$, $Y_o$ ja R tai pakkopiste ja $X_o$, $Y_o$ | R ja $L_{12}$ tai R ja a tai $L_{12}$ ja a |
| Klotoidin kaari | $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$, $R_1$, $R_2$ ja A tai Helmertin muunnoksen parametrit $k_1$, $k_2$, $X_o$, $Y_o$ ja $R_1$, $R_2$ ja A | | $R_1$, $R_2$ ja A |

Laskennallinen kokonaisuus, jota pääpistelaskennassa käsitellään, on elementtiryhmä. Ryhmän ensimmäinen ja viimeinen elementti ovat pääelementtejä. Näitä yhdistävät elementit ovat sivuelementtejä. Pääelementti on aina koordinaatistoon sidottu. Se voi olla

- suora, joka on määritetty kahdella pakkopisteellä tai pakkopisteellä ja suunnalla
- ympyräkaari, jonka säde ja kaksi kehän pakkopistettä tunnetaan
- ympyräkaari, jonka säde ja kaarevuuskeskipiste tunnetaan.

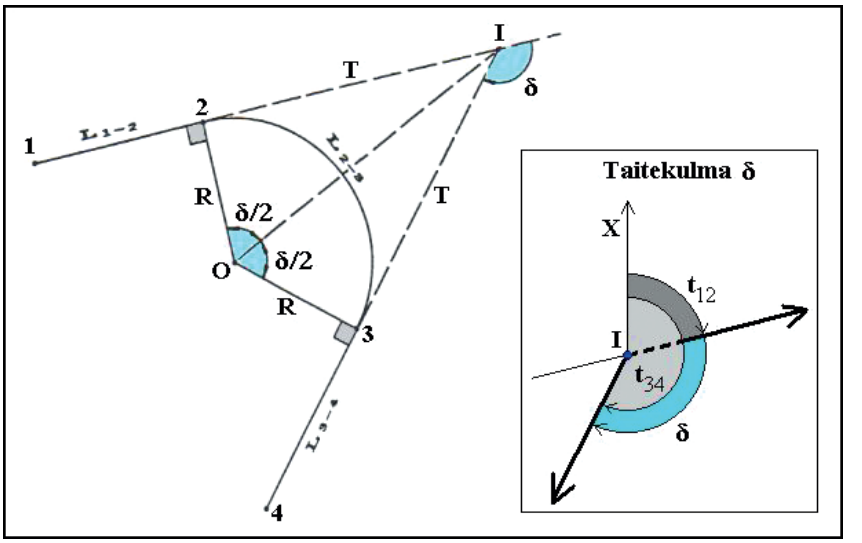
Sivuelementti voi olla määrätty tai määräämätön. Määrätty sivuelementti on geometrialtaan tunnettu eli sen kaarevuus ja pituus tunnetaan. Näin se voi olla

- suora, jonka pituus tunnetaan
- ympyräkaari, jonka säde ja kaarenpituus tunnetaan
- klotoidin kaari, jonka alku- ja loppusäde sekä parametri tunnetaan.

Määräämättömästä sivuelementistä tiedetään tätä vähemmän. Vähimmillään tiedetään vain, että kyseessä on joko suora, ympyräkaari tai klotoidin kaari. Klotoidin osalta on tarpeellista mainita, että tämän kirjan tekstissä ja tehtävissä sitä käytetään ainoastaan määrättynä sivuelementtinä.

### 3.2.3 Suora-ympyrä-suora -elementtiryhmä

Pääpistelaskennan perustapaus on suora-ympyrä-suora -elementtiryhmä. Siinä on kyse kahden suoran muodostaman kulman pyöristämisestä ympyrän kaarella. Tehtävänä on ratkaista tangenttipisteiden koordinaatit. (Kuva 70.)




**KUVA 70** *Suora-ympyrä-suora -elementtiryhmä. Suorat ovat koordinaatistoon sidottuja pääelementtejä. Suorat voidaan kiinnittää esim. pakkopisteiden 1, I ja 4 avulla. Ympyräkaari on määräämätön sivuelementti, jonka kaarevuussäde tunnetaan. Pisteet 1, 2, 3 ja 4 ovat elementtiryhmän pääpisteet. Tehtävänä on laskea tangenttipisteiden (2 ja 3) koordinaatit.*

Koska elementtiryhmän suorat ovat koordinaatistoon sidottuja pääelementtejä, tunnetaan niiden suuntakulmat ($t_{12} = t_{1I}$ ja $t_{34} = t_{I2}$). Suuntakulmien perusteella voidaan laskea taitekulma, joka kertoo kuinka paljon suunta muuttuu suorien leikkauspisteessä (I):

$$\delta = t_{34} - t_{12}, \tag{69}$$

jossa δ on taitekulma suorien leikkauspisteessä, $t_{12}$ on pääpisteiden 1 ja 2 kautta kulkevan suoran suuntakulma ja $t_{34}$ on pääpisteiden 3 ja 4 kautta kulkevan suoran suuntakulma.

Taitekulma on yhtä suuri kuin pyöristysympyrän kaarta vastaava keskuskulma (kuva 70, s. 96). Tämän tiedon perusteella voidaan laskea tangenttipisteiden (2 ja 3) etäisyys suorien leikkauspisteestä:

$$T = R\tan\left(\frac{\delta}{2}\right), \tag{70}$$

jossa $T$ on tangenttipisteiden etäisyys suorien leikkauspisteestä, $R$ on pyöristysympyrän säde ja δ on taitekulma suorien leikkauspisteessä.

Kun suorien leikkauspisteen (I) koordinaatit tunnetaan tai on laskettu, voidaan tangenttipisteiden koordinaatit laskea leikkauspisteeltä käsin geodeettisella päätehtävällä.

Pääpistelaskentaa kuuluu yleensä myös pääpisteiden paalulukujen eli linjaa pitkin mitattujen etäisyyksien laskenta. Suorien pituudet lasketaan koordinaateista. Pyöristysympyrän kaarenpituus on

$$L_{23} = 2\pi R\left(\frac{\delta}{400\ \text{gon}}\right), \tag{71}$$

jossa $L_{23}$ on pyöristysympyrän kaarenpituus, $R$ on pyöristysympyrän säde ja δ on taitekulma gooneina.

Jos pääpisteen 1 paaluluku on nolla, pääpisteiden paaluluvut ovat

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = L_1 + L_{12} \\ L_3 = L_2 + L_{23} \\ L_4 = L_3 + L_{34} \end{cases}, \tag{72}$$

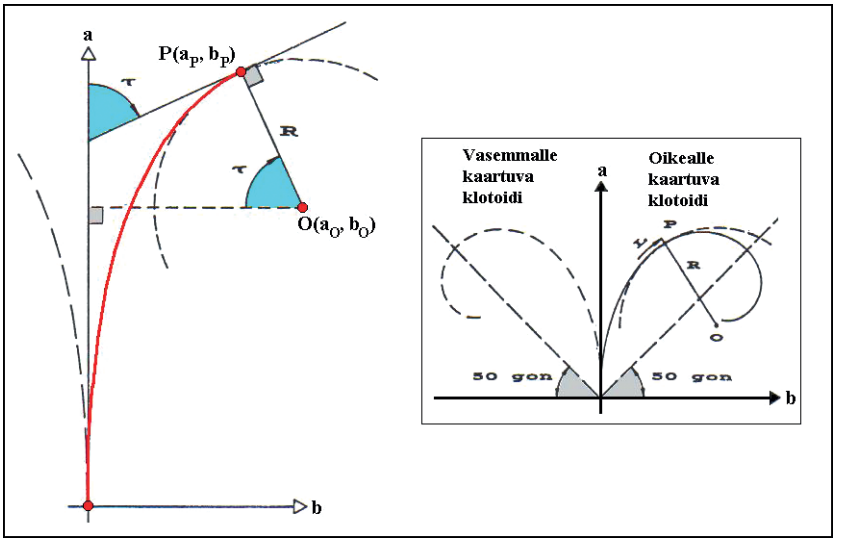
jossa $L_1$, $L_2$, $L_3$ ja $L_4$ ovat pääpisteiden paaluluvut, $L_{12}$ on suoran 1-2 pituus, $L_{23}$ on pyöristysympyrän kaarenpituus ja $L_{34}$ on suoran 3-4 pituus. Kaavojen (69) – (72) merkinnät vastaavat kuvan 70 (s. 94) merkintöjä.

### 3.2.4 Klotoidi

Klotoidi on kaarevuudeltaan jatkuvasti muuttuva matemaattinen käyrä. Se on spiraali, joka konvergoi 50 goonin kulmassa olevalla suoralla sijaitsevaa pistettä kohti (kuva 71). Klotoidin määritysyhtälö on

$$RL = A^2, \tag{73}$$

missä $R$ on kaarevuussäde tarkastelupisteessä, $L$ on kaarenpituus origosta mitattuna ja $A$ on klotoidin parametri, jonka mittayksikkö on metri. Klotoidin alkupisteessä (origossa, jossa $L$ = 0) kaarevuussäde on ääretön eli klotoidi alkaa suoralta. Tämän vuoksi klotoidia voidaan käyttää suoran ja ympyräkaaren välisenä siirtymäkaarena.




**KUVA 71** *Klotoidi on spiraali, jota käytetään siirtymäkaarena suoralta ympyrän kaarelle. Sen määrittelykoordinaatistona käytetään suorakulmaista ab-koordinaatistoa. Tästä koordinaatistosta voidaan siirtyä Helmertin muunnoksella suunnittelussa ja maastossa käytettävään koordinaatistoon. Tangenttikulma (τ) on tärkeä klotoidin koordinaattimuotoiseen esitykseen liittyvä suure.*

Klotoidia ei voida esittää koordinaattimuodossa suljetulla kaavalla, vaan koordinaatit lasketaan sarjakehitelmiä käyttäen. Tätä varten lasketaan ensiksi tangenttikulma, joka on tarkastelupisteeseen klotoidin kaarelle piirretyn tangentin ja a-akselin välinen kulma (kuva 71):

$$\tau = \frac{L^2}{2A^2}, \tag{74}$$

jossa $\tau$ on tangenttikulma radiaaneina tarkastelupisteessä, $L$ on kaarenpituus origosta mitattuna ja $A$ on klotoidin parametri.

Tarkastelupisteen (P, kuva 71, s. 96) koordinaatit voidaan laskea kaavoilla

$$\begin{cases} a_P = L(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \cdots) \\ b_P = L(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \cdots) \end{cases}, \tag{75}$$

joissa $a_P$ ja $b_P$ ovat tarkastelupisteen (P) koordinaatit klotoidin määrittelykoordinaatistossa, $L$ on kaarenpituus ja $\tau$ on tangenttikulma radiaaneina.

Koska klotoidi lasketaan ensivaiheessa omassa määrittelykoordinaatistossaan, tulee siitä siirtyä suunnittelussa ja maastossa käytettävään yleiseen koordinaatistoon Helmertin muunnoksella eli lineaarisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella. Muunnosparametrien laskemista varten saatetaan tarvita tarkastelupisteeseen liittyvän kaarevuusympyrän keskipisteen koordinaatteja, jotka ovat

$$\begin{cases} a_O = a_P - R\sin\tau \\ b_O = b_P + R\cos\tau \end{cases}, \tag{76}$$

jossa $a_O$ ja $b_O$ ovat tarkastelupisteeseen liittyvän ympyrän keskipisteen (O) koordinaatit, $a_P$ ja $b_P$ ovat tarkastelupisteen (P) koordinaatit, $R$ on kaarevuussäde ja $\tau$ on tangenttikulma radiaaneina. (Kuva 71, s. 98.)

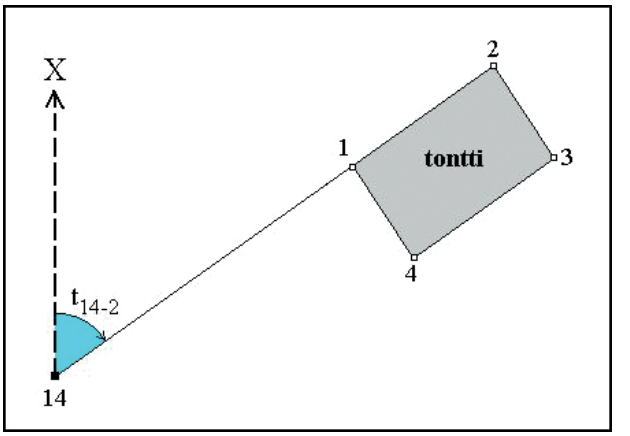
Yhteenvetona klotoidin laskennasta voidaan todeta, että

- klotoidin kaarta käytetään määrättynä sivuelementtinä, jolloin sen alku- ja loppukaarevuussäteet ($R_1$ ja $R_2$) ja parametri ($A$) tunnetaan
- tunnettujen tietojen perusteella lasketaan klotoidin kaaren alku- ja loppupisteet sekä niihin liittyvät kaarevuuskeskipisteet klotoidin määrittelykoordinaatistossa
- klotoidin kaari liitetään lineaarisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella suunnittelukoordinaatistoon.

Kaiken kaikkiaan klotoidin kaari on laskentateknisesti vaativa elementti käsitellä. Vaikka klotoidin määrittelyyhtälö (kaava 73, s. 98) on yksinkertainen, klotoidin koordinaattimuotoinen esitys perustuu sarjakehitelmiin (kaava 75) määrittelykoordinaatistossa. Laskennan lopuksi määrittelykoordinaatistosta pitää vielä siirtyä suunnittelussa ja mittauksessa käytettävään koordinaatistoon.

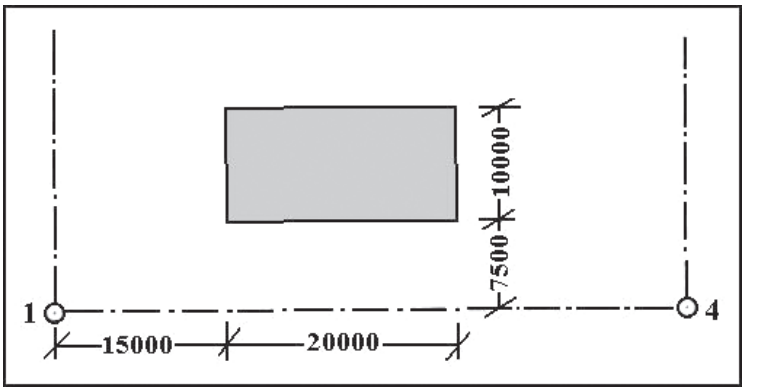
### 3.2.5 Tehtäviä

**63.** Laske kuvan suorakulmaisen tontin nurkkapisteiden koordinaatit, kun lähtötiedot ovat seuraavat: $X_{14}$ = 15481.950 m, $Y_{14}$ = 92576.500 m, $t_{14\text{-}2}$ = 61.7286 gon, $s_{14\text{-}1}$ = 110.000 m, $s_{1\text{-}2}$ = 50.000 m ja $s_{2\text{-}3}$ = 35.000 m (kuva 72).




**KUVA 72** *Tehtävä 63.*

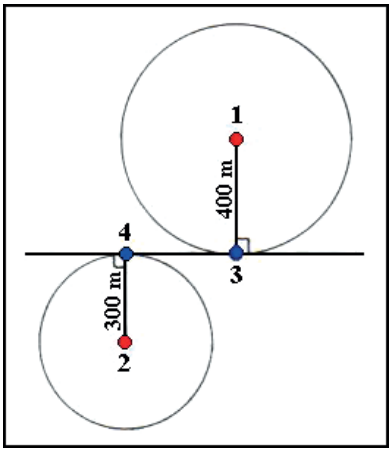
**64.** Laske oheisen piirroksen esittämän rakennuksen nurkkapisteiden koordinaatit. Rakennuksen pidempi sivu on yhdensuuntainen rajan 1-4 kanssa, rajapyykin 1 koordinaatit ovat $X_1$ = 1402.57 m ja $Y_1$ = 2310.15 m ja pyykin 4 koordinaatit ovat $X_4$ = 1404.98 m ja $Y_4$ = 2365.02 m. Piirroksessa mitoitus on esitetty millimetreinä. (Kuva 73.)




**KUVA 73** *Tehtävä 64.*

**65.** Ensimmäinen suora kulkee pisteen $X_1$ = 1120.45 m ja $Y_1$ = 2139.87 m kautta ja sen suuntakulma on 59.4592 gon. Toinen suora kulkee pisteen $X_2$ = 1011.29 m ja $Y_2$ = 2375.17 m kautta ja sen suuntakulma on 381.2973 gon. Laske suorien leikkauspisteen koordinaatit.

**66.** Laske viereisen kuvan ympyröiden yhteisen tangentin suuntakulma, pituus (matka $s_{34}$) ja tangenttipisteiden koordinaatit (kuva 74).

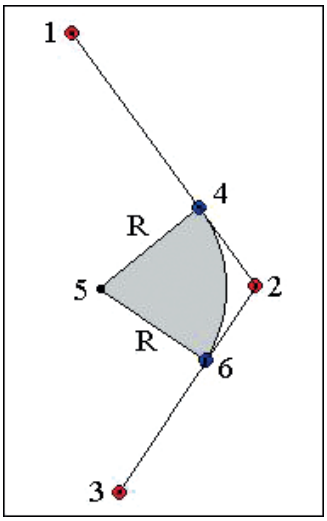



**KUVA 74** *Tehtävä 66.*

Ympyröiden keskipisteiden koordinaatit ja kaarevuussäteet ovat seuraavat:

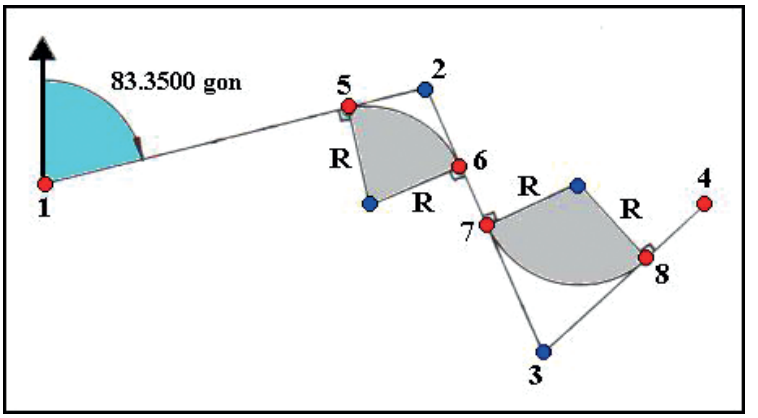
| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** | $R$ **/ m** |
|---|---|---|---|
| 1 | 998.244 | 1203.741 | 400.000 |
| 2 | 299.332 | 824.553 | 300.000 |

**67.** Viereisen kuvan suorien välinen kulma pyöristetään ympyrän kaarella, jonka säde on $R$ = 400 m. Laske pääpisteiden 4 ja 6 koordinaatit. Laske myös pääpisteiden 4, 6 ja 3 paaluluvut pääpisteestä 1 alkaen. Suorat on kiinnitetty kolmen pisteen avulla, jotka ovat 1 ($X_1$ = 2306.700 m, $Y_1$ = 1173.300 m), 2 ($X_2$ = 1706.500 m, $Y_2$ = 1666.700 m) ja 3 ($X_3$ = 1093.200 m, $Y_3$ = 1280.000 m). (Kuva 75.)



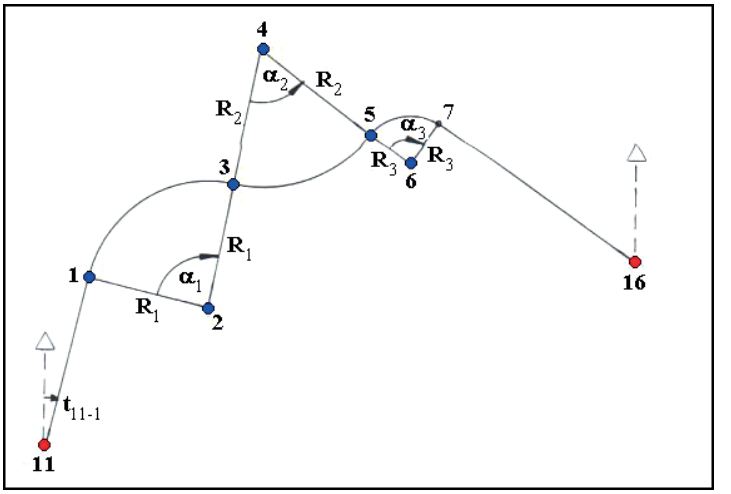

**KUVA 75** *Tehtävä 67.*

**68.** Tielinja muodostuu alla olevan kuvan mukaisesti kolmesta suorasta ja kahdesta saman säteisestä ympyrästä. Laske ympyröiden säde, kun pääpisteiden 6 ja 7 välinen matka on 100 m. Laske myös pääpisteiden 5, 6, 7, 8 ja 4 paaluluvut, kun pääpisteen 1 paaluluku on nolla. Lähtötietoina annetaan seuraavat tiedot: $t_{1\text{-}2}$ = 83.3500 gon, $s_{1\text{-}2}$ = 610.000 m, $t_{2\text{-}3}$ = 172.200 gon, $s_{2\text{-}3}$ = 451.000 m, $t_{3\text{-}4}$ = 50.0000 gon ja $s_{3\text{-}4}$ = 343.000 m. (Kuva 76.)




**KUVA 76** *Tehtävä 68.*

**69.** Laske seuraavan kuvan suora-ympyrä-ympyrä-ympyrä-suora -elementtiryhmässä tangenttien suuntakulmat pääpisteissä 3, 5 ja 7. Laske myös pääpisteiden paaluluvut pääpisteestä 11 alkaen. Lähtötietoina ovat $t_{11\text{-}1}$ = 16.1936 gon, $s_{11\text{-}1}$ = 51.500 m, $s_{7\text{-}16}$ = 68.800 m, $R_1$ = 35.700 m, $R_2$ = 40.000 m, $R_3$ = 14.300 m, $\alpha_1$ = 96.4587 gon, $\alpha_2$ = 72.1481 gon ja $\alpha_3$ = 97.6962 gon. (Kuva 77.)

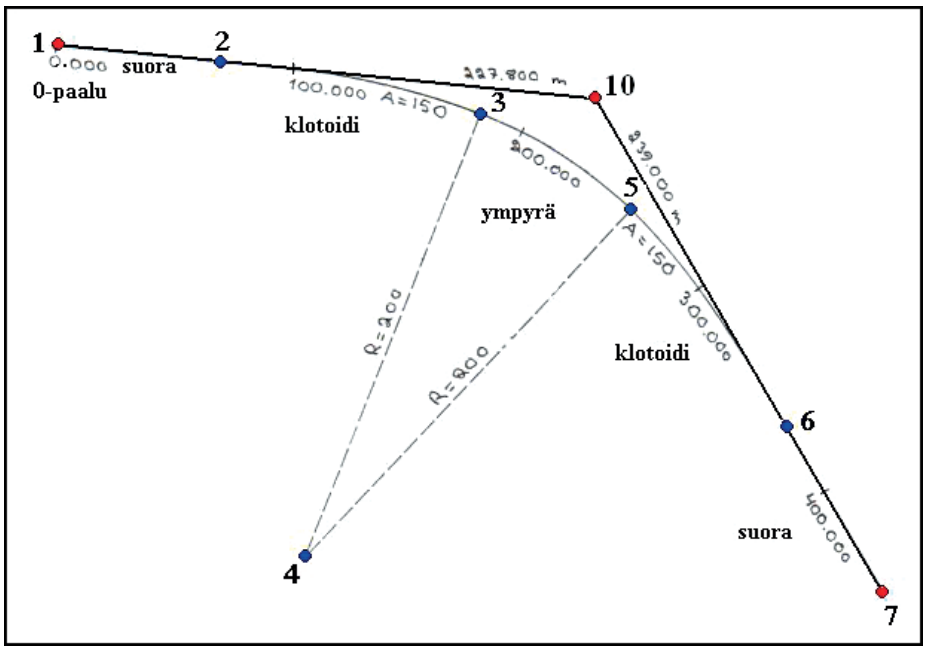



**KUVA 77** *Tehtävä 69: suora-ympyrä-ympyrä-ympyrä-suora -elementtiryhmä.*

**70.** Johda klotoidin kaarevuusympyrän keskipisteen koordinaattien laskentaan tarkoitetut kaavat (kaava 76, s. 99).

**71.** Laske seuraavan kuvan (78) esittämän suora-klotoidi-ympyrä-klotoidi-suora -elementtiryhmän pääpisteet, niiden paaluluvut ja paalupisteiden koordinaatit 100 metrin välein. Kummankin klotoidin parametri on $A$ = 150 m, ympyrän kaarevuussäde on $R$ = 200 m ja suorien pituudet ovat $s_{1\text{-}10}$ = 227.800 m ja $s_{7\text{-}10}$ = 239.000 m. Lisäksi tunnetaan pääpisteiden 1 ja 7 koordinaatit:

| Piste | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|
| 1 | 15703.270 | 23890.410 |
| 7 | 15465.195 | 24231.596 |




**KUVA 78** *Tehtävä 71: suora-klotoidi-ympyrä-klotoidi-suora -elementtiryhmä.*

## 3.3 Pinta-alojen määrittäminen

### 3.3.1 Geometristen kuvioiden pinta-alat

Tyypillisiä mittaus- ja kartoitustekniikkaan liittyviä pinta-alojen laskutehtäviä ovat tonttien alojen laskeminen ja erilaisten poikkileikkausten pinta-alojen laskeminen tilavuuslaskennan yhteydessä. Koska nykyisin maanmittauksessa ja rakentamisen suunnittelussa kohteiden sijainti esitetään pääasiassa koordinaatteina, on erityisen tärkeää tuntea koordinaattimuodossa esitettyjen kuvioiden pinta-alojen laskenta-periaatteet. Aluksi tarkastellaan kuitenkin tavallisimpien geometristen kuvioiden pinta-alojen laskukaavoja. Kolmion pinta-ala voidaan laskea esimerkiksi seuraavilla kaavoilla (kuva 79, s. 105):

$$A = \frac{1}{2}bh, \tag{77}$$

$$A = \frac{1}{2}b \ \sin\alpha, \tag{78}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(a+b+c) \\ A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{cases}. \tag{79}$$

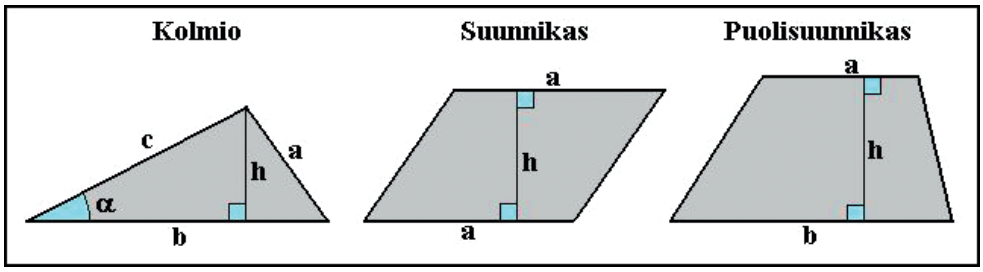
Kaavoissa (77) – (79) $A$ on kolmion pinta-ala, $a$, $b$ ja $c$ ovat sen sivut ja $h$ on sen korkeus. Suure $s$ on kolmion piirin puolikas, jonka vuoksi kaavaa (79) kutsutaan puolenpiirin kaavaksi. Kaava tunnetaan myös Heronin kaavana.

Suunnikkaan pinta-ala lasketaan kaavalla (80) ja puolisuunnikkaan pinta-ala saadaan kaavalla (81).

$$A = ah. \tag{80}$$

$$A = \frac{1}{2}h(a+b). \tag{81}$$

Kaavoissa $A$ on kuvion pinta-ala, $h$ on kuvion korkeus ja $a$ ja $b$ ovat korkeusjanaa vastaan kohtisuorien sivujen pituudet (kuva 79, s. 105).




**KUVA 79** *Kolmion, suunnikkaan ja puolisuunnikkaan osat.*

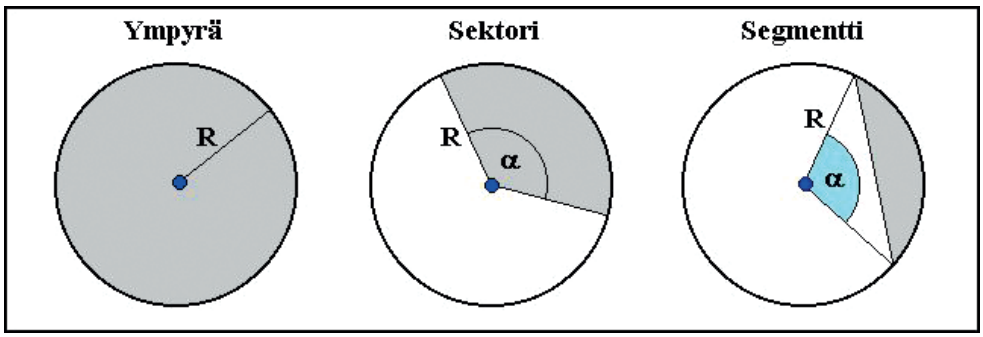
Kolmion ohella ympyrä on toinen geometrian peruskuviosta. Ympyrän ja sen osien alat voidaan laskea seuraavilla kaavoilla: kaava (82) antaa ympyrän, kaava (83) sektorin ja kaava (84) segmentin alan (kuva 80).

$$A = \pi R^2 . \tag{82}$$

$$A = \frac{1}{2}\alpha R^2 . \tag{83}$$

$$A = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha) . \tag{84}$$

Kaavoissa (82) – (84) $A$ on kuvion pinta-ala, $R$ on ympyrän säde ja $\alpha$ on sektorin tai segmentin määrittävä keskuskulma. Keskuskulman yksikkö näissä kaavoissa on radiaani.




**KUVA 80** *Ympyrän osat.*

### 3.3.2 Pinta-ala koordinaateista

Kuvion pinta-alan laskeminen suoraan koordinaateista on tärkeää, koska mittaus- ja suunnitelmatiedot ovat yleensä koordinaattimuodossa. Lähtöoletuksena on, että kuvion reunaviiva on murtoviiva ja laskettava kuvio on näin ollen monikulmio.

Yksinkertaisin monikulmio on kolmio, jonka alalle on helppo johtaa pinta-alan koordinaattimuotoinen laskentakaava. Jos oletetaan aluksi, että yksi nurkkapisteistä on sijoitettu koordinaatiston origoon (piste 3, kuva 81, s. 107), kolmion ala on

$$A = \frac{1}{2}(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \qquad (85)$$

Determinanttimuotoinen esitystapa on hyvä lähtökohta, kun kirjoitetaan yleisessä muodossa oleva pinta-alan laskentakaava kolmiolle. Kun ajatellaan, että kolmion kolmas piste sijoitetaan origoon vähentämällä sen koordinaatit muiden pisteiden koordinaateista, on kolmion pinta-ala yleisessä muodossa

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 \\ X_2 - X_3 & Y_2 - Y_3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad . \qquad (86)$$

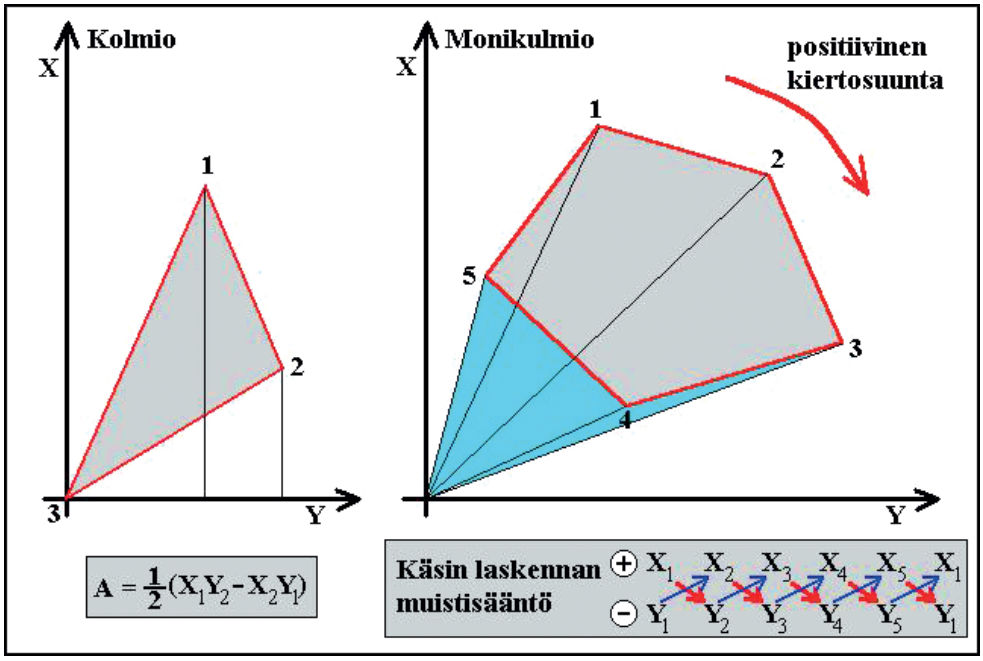
$$A = \frac{1}{2}\left[(X_1 - X_3)(Y_2 - Y_3) - (X_2 - X_3)(Y_1 - Y_3)\right]$$

Kaavoissa (85) ja (86) kolmion nurkkapisteiden koordinaatit ($X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$, $X_3$, $Y_3$) tulee antaa myötäpäivään kiertäen. Tällöin pinta-ala on positiivinen. Jos kiertosuunnasta ei välitä, tulee kaavojen ympärillä käyttää itseisarvomerkkejä. Negatiivinenkin pinta-ala on siis itseisarvoltaan oikea.

Kun tarkastellaan monikulmion pinta-alan laskemista, voidaan kolmiota käyttää lähtökohtana, sillä monikulmio voidaan aina jakaa kolmioihin. Kuvassa 81 (s. 107) jako on suoritettu origosta katsoen, jolloin jokaisen osakolmion ala voidaan laskea kaavalla (85). Monikulmion pinta-alan laskukaava voidaan johtaa lopulta muotoon

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i(Y_{i+1} - Y_{i-1})\right], \qquad (87)$$

Maanmittaustekniikassa tämä kaava tunnetaan yleisesti Gaussin kolmiokaavana. Kaavassa $A$ on monikulmion ala, $X_i$ ja $Y_i$ ovat nurkkapisteiden koordinaatit kuvio myötäpäivään kiertäen ja $n$ on nurkkapisteiden lukumäärä. Alaindeksien käytössä on huomioitava, että kun $i = 1$, niin $i - 1 = n$ ja kun $i = n$, niin $i + 1 = 1$.




**KUVA 81** *Kolmion ja monikulmion pinta-ala koordinaateista. Kolmion kolmas piste (piste 3) on sijoitettu koordinaatiston origoon. Kun kuvio kierretään myötäpäivään, antavat laskentakaavat positiivisen pinta-alan. Käsin laskentaa saattaa helpottaa kuvassa oleva koordinaattitulojen laskentaan liittyvä muistisääntö.*

Jos edellisen summakaavan haluaa kirjoittaa auki, esimerkiksi viisikulmion ($n = 5$) ala voidaan laskea seuraavasti:

$$A = \frac{1}{2}\left[X_1(Y_2 - Y_5) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_4 - Y_2) + \right.$$
$$\left. + X_4(Y_5 - Y_3) + X_5(Y_1 - Y_4)\right] \qquad (88)$$

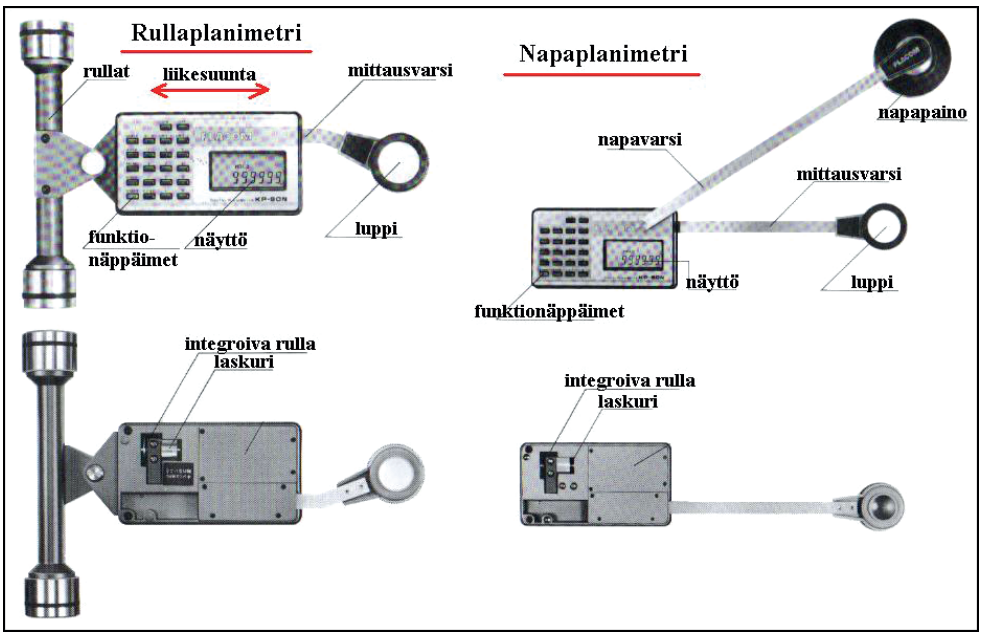
$$\Leftrightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}(X_1Y_2 + X_2Y_3 + X_3Y_4 + X_4Y_5 + X_5Y_1 +$$
$$- Y_1X_2 - Y_2X_3 - Y_3X_4 - Y_4X_5 - Y_5X) \qquad (89)$$

Jos muistamiseen on tarvetta, kaava (89) tarjoaa käsin laskentaan melko helposti muistettavan kaavan. Sen laskentajärjestys voidaan esittää yksinkertaisena kaaviona (kuva 81).

### 3.3.3 Pinta-alojen mittaaminen

Kaikki pinnat eivät ole säännöllisiä geometrisia kuvioita. Epäsäännöllisten kuvioiden pinta-alat joudutaan mittaamaan tai arvioimaan. Pinta-alan mittaus voidaan tehdä kuvalta tai kartalta joko planimetrillä (kuva 82) tai tietokoneohjelman avulla digitoimalla. Planimetri on toimintaperiaatteeltaan vanha mittauskoje. Sen toimintaperiaatetta voidaan kutsua mekaaniseksi integroinniksi. Mittaus planimetrillä tapahtuu niin, että kojeen piirroskärjellä tai lupilla seurataan kuvion reunaviivaa myötäpäivään kiertäen valitusta lähtöpisteestä alkaen ja siihen palaten.




**KUVA 82** *Kaksi digitaalista planimetriä. Vasemmalla on rullaplanimetri ja oikealla napaplanimetri. Mitattavan kuvion reunaviiva kierretään lupilla (mittausvarressa olevalla suurennuslasilla) viivaa tarkasti seuraten.*

Nykyaikaiset planimetrit ovat digitaalisia kojeita. Niihin voidaan asettaa mitattavan kuvion mittakaava ja haluttu mittayksikkö. Kuvion mittakaava voi olla kahdessa kohtisuorassa suunnassa toisistaan poikkeava. Monissa kojemalleissa on mahdollista mitata suorasivuisten kuvioiden alat vain nurkkapisteet mittaamalla. Planimetreillä voidaan mitata myös viivojen pituuksia. Tietotekniikan kehittymisen myötä planimetrien käyttö pinta-alojen mittauksessa ja muissa vastaavissa tehtävissä on oleellisesti vähentynyt.

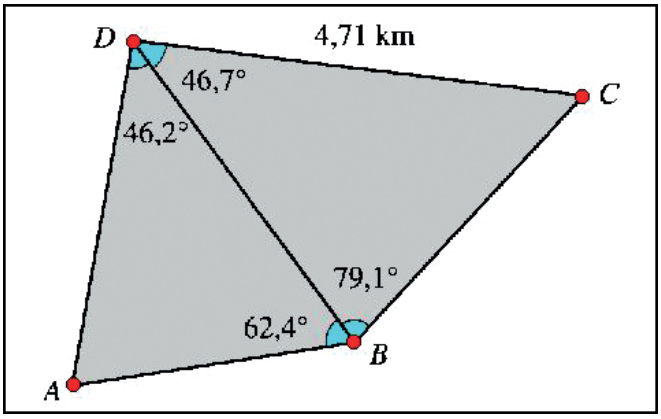
### 3.3.4 Tehtäviä

**72.** Ilmoita 250606 m² a) aareina, b) hehtaareina, c) neliökilometreinä.

**73.** Inarinjärven pinta-alaksi mitattiin 5.0 cm² kartalta, jonka mittakaava on 1:1 500 000. Kuinka suuri on järven pinta-ala luonnossa?

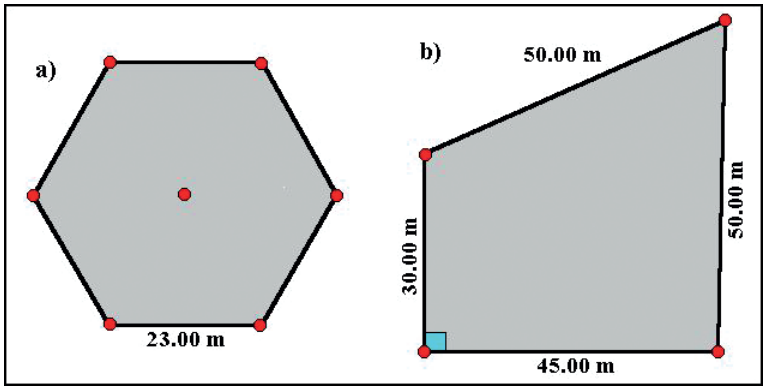
**74.** Laske kolmion pinta-ala, kun sen sivujen pituudet ovat 67.45 m, 50.61 m ja 70.98 m.

**75.** Laske viereisen kuvan nelikulmion pinta-ala (kuva 83).




**KUVA 83** *Tehtävä 75.*

**76.** Laske seuraavan kuvan a) säännöllisen kuusikulmio pinta-ala ja b) nelikulmion pinta-ala. Miten säännöllisen kuusikulmio piirretään? (Kuva 84.)




**KUVA 84** *Tehtävä 76: kaksi monikulmiota.*

**77.** Laske ympyrän segmentin pinta-ala, kun ympyrän säde on 50.52 m ja segmentin kaarta vastaava keskuskulma on 59.795 gon.

**78.** Johda kolmion pinta-alan laskentakaava, kun laskenta suoritetaan koordinaateista (kaava 86, s. 106).

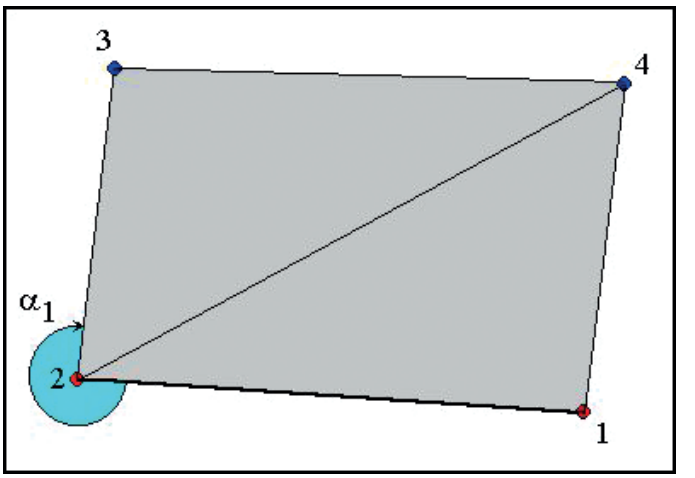
**79.** Laske kolmion pinta-ala, kun sen kärkipisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| A | 3738.519 | 6424.256 |
| B | 4153.116 | 6031.496 |
| C | 3739.660 | 6156.235 |

**80.** Piirrä monikulmio ja laske sen pinta-ala, kun nurkkapisteet ovat:

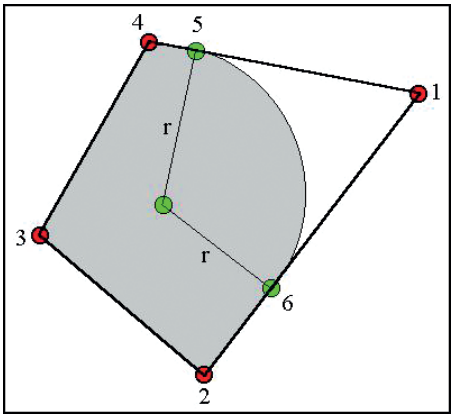
| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| 1 | 1318.598 | 2213.615 |
| 2 | 1241.518 | 2216.207 |
| 3 | 1178.482 | 2139.988 |
| 4 | 1230.343 | 2125.725 |
| 5 | 1267.401 | 2169.541 |

**81.** Laske oheisen kuvan tontin rajapyykkien 3 ja 4 koordinaatit ja tontin pinta-ala, kun $X_1$ = 974.886 m, $Y_1$ = 1645.910 m, $X_2$ = 989.436 m, $Y_2$ = 1530.345 m, $\alpha_1$ = 307.5713 gon, $s_{23}$ = 75.069 m, $s_{24}$ = 150.014 m ja $s_{14}$ = 80.055 m (kuva 85).




**KUVA 85** *Tehtävä 81.*

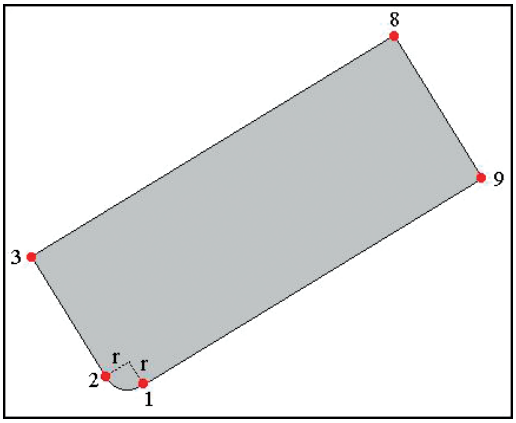
**82.** Kuvan tontin raja jouduttiin määrittelemään kadunrakentamisen yhteydessä uudelleen. Tontin nurkka 1 pyöristettiin ympyrän kaarella, jonka säde $r$ oli 35 m. Laske uuden tontin pyykkien 5 ja 6 koordinaatit ja tontin pinta-ala, kun vanhojen pyykkien koordinaatit olivat seuraavat. (Kuva 86.)




**KUVA 86** *Tehtävä 82.*

| **Pyykki** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 1 | 3517.697 | 5966.415 |
| 2 | 3455.904 | 5929.115 |
| 3 | 3485.600 | 5889.209 |
| 4 | 3528.662 | 5908.084 |

**83.** Laske kuvan tontin pinta-ala, kun pyykkien 1 ja 2 välisen rajan kaarevuussäde $r$ on 15 m ja pyykkien koordinaatit ovat seuraavat (kuva 87).




**KUVA 87** *Tehtävä 83.*

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 1 | 15893.822 | 92369.451 |
| 2 | 15900.851 | 92349.436 |
| 3 | 15986.309 | 92308.400 |
| 8 | 16114.616 | 92575.600 |
| 9 | 16015.637 | 92623.130 |

**84.** Tontin rajapyykit mitattiin säteittäisellä mittauksella. Asemapisteen koordinaatit olivat $X$ = 6675107.237 m ja $Y$ = 2552856.284 m ja asemapisteeltä mitatut suuntakulmat ja vaakaetäisyydet tontin rajapyykeille olivat seuraavat:

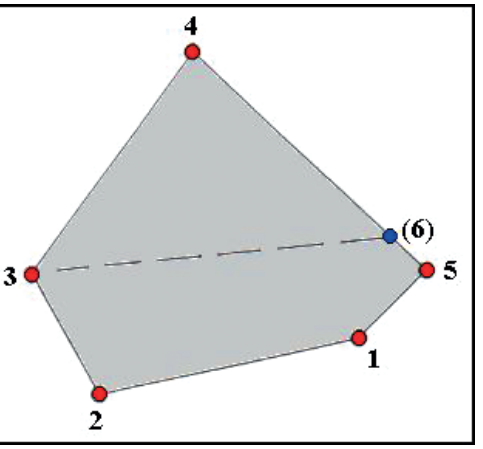
| Pyykki | suuntakulma / gon | vaakamatka / m |
|---|---|---|
| 1 | 317.7780 | 41.502 |
| 2 | 58.3414 | 80.047 |
| 3 | 117.7602 | 95.390 |
| 4 | 218.9824 | 58.982 |

Piirrä tontti mittakaavaan 1:1 000.
Laske pyykkien koordinaatit ja tontin ala koordinaateista.
Laske tontin ala käyttämättä hyväksi koordinaatteja, esim. jakamalla tontti kolmioihin ja laskemalla kolmioiden alat.

**85.** Seuraavan kuvan tontin pyykistä 3 lähtien käydään raja, joka jakaa tontin kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. Mitkä ovat uuden rajan toiseen päätepisteeseen tulevan pyykin 6 koordinaatit? (Kuva 88.)

**Koordinaatit:**

| pyykki | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|
| 1 | 3158.606 | 4562.953 |
| 2 | 3144.850 | 4503.722 |
| 3 | 3172.441 | 4488.367 |
| 4 | 3223.605 | 4524.196 |
| 5 | 3174.286 | 4578.064 |




**KUVA 88** *Tehtävä 85: tontin jakaminen kahtia.*

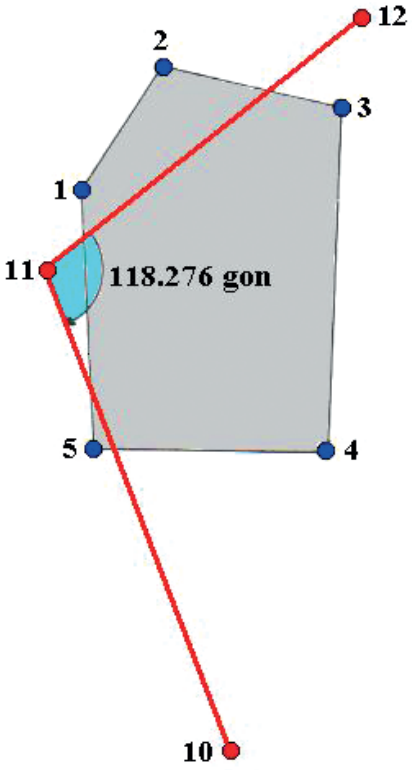
**86.** Tontin nurkkapisteet mitattiin suorakulmaisella mittauksella seuraavan kuvan esittämällä tavalla kartoituslinjoilta 11–12 ja 11–10. Mikä on tontin pinta-ala?

**Kartoituslinja 11-12:**

| piste | a (m) | b (m) |
|---|---|---|
| 1 | 8.27 | -4.26 |
| 2 | 23.16 | -9.02 |
| 3 | 35.64 | 6.30 |

**Kartoituslinja 11-10:**

| piste | a (m) | b (m) |
|---|---|---|
| 4 | 29.61 | -21.53 |
| 5 | 20.14 | 2.08 |




**KUVA 89** *Tehtävä 86: suorakulmaisten mittausten yhdistäminen ja tontin pinta-alan laskeminen.*

**87.** Arvioi kuvan perusteella Lapin läänin pinta-ala (kuva 90).

**KUVA 90** *Tehtävä 87: kuvion pinta-alan arviointi.*

## 3.4 Tilavuuksien määrittäminen

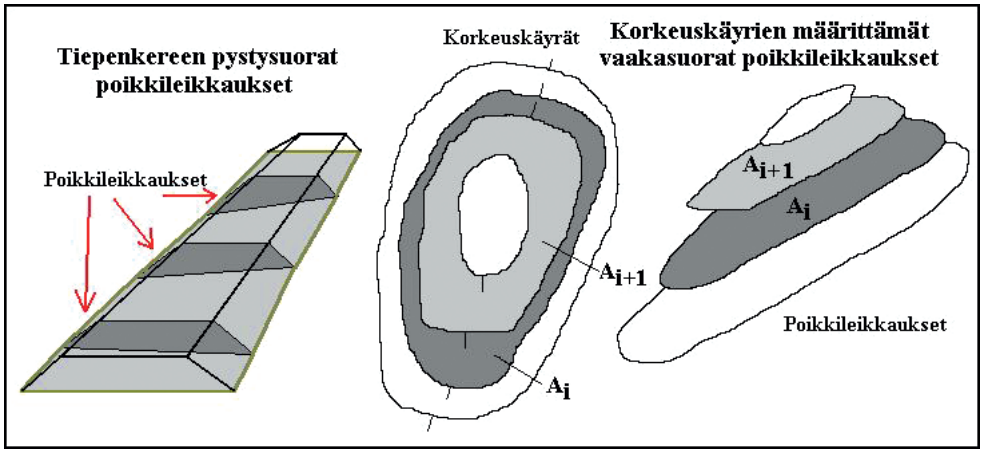
### 3.4.1 Tilavuuslaskennan periaatteet

Mittaustekniikan yhteydessä tilavuuslaskenta liittyy tavalla tai toisella rakentamiseen. Tässä yhteydessä tilavuuslaskennasta käytetään usein nimitystä massalaskenta, koska tilavuuslaskennan tehtävät liittyvät maarakentamisen töissä maa- ja kalliomassojen käsittelyyn. Tilavuuslaskenta on luonteeltaan selkeästi arviointia, jossa suhteessa se eroaa monista muista geodeettisen laskennan osa-alueista. Tilavuuslaskennan luonne johtuu pohjimmiltaan laskettavien massojen mallintamisen ongelmista, mutta myös laskentamenetelmien ominaisuuksista.

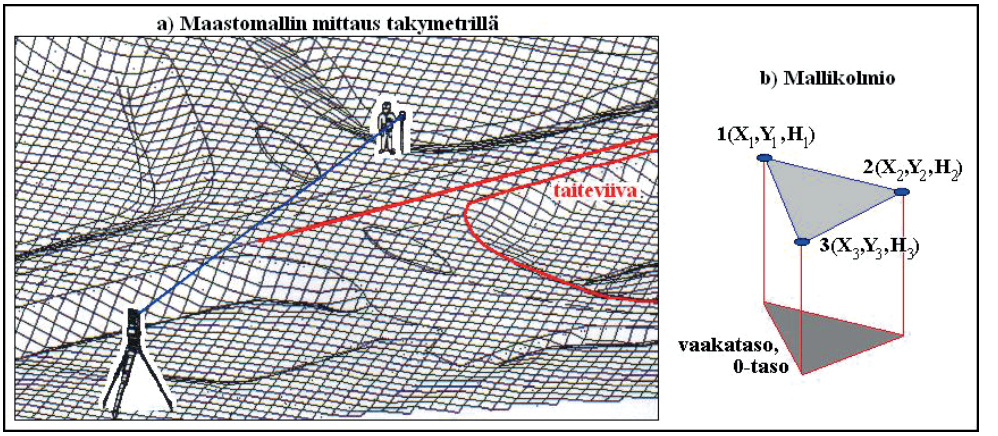
Tilavuuslaskennassa yhdistetään usein mittaus- ja suunnitelmatietoja. Mittaustiedot ovat maanpinnan korkeuksia joko hajapisteinä, säännöllisen ruutuverkon pisteinä, korkeuskäyrinä tai pystysuorina poikkileikkauksina. Hajapisteinä tai säännöllisen ruutuverkon pisteinä mitatuista korkeuksista voidaan muodostaa mittauskohteen maastomalli. Näin tehdään erityisesti tietotekniikkaan perustuvassa laskennassa. Suunnitelmatiedot ovat periaatteessa samanlaisia kuin maastotiedot, mutta ne yleensä rajaavat laskettavan tilavuuden matemaattisina pintoina. (Kuvat 91 ja 92, s. 116.)

Tilavuuslaskentaan liittyy monenlaisia ongelmia. Jo lähtökohta on ongelmallinen, koska laskettavien massojen muoto kuvataan vain tietyissä kohdissa. Lisäksi massat eivät muodosta täsmällisiä matemaattisia kappaleita, jolloin niille ei ole tarkkoja tilavuuskaavoja. Tämä koskee erityisesti maastopintojen määrittämiä massoja. Tilavuuslaskennassa joudutaankin käyttämään erilaisia laskentakaavoja ja –menetelmiä, jotka antavat toisistaan jossain määrin poikkeavia tuloksia. Tilavuuslaskija joutuukin harkitsemaan laskennan vaihtoehtoja ja valitsemaan laskentatilanteeseen parhaiten sopivan menetelmän.

Perinteisessä tilavuuslaskennassa määritettävä massa jaetaan osiin pysty- tai vaakatason suuntaisilla poikkileikkauksilla (kuva 91). Poikkileikkausten pinta-alat määritetään ja niiden perusteella arvioidaan tilavuus tilanteeseen parhaiten sopivalla laskentamenetelmällä. Tietokonelaskennassa voidaan hyödyntää maastomallin perusteella muodostettuja poikkileikkauksia, kuten perinteisessä tilavuuslaskennassa, mutta maastomallia voidaan hyödyntää myös suoraan. Tällöin laskenta perustuu mallikolmioiden muodostamiin kolmioprismoihin (kuva 92, s. 116).




**KUVA 91** *Perinteinen tilavuuslaskenta perustuu poikkileikkauksiin. Muodoltaan pitkät kohteet, kuten tiepenkereet, jaetaan osiin pystysuoria poikkileikkauksia käyttäen. Laaja-alaiset kohteet on tarkoituksenmukaista jakaa osiin vaakasuoria poikkileikkauksia käyttäen. Niiden muodostamisen lähtökohtana voivat olla muun muassa korkeuskäyrät.*




**KUVA 92** *Nykyaikainen tietotekniikkaan tukeutuva tilavuuslaskenta perustuu maastomalliin, joka on yleensä kolmioverkkomalli. Kuvassa (a) on kuitenkin neliöverkko. Kolmioverkko muodostetaan kolmioimalla mitatut korkeuspisteet. Kolmiointia ohjataan taiteviivojen avulla. Tilavuuslaskentaa varten mallin avulla voidaan muodostaa alueen korkeuskäyrät tai pystysuorat poikkileikkaukset. Tilavuuslaskennassa voidaan käyttää myös suoraan mallikolmioiden (b) muodostamia kolmioprismoja.*

### 3.4.2 Katkaistun pyramidin tilavuus

Seuraavissa luvuissa esitellään tilavuuslaskennassa käytettyjä kaavoja ja menetelmiä. Lähtökohtana ovat sellaiset matemaattiset muodot ja kappaleet, joita rakentamiseen liittyvissä tehtävissä voi esiintyä. Aluksi tarkastellaan katkaistua pyramidia tai katkaistua kartiota, sillä samat kaavat pätevät kummallekin kappaleelle. Pyramidin särmät leikkaavat samassa pisteessä ja sen sivutahkot ovat tasoja. Kun tämä pinta leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, muodostuu katkaistu pyramidi. Muodostuvat poikkileikkauspinnat ovat yhdenmuotoisia ja sivutahkot ovat tasoja ja puolisuunnikkaita. (Kuva 93, s. 117.)

Aluksi annetaan pyramidin (tai kartion) tilavuuskaava

$$V = \frac{1}{3} Ah, \tag{90}$$

jossa $V$ on pyramidin tilavuus, $A$ on sen pohjan pinta-ala ja $h$ on sen korkeus.

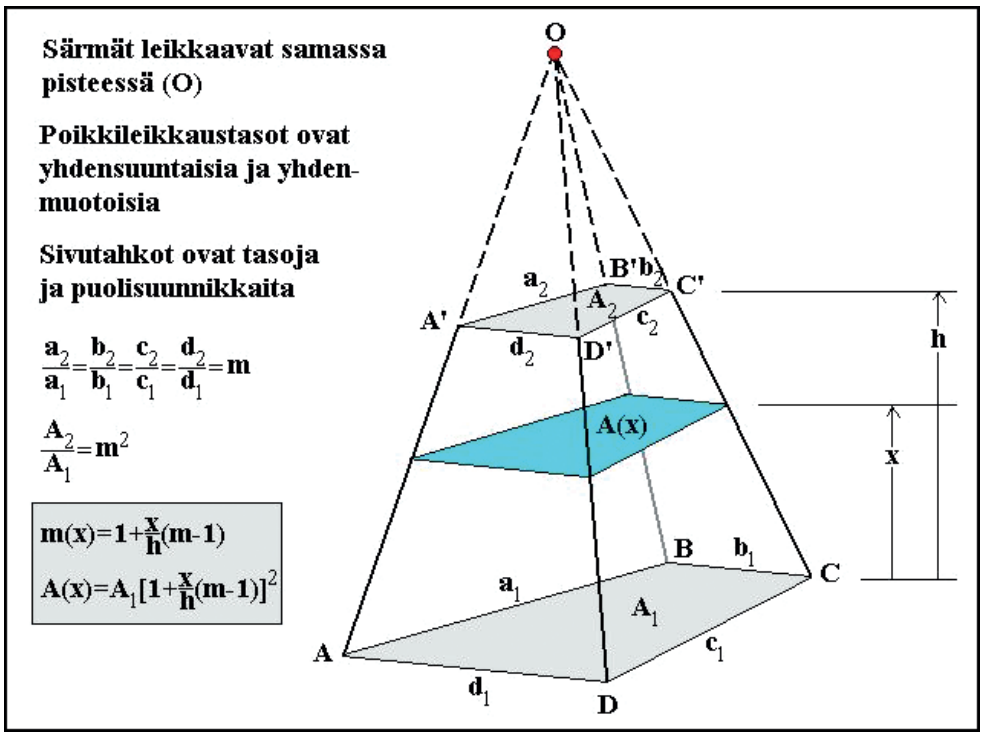
Tilavuuskaavat ovat johdettavissa integroimalla. Seuraavassa tutkitaan tilavuuskaavojen johtoon liittyen esimerkkinä katkaistun pyramidin tilavuuskaavaa, joka on käyttökelpoinen tilavuuslaskennan kaava monissa laskentatilanteissa. Katkaistun pyramidin tilavuus voidaan laskea määrättynä integraalina seuraavasti (kuva 93, s. 117):

$$\begin{cases} m(x) = 1 + \dfrac{x}{h}(m-1) \\ A(x) = A_1\left[1 + \dfrac{x}{h}(m-1)\right]^2 \cdot \\ V = \displaystyle\int_0^h A(x)dx \end{cases} \tag{91}$$

Integroinnin tulos on katkaistun pyramidin (ja kartion) tilavuuskaava:

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)\,. \tag{92}$$

Kaavoissa (91) ja (92) $m$ ja $m(x)$ on mittakaavaluku, joka kuvaa poikkileikkaustasojen sivujen suhdetta, $x$ on poikkileikkauksen etäisyys pohjatasosta, $h$ on katkaistun pyramidin korkeus, $A(x)$ on poikkileikkauksen ala etäisyydellä $x$, $V$ on tilavuus, $A_1$ on katkaistun pyramidin pohjatason ala ja $A_2$ on sen yläpinnan ala. Kaavan johtoon liittyvät merkinnät vastaavat kuvan 93 merkintöjä.




**KUVA 93** *Katkaistun pyramidin määrittely ja poikkileikkauksen pinta-alan $A(x)$ matemaattinen mallintaminen tilavuuden laskentakaavan johtoa varten. Suuretta $m$, joka esittää poikkileikkaustasojen sivujen suhteen, voidaan kutsua mittakaavaksi.*

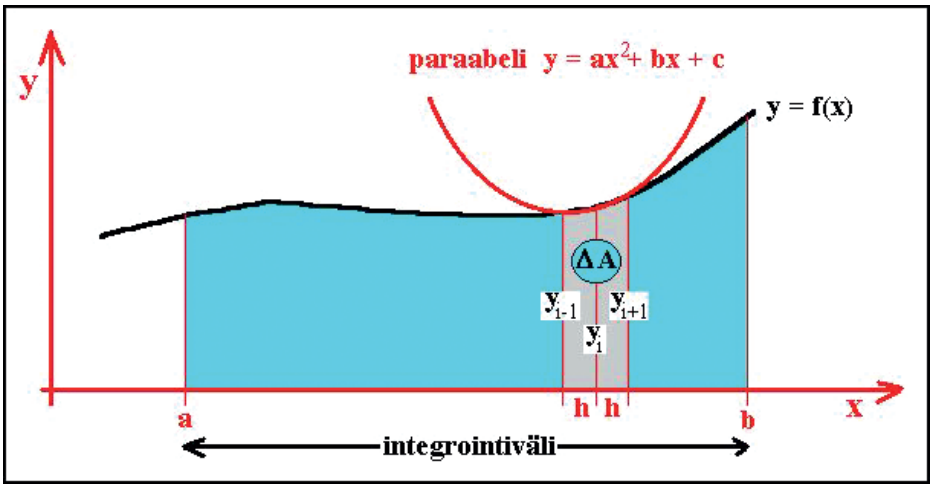
### 3.4.3 Simpsonin menetelmä

Tilavuuslaskennassa käytetään usein Simpsonin kaavaksi kutsuttua menettelyä. Siinä ei ole kyse minkään tietyn kappaleen tilavuuskaavasta vaan numeerisesta integrointimenetelmästä, jossa integrointiväli jaetaan tasamittaisiin osiin ($n$ kappaletta, missä $n$ on parillinen luku). Ajatellaan aluksi pinta-alan laskemista (kuva 94). Integrointi suoritetaan tarkastelemalla kolmea perättäistä jakopistettä, joiden välillä integroitavaa funktiota approksimoidaan paraabelilla. Jakopisteiden rajaaman alueen pinta-ala on

$$\Delta A = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}), \qquad (93)$$

jossa $\Delta A$ on tarkasteltavan osa-alueen pinta-ala, $y_{i-1}$, $y_i$ ja $y_{i+1}$ ovat perättäisten jakopisteiden korkeudet ja $h$ on jakopisteiden välimatka.

Simpsonin menetelmää voidaan käyttää mm. pinta-alojen (jos $y$ on kuvion korkeus) ja tilavuuksien laskentaan (jos $y$ on poikkileikkauksen ala). Se soveltuu monenlaisiin tilanteisiin ja antaa täsmälleen oikeita tuloksia, jos integroitava funktio on toisen asteen polynomi eli muotoa $y = f(x) = ax^2+bx+c$. Tilavuuslaskennassa saadaan oikeita tuloksia, jos kappaleen poikkileikkauspinta-ala muuttuu kappaleen läpi kuljettaessa toisen asteen funktiona. Näin ollen Simpsonin kaava antaa oikeita tilavuuksia muun muassa pallolle, ellipsoidille, pyörähdysparaboloidille, kartiolle, pyramidille ja vastaaville katkaistuille kappaleille. Simpsonin menetelmä soveltuukin hyvin moniin laskentatilanteisiin.




**KUVA 94** *Simpsonin menetelmä pinta-alan laskennassa. Laskettava ala on integrointivälin [a, b], käyrän y = f(x) ja x-akselin rajaama alue. Menetelmässä integrointiväli jaetaan tasamittaisiin osiin (n kappaletta, n on parillinen luku) ja arvioidaan kolmen perättäisen jakopisteen väliin jäävä ala (ΔA) approksi-moimalla alkuperäistä funktiota paraabelin avulla. Jos y tarkoittaa poikkileikkauksen pinta-alaa, laskennan tuloksena saadaan kappaleen tilavuus.*

### 3.4.4 Kiilan tilavuus

Kiilan muotoiset massat ovat hyvinkin mahdollisia erilaisissa maarakenteissa. Kiilalla on suorakaiteen muotoinen pohja, joka kapenee määrätyn levyiseksi kärjeksi (kuva 95). Sen erikoistapauksena voidaan tarkastella tasalevyistä kiilaa. Yleisesti kiilan tilavuus voidaan laskea kaavalla

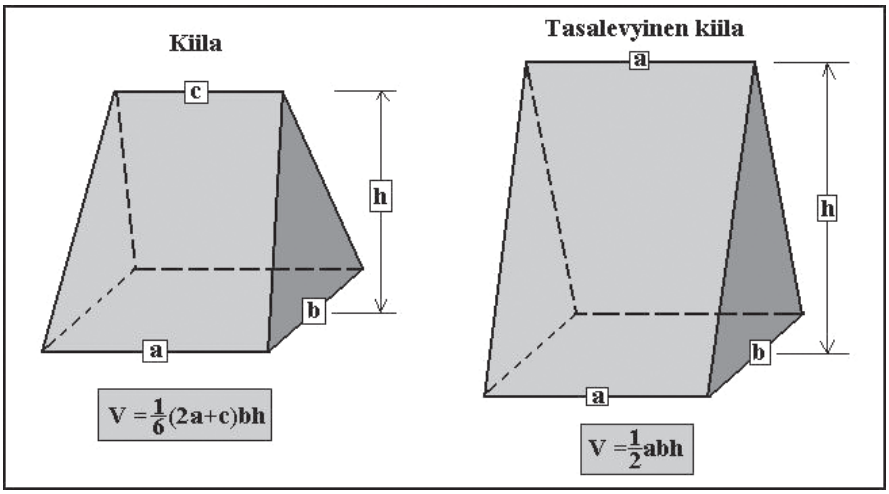
$$V = \frac{1}{6}(2a + c)bh, \tag{94}$$

jossa $V$ on kiilan tilavuus, $a$ on sen pohjan leveys, $b$ on sen pohjan korkeus, $c$ on kärjen leveys ja $h$ on kiilan korkeus.

Jos kiila on tasalevyinen (tällöin $c = a$), kiilan tilavuus on

$$V = \frac{1}{2}abh = \frac{1}{2}Ah, \tag{95}$$

jossa $V$ on kiilan tilavuus, $a$ on sen leveys, $b$ on sen pohjan korkeus, $h$ on kiilan korkeus ja $A$ on pohjan pinta-ala (= $ab$).




**KUVA 95** *Kiilan ja tasalevyisen kiilan mitat ja tilavuudet.*

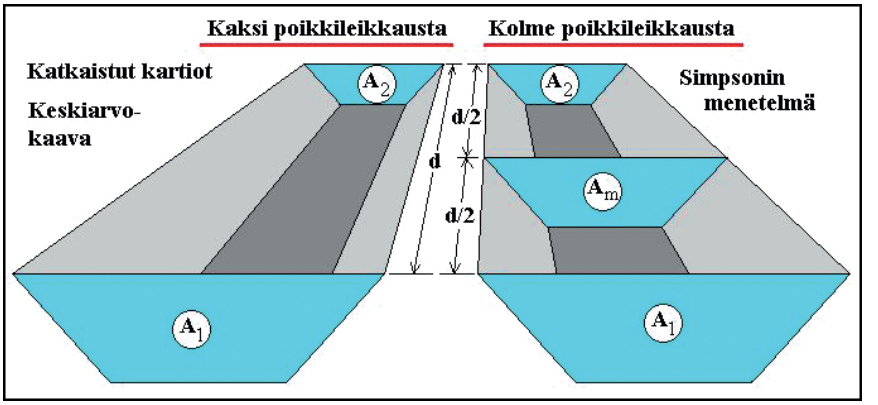
Jatkon kannalta on tarpeellista esittää vielä katkaistun tasalevyisen kiilan tilavuus. Katkaistu kiila muodostuu, kun kiila leikataan pohjatason suuntaisella tasolla. Tilavuuskaavan lähtökohtana on kaava (95) jälkimmäisessä muodossa, jossa esiintyy pohjan pinta-ala. Katkaistun kiilan tilavuus on

$$V = \frac{h}{2}(A_1 + A_2), \tag{96}$$

jossa $V$ on katkaistun tasalevyisen kiilan tilavuus, $A_1$ on sen alapohjan pinta-ala, $A_2$ on sen yläpohjan pinta-ala ja $h$ on katkaistun kiilan korkeus. Kun tilavuuksia lasketaan tällä kaavalla esimerkiksi tien poikkileikkauksista, voidaan kaavaa (96) kutsua keskiarvokaavaksi.

### 3.4.5 Poikkileikkauksiin perustuva tilavuuslaskenta

Edellä esiteltiin kolme tilavuuslaskennan kaavaa tai periaatetta (kaava 92, s. 117, kaava 93, s. 118 ja kaava 96, s. 119), joita voidaan käyttää laskettaessa tilavuuksia poikkileikkausten perusteella. Seuraavassa tehdään yhteenveto näiden kaavojen käytöstä tarkastelemalla kahden etäisyydellä $d$ toisistaan olevan poikkileikkauspinnan $A_1$ ja $A_2$ rajoittamaa massaa (kuva 96).




**KUVA 96** *Tieleikkauksen kahden poikkileikkauspinnan ($A_1$ ja $A_2$) rajoittama massa. Simpsonin menetelmää käytettäessä näiden poikkileikkausten puoliväliin on määriteltävä myös kolmas poikkileikkaus ($A_m$).*

Kuvan 96 esittämän massan tilavuus voidaan laskea kolmella edellä kuvatulla tavalla. Voimme käyttää tilavuuslaskennassa katkaistujen kartioiden tilavuuskaavaa (kaava 92, s. 117)

$$V = \frac{d}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2\right), \tag{97}$$

Simpsonin menetelmää (kaava 93, s. 118)

$$V = \frac{d}{6}\left(A_1 + 4A_m + A_2\right) \tag{98}$$

tai tasalevyiseen katkaistuun kiilaan perustuvaa keskiarvokaavaa (kaava 96, s. 119)

$$V = \frac{d}{2}\left(A_1 + A_2\right). \tag{99}$$

Kaavoissa (97) – (99) $V$ on massan tilavuus, $A_1$ ja $A_2$ ovat massan rajaavat poikkileikkaukset, $A_m$ on niiden puoliväliin määritelty poikkileikkaus ja $d$ poikkileikkausten $A_1$ ja $A_2$ välimatka. Simpsonin menetelmää käytettäessä tarvitaan kolme peräkkäistä poikkileikkausta. Niiden välimatka on tässä yhteydessä $d/2$ (kuva 96, s. 120). Jos halutaan laskea Simpsonin menetelmällä kolmen etäisyydellä $d$ olevan poikkileikkauksen $A_1$, $A_2$ ja $A_3$ rajaama tilavuus, se on

$$V = \frac{d}{3}(A_1 + 4A_2 + A_3)\,. \tag{100}$$

Kaikki edellä esitetyt kaavat ovat tiettyjen kappaleiden tarkkoja tilavuuskaavoja. Kuitenkin saman massan tilavuutta arvioitaessa ne todennäköisesti antavat hieman toisistaan poikkeavia tuloksia. Simpsonin kaava on näistä menetelmistä yleispätevin. Sen sijaan keskiarvokaavan (99) käyttöön tulee suhtautua varauksin.

### 3.4.6 Tilavuuslaskennan summakaavat

Tyypillisessä tilavuuslaskennan tehtävässä tarkastellaan useita peräkkäisiä poikkileikkauksia. Tätä tilannetta varten edellä esitetyistä peruskaavoista voidaan johtaa laskentaa helpottavat summakaavat. Katkaistun kartion tilavuuskaavaan (97, s. 120) perustuva summakaava on

$$V = \frac{d}{3}\left( A_1 + A_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} A_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{A_i A_{i+1}} \right). \tag{101}$$

Simpsonin kaavaa (100) vastaava summakaava on

$$V = \frac{d}{3}\left( A_1 + A_n + 4\sum_{i=2,2}^{n-1} A_i + 2\sum_{i=3,2}^{n-2} A_i \right). \tag{102}$$

Simpsonin kaavaa käytettäessä poikkileikkausten lukumäärän tulee olla pariton luku. Summalausekkeiden indeksimerkintä $i = 2,2$ tarkoittaa, että indeksi alkaa kasvaa arvosta 2 ja sitä kasvatetaan luvulla 2. Vastaavasti $i = 3,2$ tarkoittaa, että indeksi alkaa kasvaa arvosta 3 ja sitä kasvatetaan luvulla 2. Kaavan (102) ensimmäinen summa tarkoittaa siis ensimmäisen ja viimeisen poikkileikkauksen väliin jäävien parillisten poikkileikkausten summaa ja toinen summa tarkoittaa väliin jäävien parittomien poikkileikkausten summaa.

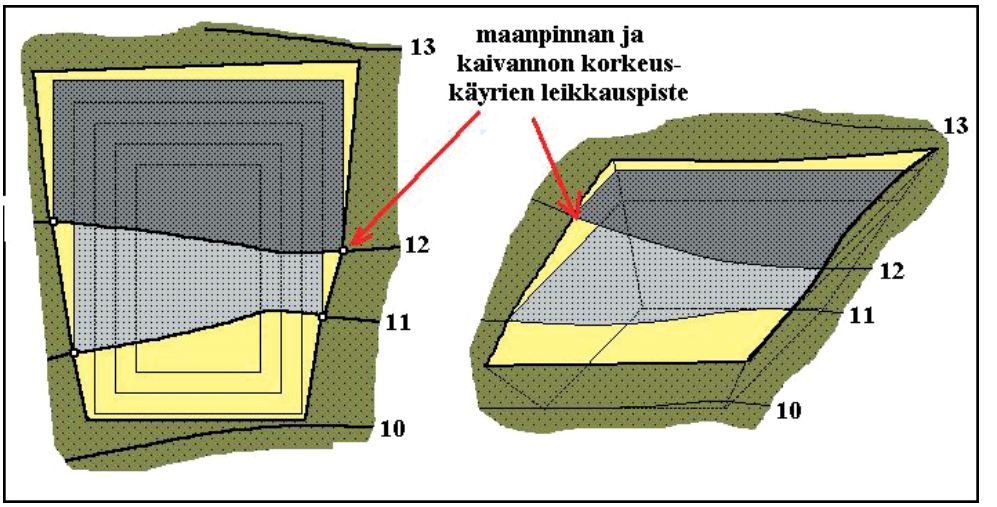
Keskiarvokaavasta (99, s. 120) johdettu summakaava on

$$V = \frac{d}{2}\left( A_1 + A_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} A_i \right). \tag{103}$$

Summakaavoissa (101) – (103) $V$ on laskettu tilavuus, $A_1$ on ensimmäisen poikkileikkauksen ala, $A_n$ on viimeisen poikkileikkauksen ala, $A_i$ tarkoittaa näiden väliin jääviä poikkileikkauksia, $n$ on poikkileikkausten lukumäärä ja $d$ on poikkileikkausten välimatka.

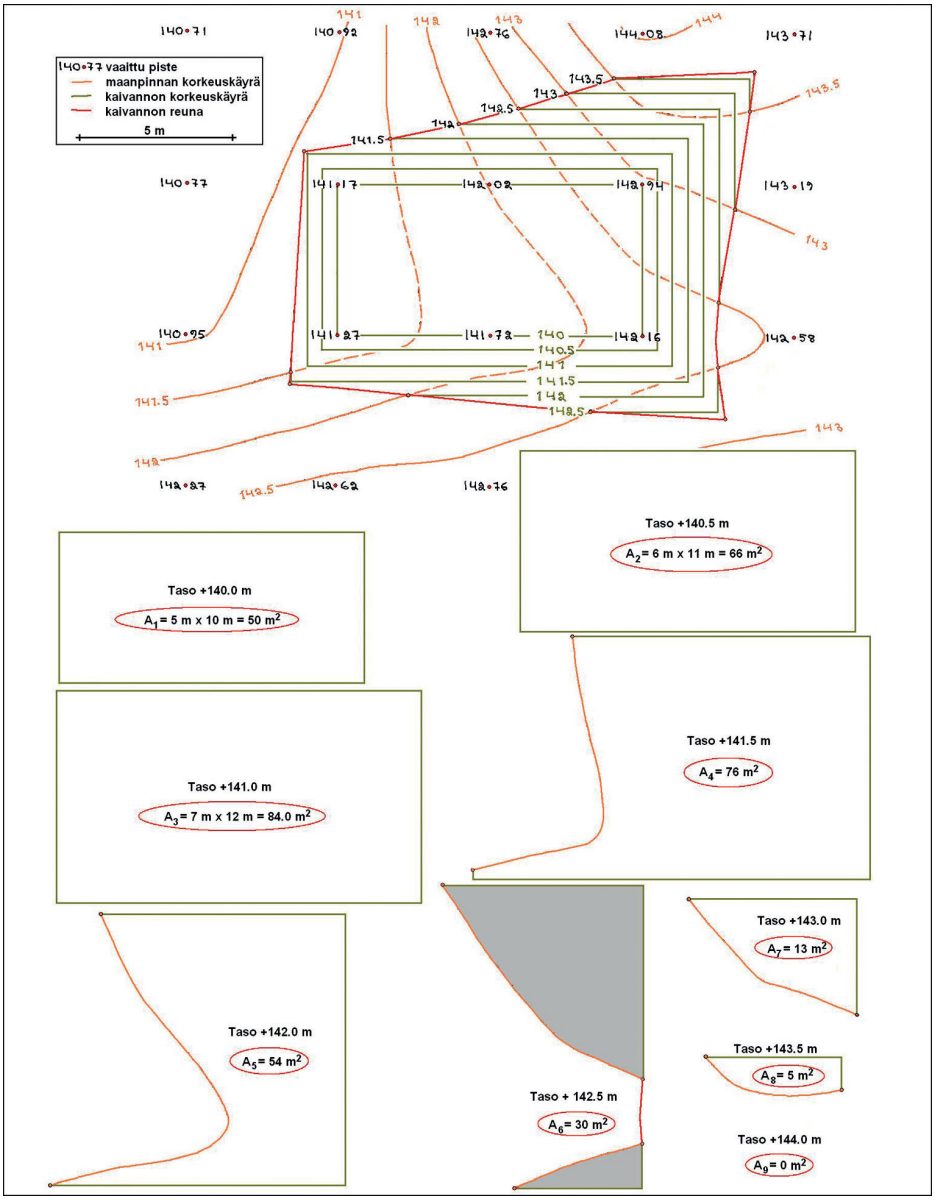
### 3.4.7 Vaakasuorien poikkileikkausten muodostaminen

Pitkänomaisissa tilavuuslaskentakohteissa, kuten tiet, tunnelit ja johtokaivannot, pystysuorat poikkileikkaukset mallintavat tilan parhaiten. Pystysuorien poikkileikkausten muodostaminen on yleensä selväpiirteinen tehtävä. Alueellisissa tilavuuslaskentakohteissa, esimerkiksi rakennusten vaatimissa kaivannoissa ja täytöissä, läjitysalueissa ja patoaltaissa, voi tilan mallintamisen näkökulmasta olla hyvä käyttää vaakasuoria poikkileikkauksia. Niiden muodostaminen saattaa olla ongelmallisempaa kuin pystysuorien poikkileikkausten muodostaminen. (Kuva 97.)




**KUVA 97** *Vaakasuorien poikkileikkausten muodostaminen kaivantoon. Maanpinnan ja kaivannon korkeuskäyrät rajaavat vaakasuorat poikkileikkaustasot. Ne kuvaavat tilan muodon paremmin kuin pystysuorat poikkileikkaukset. Pystysuoria poikkileikkauksia käytettäessä kaivannon päädyt saattaisivat jäädä kunnolla huomioimatta, erityisesti jos käytettäisiin vain muutamia poikkileikkauksia.*

Seuraavassa tarkastellaan esimerkkinä suunnitellun rakennuksen peruskaivannon tilavuuden määrittämiseen liittyvien vaakasuorien poikkileikkausten muodostamista. Lähtökohtana ovat maanpinnan korkeuskäyrät ja vastaavalla korkeuserolla piirretyt kaivannon rakennussuunnitelman mukaiset korkeuskäyrät. (Kuva 97 ja kuva 98, s. 123.)

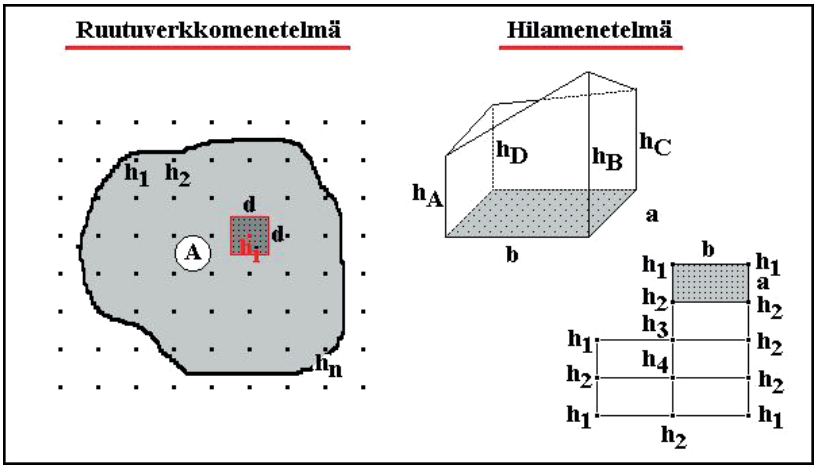



**KUVA 98** *Kaivannon poikkileikkausten muodostamiseen liittyvä esimerkki.*

Poikkileikkausten muodostamista varten etsitään ensiksi maanpinnan ja kaivannon korkeuskäyrien leikkauspisteet. Kun samalla korkeudella olevat korkeuskäyrät yhdistetään, muodostavat ne kaivannon sisään sulkeutuvia alueita. Niiden pinta-alat mitataan, arvioidaan tai lasketaan. Lopuksi lasketaan tilavuus katkaistujen kartioiden tilavuuskaavalla (summakaava 101, s. 121) tai Simpsonin kaavalla (summakaava 102, s. 121). Nämä kaavat sopivat parhaiten kaivannon muotoon, joka on lähellä katkaistua pyramidia. (Kuva 98.)

### 3.4.8 Ruutuverkkomenetelmät

Ruutuverkkomenetelmät sopivat alueellisten kohteiden tilavuuksien arviointiin, erityisesti jos laskettavien massojen korkeudet ovat pieniä. Ne muistuttavat jossakin määrin nykyaikaisia maastomallitekniikoita. Ruutuverkkomenetelmässä tulee tuntea säännöllisessä ruudustossa sijaitsevien pisteiden korkeudet (kuva 99). Perinteisesti korkeudet on mitattu suoraan säännölliseen neliöruudukkoon pintavaituksella, mutta korkeudet voidaan laskea myös hajapisteinä mitatun korkeusmallin korkeuksista interpoloimalla.




**KUVA 99** *Tilavuuslaskenta voi perustua säännöllisen ruutuverkon korkeuksiin. Ruutuverkko on yleensä neliöverkko, mutta ruudut voivat olla myös suorakaiteita kuten oikean alareunan ruudukossa.*

Ruutuverkon korkeuksista massan tilavuus voidaan laskea kahdella vaihtoehtoisella kaavalla:

$$V = d^2 \sum_{i=1}^{n} h_i \,, \tag{104}$$

$$V = \frac{A}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i \,. \tag{105}$$

Kaavoissa (104) ja (105) $V$ on massan tilavuus, $d$ on ruutuverkon (neliöverkon) pisteväli, $n$ on laskenta-alueelle osuvien ruutupisteiden lukumäärä, $A$ on laskenta-alueen pinta-ala ja $h_i$ on massan korkeus ruutupisteissä sovitusta vertailutasosta mitattuna.

Pienialaisissa kuvioissa kaavan (104) käytössä tulee olla varovainen, sillä se voi ylitai aliarvioida laskenta-alueen todellista pinta-alaa.

Myös niin sanottu hilamenetelmä hyödyntää säännöllisen ruutuverkon korkeuksia (kuva 99, s. 124). Hilamenetelmässä lähtökohtana on neljän nurkan muodostaman prisman (neliöprisman) tilavuuskaava

$$V = \frac{b}{4}(h_A + h_B + h_C + h_D) = \frac{A}{4}(h_A + h_B + h_C + h_D), \qquad (106)$$

jossa $V$ on neliöprisman tilavuus, $a$ ja $b$ ovat tarkasteltavan ruudun sivut, $A$ on ruudun pinta-ala ($A = ab$) ja $h_A$, $h_B$, $h_C$ ja $h_D$ ovat ruudun nurkkien korkeudet vertailutasosta mitattuna.

Neliöprisman tilavuuskaavaa (106) vastaava summakaava on

$$V = \frac{A}{4}\left(\sum h_{1,i} + 2\sum h_{2,i} + 3\sum h_{3,i} + 4\sum h_{4,i}\right), \qquad (107)$$

jossa $V$ on massan tilavuus, $A$ on ruutuverkon ruudun pinta-ala, $h_{1,i}$ viittaa niiden pisteiden korkeuksiin, jotka esiintyvät ruutuverkossa vain kerran ja $h_{2,i}$, $h_{3,i}$ ja $h_{4,i}$ viittaavat niiden pisteiden korkeuksiin, jotka esiintyvät kahden, kolmen tai neljän ruudun nurkissa.

Myös hilamenetelmän yhteydessä tulee muistaa sen rajoitukset, sillä kaava (106) ei voi olla tarkka tilavuuskaava, koska lähtökohtana olevan neliöprisman yläpintaa ei määritellä yksikäsitteisesti.

### 3.4.9 Maastomalliin perustuva tilavuuslaskenta

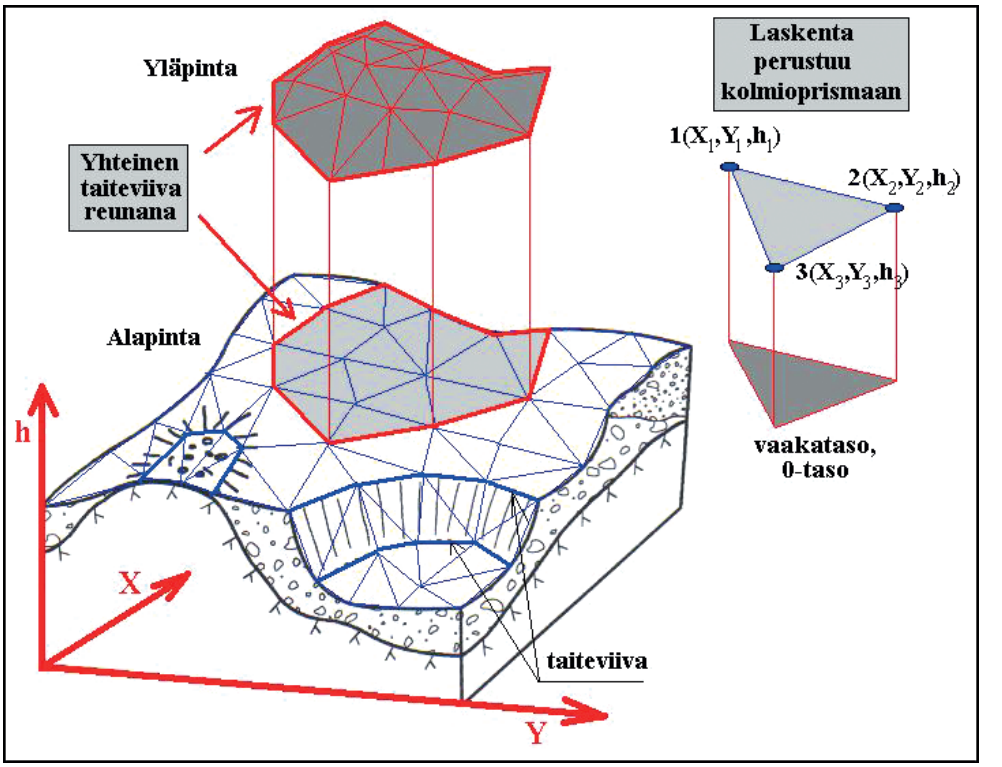
Tietokoneella tehtävä tilavuuslaskenta perustuu maastomalliin joko suoraan tai siitä johdettujen poikkileikkausten tai säännöllisten ruutuverkkojen kautta. Poikkileikkauksiin perustuvien menetelmien käyttö voi olla perusteltua niiden havainnollisuuden vuoksi ja rakentamissuunnitelmien kuvaustapoihin liittyvistä syistä. Lisäksi on yleisesti hyvä käyttää vaihtoehtoisia laskentatapoja tulosten vertailemiseksi ja niiden oikeellisuuden varmistamiseksi.

Maastomallin lähtökohtana on hajapisteinä mitattu kolmioverkko, johon perustuen laskettava tilavuus voidaan jakaa kolmioprismoihin (kuva 100). Kolmioprisman tilavuus voidaan laskea kaavalla

$$V = \frac{A}{3}(h_1 + h_2 + h_3), \qquad (108)$$

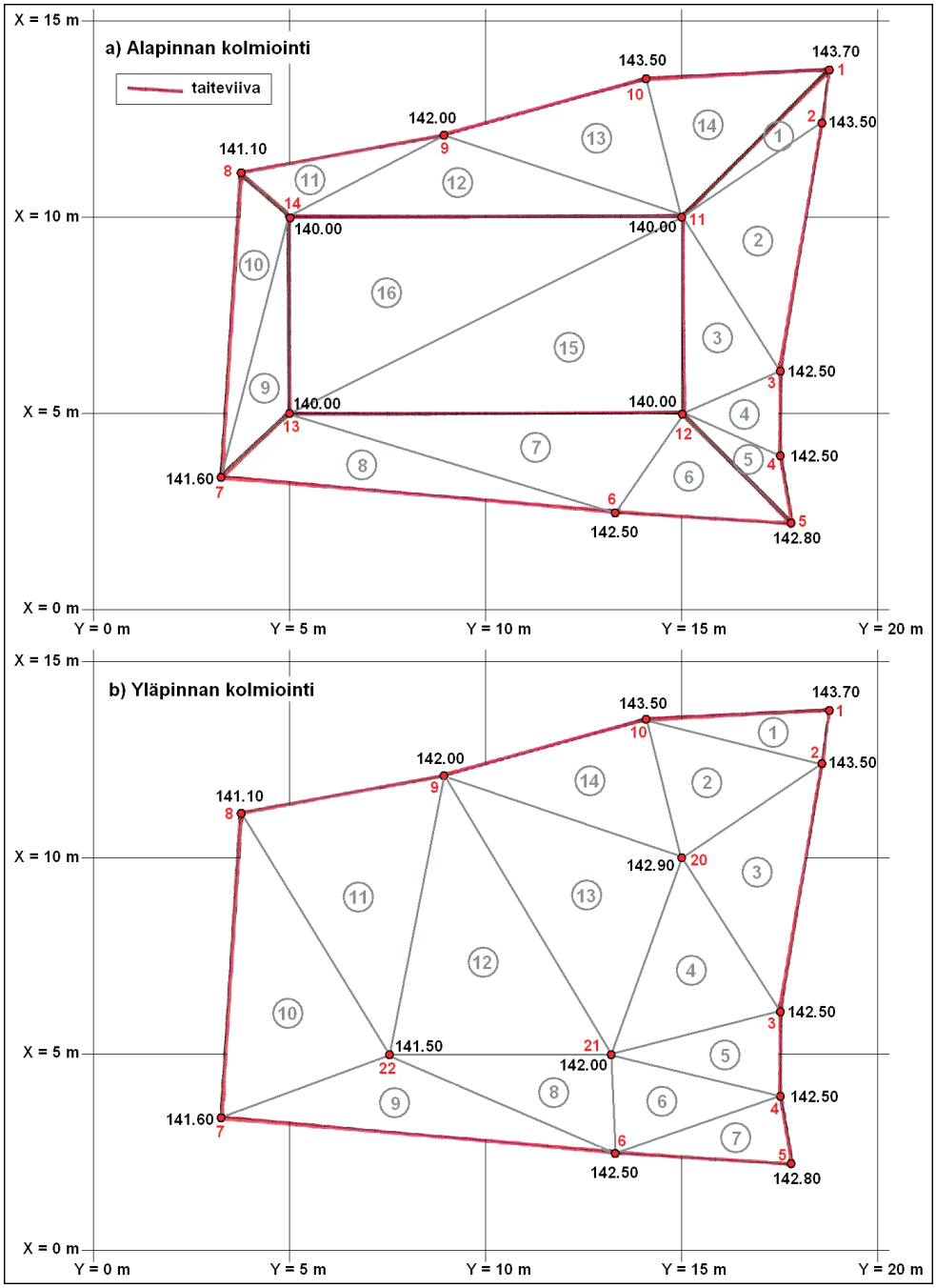
jossa $V$ on kolmioprisman tilavuus, $A$ on sen pohjan pinta-ala ja $h_1$, $h_2$ ja $h_3$ ovat mallikolmion nurkkien korkeudet nollatasosta tai muusta valitusta vertailutasosta mitattuna.

Kaava (108) on kolmioprisman tarkka tilavuuskaava. Jos maastomallin kolmiot kuvaavat hyvin maan ja rakenteiden pintoja, kolmioverkkoon perustuen voidaan laskea tilavuuksia tarkasti.




**KUVA 100** *Maastomalliin perustuvan tilavuuslaskennan periaate. Laskettavalla massalla ja maanpinnalla on yhteinen taiteviiva reunaviivana ja massan ala- ja yläpinnat on mallinnettu erikseen.*

Kun ajatellaan, kuinka kolmioprismaa käytetään tilavuuslaskennassa, lähtökohtana voi olla kuvan 100 tilanne, jossa laskettava massa on rajattu yhteisellä taiteviivalla ja massan ala- ja yläpinnat on mallinnettu erikseen. Tilavuuden määrittämiseksi voidaan laskea ensiksi yläpinnan kolmioprismojen tilavuus nollatason suhteen ja vähentää niiden summasta alapinnan muodostavien kolmioprismojen tilavuuksien summa. Tässä laskentatavassa ala- ja yläpinnan kolmiointi voi olla erilainen, kunhan niillä on yhteinen reunaviiva. Toisaalta kummallekin mallipinnalle voidaan laskennallisesti muodostaa yhteinen kolmiointi eli kummallakin pinnalla kolmioiden nurkkien tasokoordinaatit ovat samat. Tällöin laskentakaavassa (108, s. 125) voidaan käyttää nollatason suhteen laskettujen korkeuksien sijasta kolmiointipisteiden korkeuseroja. (Kuva 101, s. 127.)




**KUVA 101** *Esimerkki kaivannon kolmioinnista tilavuuslaskentaa varten. Piirrokset liittyvät samaan kaivantoon kuin kuvan 97 (s. 122) piirrokset. Alapinnan kolmiointi (a) perustuu suunnitelmatietoihin. Yläpinnan (b) kolmiointi perustuu mitattuihin maanpinnan korkeuksiin.*

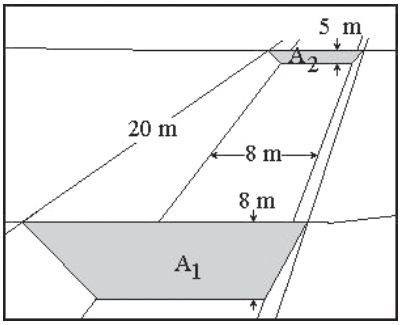
### 3.4.10 Tehtäviä

**88.** Laske katkaistun kartion tilavuuskaavaan liittyvä määrätty integraali (kaava 91, s. 117).

**89.** Kuinka lasket pallon ja ellipsoidin tilavuuden Simpsonin kaavalla (kaava 93, s. 118)? Miksi tulokset ovat sellaiset kuin ovat?

**90.** Vertaile katkaistun kartion tilavuuskaavaa (kaava 97, s. 120) ja keskiarvokaavaa (kaava 99, s. 120). Ääritapauksessa toinen poikkileikkauspinta-aloista voi olla nolla. Kuinka suuri ero kaavojen antamissa tuloksissa tässä tilanteessa on? Kumpi kaavoista antaa oikeamman tuloksen?

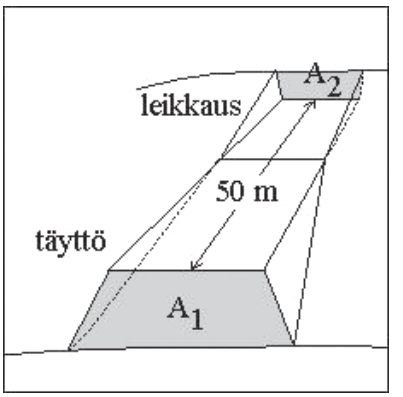
**91.** Viereinen kuva esittää poikkileikkausten $A_1$ ja $A_2$ rajoittamaa maaleikkausta. Poikkileikkausten välimatka on 20 m, leikkauksen $A_1$ korkeus on 8 m ja $A_2$:n korkeus on 5 m. Pohjan leveys on 8 m ja luiskien kaltevuus on 1:1. Laske leikkauksen tilavuus käyttäen erilaisia tilanteeseen sopivia laskentavaihtoehtoja ja vertaile tuloksia. (Kuva 102)




**KUVA 102** *Tehtävä 91.*

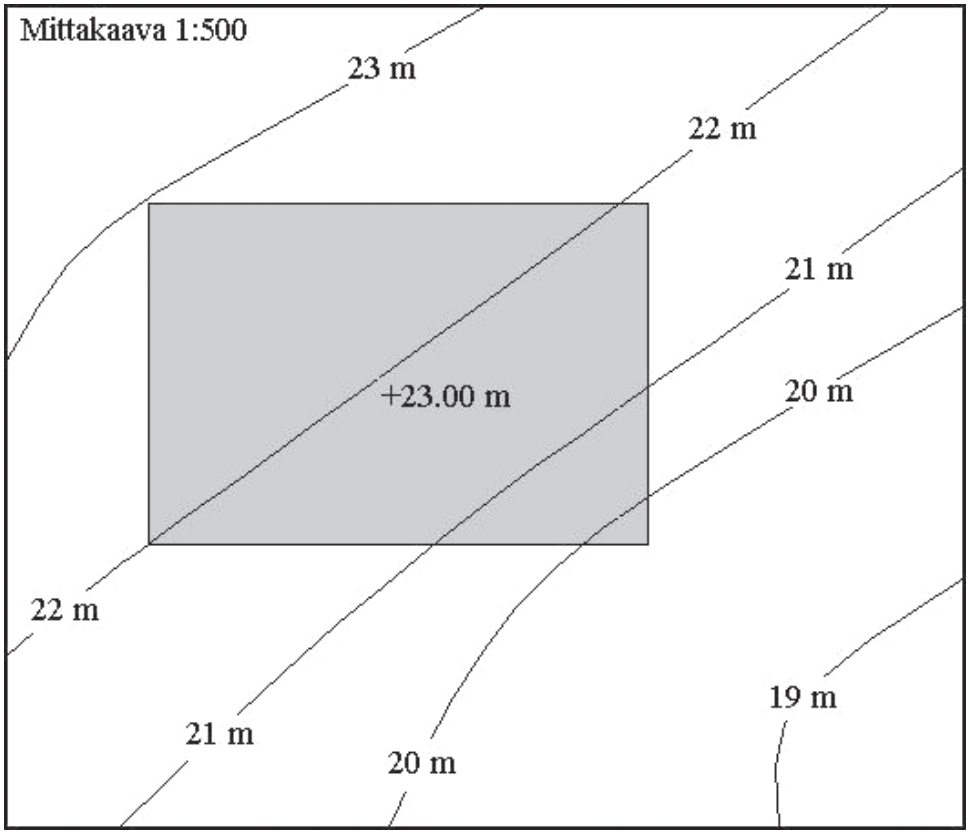
**92.** Johda integroimalla katkaistun tasalevyisen kiilan tilavuuskaava (kaava 96, s. 119).

**93.** Oheinen kuva esittää kahden poikkileikkauksen rajoittamaa tielinjan kohtaa. Niiden väliin osuu sekä täyttö että leikkaus. Poikkileikkausten pinta-alat ovat $A_1$ = 24 m² (täyttö) ja $A_2$ = 16 m² (leikkaus). Poikkileikkausten välimatka on 50 m. Arvioi täytön ja leikkauksen tilavuus olettamalla ne tasalevyisen kiilan muotoisiksi. (Kuva 103.)



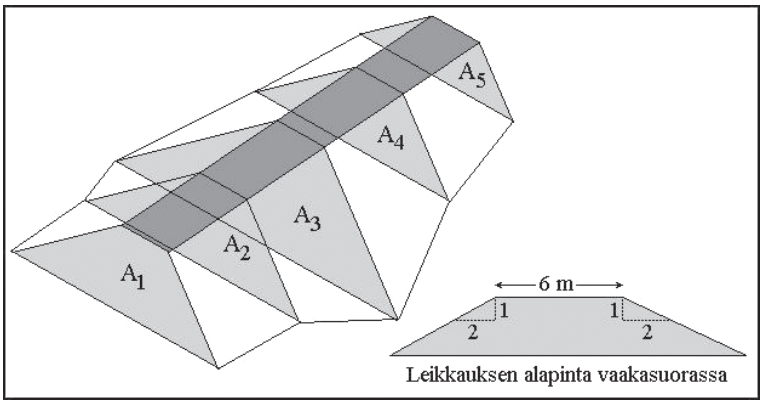

**KUVA 103** *Tehtävä 93.*

**94.** Seuraavan piirroksen esittämä suorakaiteen muotoinen alue on tarkoitus täyttää tasoon +23.00 m. Luiskien kaltevuudeksi on suunniteltu 1:2. Piirrä kuvaan suunnitellun penkereen reuna, määritä korkeuskäyrien rajaamat vaakasuorat poikkileikkaustasot ja arvioi penkereen tilavuus. (Kuva 104.)



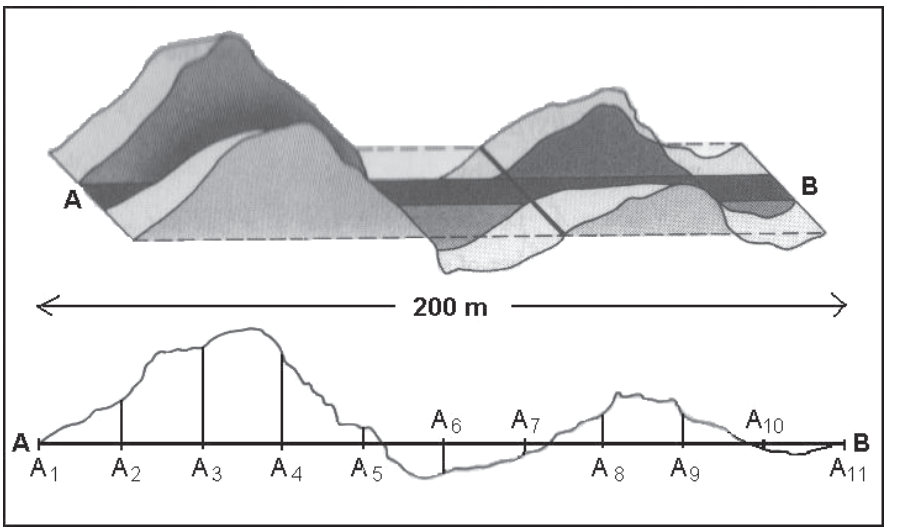

**KUVA 104** *Tehtävä 94: penkereen reunaviiva ja täytön tilavuus.*

**95.** Laske kuvan tiepenkereen tilavuus. Penkereen yläosan leveys on 6 m, luiskien kaltevuus on 1:2, maanpinta on vaakasuorassa poikkileikkausten suunnassa ja penkereen korkeudet 20 m välein määritettyjen poikkileikkausten kohdalla ovat seuraavat: paalu 0+00 ($A_1$) korkeus 2.2 m, paalu 0+20 ($A_2$) korkeus 2.3 m, paalu 0+40 ($A_3$) korkeus 4.4 m, paalu 0+60 ($A_4$) korkeus 1.3 m ja paalu 0+80 m ($A_5$) korkeus 0.9 m. (Kuva 105.)



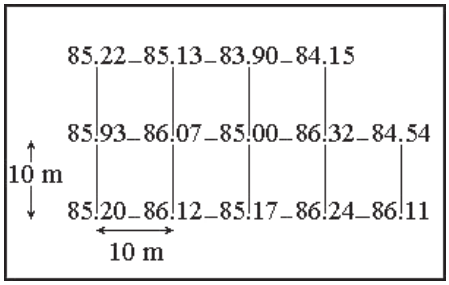

**KUVA 105** *Tehtävä 95.*

**96.** Arvioi seuraavan kuvan esittämän tieosuuden leikkaus- ja täyttömassojen tilavuus. Poikkileikkausten välimatka on 20 m ja niiden pinta-alat neliömetreinä ovat seuraavat (positiivinen luku tarkoittaa leikkausta ja negatiivinen täyttöä): $A_1$ = +0.0, $A_2$ = +48.0, $A_3$ = +168.8, $A_4$ = +142.4, $A_5$ = +16.4, $A_6$ = −39.5, $A_7$ = −16.4, $A_8$ = +22.8, $A_9$ = +43.7, $A_{10}$ = −5.5, $A_{11}$ = +0.0. (Kuva 106.)




**KUVA 106** *Tehtävä 96: leikkaus- ja täyttömassojen erottelu.*

**97.** Suunniteltu pysäköintialue täytetään tasoon +86.50 m. Tilavuuksien määrittämistä varten vaaittiin maanpinnan korkeudet kuvan esittämällä tavalla. Laske täytön tilavuus käyttäen erilaisia tilanteeseen sopivia laskentamenetelmiä ja vertaile tuloksia. (Kuva 107.)




**KUVA 107** *Tehtävä 97.*

**98.** Johda kolmioprisman tilavuuskaava (kaava 108, s. 125). Miksi kolmioprisman tilavuuskaava on yksikäsitteinen, mutta neliöprisman tilavuuskaava (kaava 106, s. 125) ei ole yksikäsitteinen?

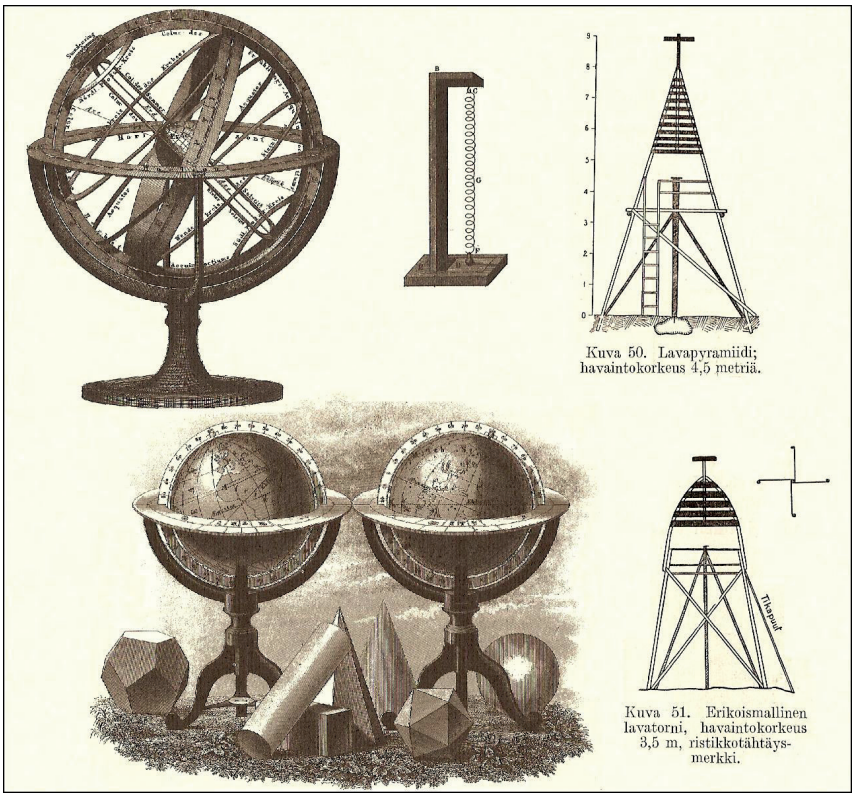
**99.** Laske korkeusmalliin kuuluvan kolmioprisman tilavuus vertailutason 105.00 m suhteen. Mallikolmion muodostavat seuraavat pisteet:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** | $H$ **/ m** |
|---|---|---|---|
| 1 | 1571.59 | 2510.50 | 112.72 |
| 2 | 1580.15 | 2518.35 | 114.15 |
| 3 | 1567.68 | 2529.30 | 110.89 |

**100.** Laske kuvissa 98 (s. 123) ja 101 (s. 127) esitetyn kaivannon tilavuus sekä poikkileikkausten että mallikolmioiden avulla. Mikä on kuvassa 98 olevan poikkileikkauksen $A_9$ = 0 m² tarkoitus?

# 4 KOORDINAATTI- JA KORKEUSJÄRJESTELMÄT

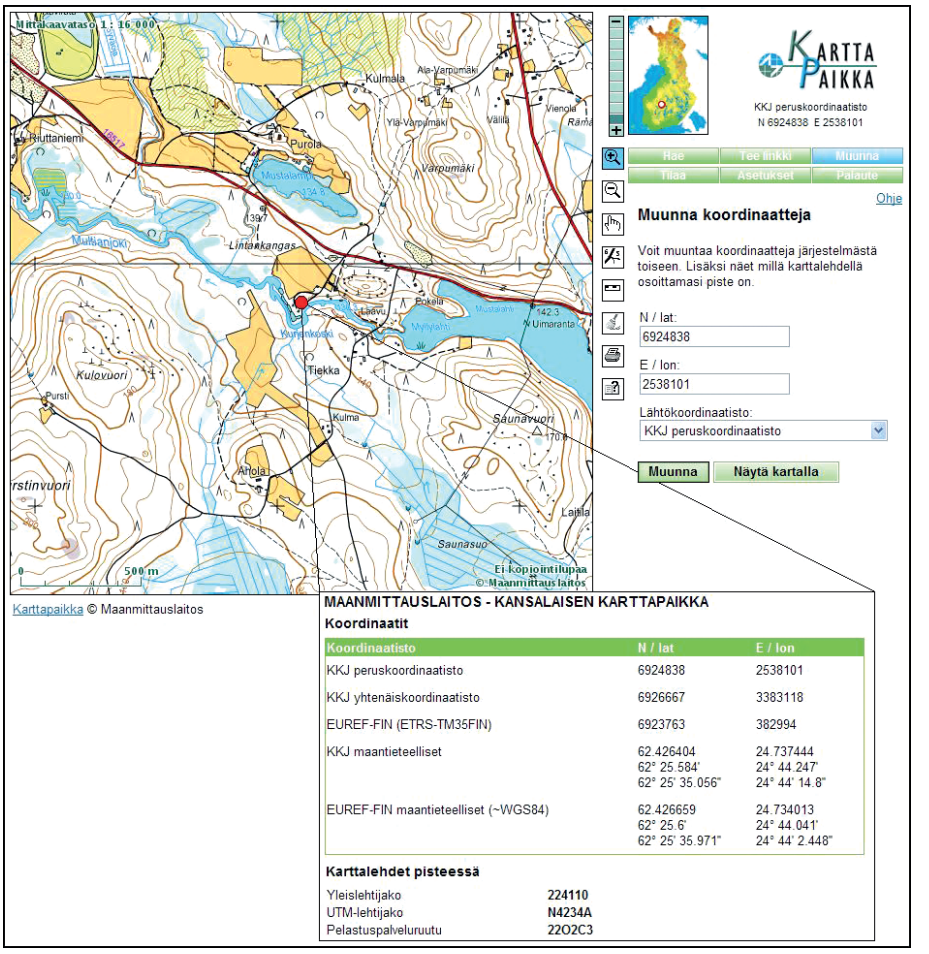
Koordinaatisto ja korkeusjärjestelmä muodostavat mittaajan teknisen toimintaympäristön. Pienialaisissa mittauksissa toimitaan usein yksinkertaisessa suorakulmaisessa tasokoordinaatistossa. Kun aletaan miettiä sitä, miten tällainen koordinaatisto liittyy maapalloon ja miten koordinaatistoja käytetään laaja-alaisissa mittauksissa, esimerkiksi koko Suomen alueella, asiat eivät olekaan enää yksinkertaisia. Satelliittipaikannuksen yleistyminen on aiheuttanut sen, että käytännön mittauksissakin mittaajan pitää tietää entistä enemmän koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiin liittyvistä asioista. Mittausten koordinaatistoympäristöt ovat nykyisin hyvin monimuotoisia ja kansainvälisiä. (Kuva 108.)




**KUVA 108** *Monet koordinaattijärjestelmien määrittelyssä käytettävät vertailukohdat liittyvät tähtitieteellisiin ilmiöihin. Myös painovoimaan, Maan muotoon ja mittasuhteisiin liittyvät asiat ovat tässä yhteydessä tärkeitä. Koordinaattijärjestelmät toteutetaan runkomittausten ja runkopisteiden avulla. (Heck 2001, taivaanpallo ja jousi s. 13 sekä maapallot s. 7. Maanmittaushallitus 1944, kolmiomittaustornit s. 59.)*

## 4.1 Monenlaisia koordinaatteja

Jokainen joutuu tekemisiin sijainnin esittämiseen liittyvien asioiden kanssa. Usein niihin liittyvistä ongelmista selviää, kun pystyy kertomaan osoitteen tai paikannimen, jossa on tai johon haluaa mennä. Paikallistuntemukseen, osoitteisiin ja nimiin perustuva paikantaminen on epäsuoraa paikannusta. Nykyisin ihmisillä on käytössään erilaisia helppokäyttöisiä teknisiä apuvälineitä sijaintinsa määrittämiseen. Satelliittipaikannukseen suunnitellut navigaattorit ovat monille tuttuja ja matkapuhelinkin voi toimia paikantimena. Moni on myös tutustunut internetin välityksellä tietokonemuotoisiin kartta- ja paikkatietopalveluihin. Tekniset järjestelmät eivät toimi osoitteiden ja nimien varassa, vaan ne esittävät sijainnin koordinaattien avulla. Tämä on suoraa paikannusta. (Kuva 109.)




**KUVA 109** *Maanmittauslaitoksen kansalaisen karttapaikka antaa kuvan siitä, kuinka monella tapaa paikan sijainti voidaan esittää koordinaattien avulla. (© Maanmittauslaitos, lupa numero 51/MML/08.)*

Paikkaa ilmaisevia koordinaatteja on käytetty vuosisatojen ajan. Niiden määrittely ja tarkkuus ovat muuttuneet ihmisen tarpeiden ja käytettävissä olevien tekniikoiden mukaan. Vielä muutamia kymmeniä vuosia sitten käytettyjä järjestelmiä ja osaksi nykyisiäkin järjestelmiä, voi hyvällä syyllä sanoa paikallisiksi koordinaattijärjestelmiksi. Nykyisin käytettävät paikannustekniikat mahdollistavat kuitenkin paikannuksen koko maapallon kattavissa eli globaaleissa koordinaattijärjestelmissä.

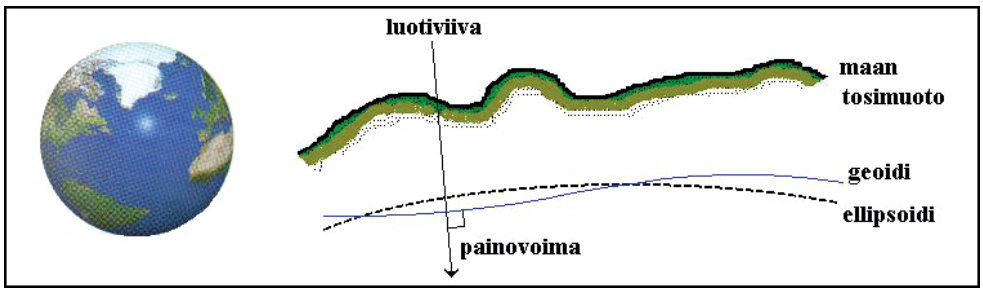
Teknisen ja yhteiskunnallisen kehityksen vuoksi Suomessakin joudutaan kehittämään koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiä. Myös erilaiset geofysikaaliset syyt pakottavat uudistuksiin. Geodeettinen laitos vastaa Suomen koordinaatti- ja korkeusjärjestelmien ajantasaisuudesta ja tarkkuudesta.

Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiin liittyvät asiat eivät ole yksinkertaisia. Määritelmiä ja termejä on valtavasti ja aihe on matemaattisestikin haastava. Tästä huolimatta ammatissaan koordinaatteja tarvitsevien tulee asiaan perehtyä. Nykyisin esimerkiksi maanmittausinsinöörit joutuvat toimimaan paljon monimuotoisemmassa koordinaattiympäristössä kuin parikymmentä vuotta sitten. Nyt koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiin liittyvät asiat tulee ymmärtää syvällisemmin kuin aikaisemmin.

## 4.2 Maan muoto ja mittasuhteet

### 4.2.1 Maan muodon mallintaminen

Maa on pallomainen kappale, jonka säde on likimäärin 6380 km. Koordinaattien määrittely ja käyttö edellyttää kuitenkin tätä täsmällisempää tietoa Maan muodosta ja mittasuhteista. Geodesian tehtävänä on tutkia näitä asioita. Tutkimuksen tavoitteena on Maan muodon mallintaminen. Lähtökohta on Maan tosimuoto, joka on pinnaltaan epäsäännöllinen, mutta pallomainen kappale. Maan pinnanmuodostuksesta käytetään termiä topografia. (Kuva 110.)




**KUVA 110** *Maan tosimuoto yksinkertaistetaan geoidin avulla. Geoidi kuvaa painovoiman vaihtelua. Painovoiman suuntaa kutsutaan luotiviivaksi. Geoidin muotoihin puolestaan sovitetaan matemaattinen ellipsoidipinta. Täsmällinen kuva Maan muodosta ja mittasuhteista on perusedellytys laaja-alaisille ja tarkoille mittauksille.*

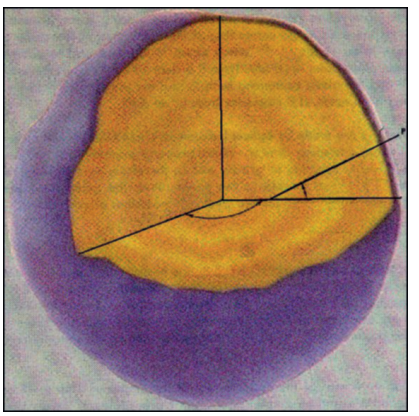
Maan tosimuotoa yksinkertaistetaan ja tasoitetaan painovoimaan liittyvän fysikaalisen mallin avulla. Tuloksena saadaan geoidi, joka on valtamerien keskivedenpintaan yhtyvä painovoimakentän samanarvopinta. Painovoiman suunta eli luotiviiva on aina kohtisuorassa geoidiin nähden. Geoidi on korkeuksien kannalta keskeinen pinta, sillä yleensä korkeudet mitataan geoidista, joka yhtyy jonkin sovitun ajankohdan merenpintaan. Geoidin muotoihin sovitetaan vielä Maan matemaattinen malli, joka on pyörähdysellipsoidi.

### 4.2.2 Painovoima ja geoidi

Geodeettiset mittaukset tehdään painovoimakentän määrittämien perustasojen ja suuntien suhteen. Painovoima määrittää mittauspaikalla pystysuoran (luotiviivan) ja vaakatason, joiden suhteen mittauskojeet tasataan. Painovoima liittyy suoraan mittausten suorittamiseen, mutta vielä merkittävämpi asia painovoima on, kun määritetään koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiä.

Painovoima määräytyy Maan massaan liittyvän vetovoiman ja pyörimisliikkeeseen liittyvän keskipakoisvoiman yhteisvaikutuksesta. Painovoima vaihtelee eri puolilla maapalloa. Navoilla painovoima on hieman suurempi kuin päiväntasaajalla, koska navoilla ollaan lähempänä Maan massakeskipistettä kuin päiväntasaajalla. Myös keskipakoisvoima vaikuttaa samansuuntaisesti eli painovoima on pienempi päiväntasaajalla kuin navoilla. Edellä mainitut tekijät huomioidaan niin sanotussa normaalipainovoiman kaavassa. Painovoimaan vaikuttavat myös maapallon ja sen kuoren massajakauman epätasaisuudet. Näitä vaikutuksia ei voi kuvata minkään yksinkertaisen matemaattisen kaavan muodossa.

Geodesiassa painovoimakenttä kuvataan geoidin avulla. Se on painovoiman samanarvopinta eli ekvipotentiaalipinta. Kun liikutaan pitkin geoidin kuvitteellista pintaa, on painovoima koko ajan vakio. Painovoimaltaan erilaisia geoidipintoja on äärettömän monta. Näistä mahdollisista pinnoista mittauksia palvelevat parhaiten geoidit, jotka edustavat painovoimaa merenpinnan tasolla. Erään määritelmän mukaan geoidi onkin pinta, johon vapaa vedenpinta asettuisi, jos se peittäisi koko maapallon. (Kuva 111.)



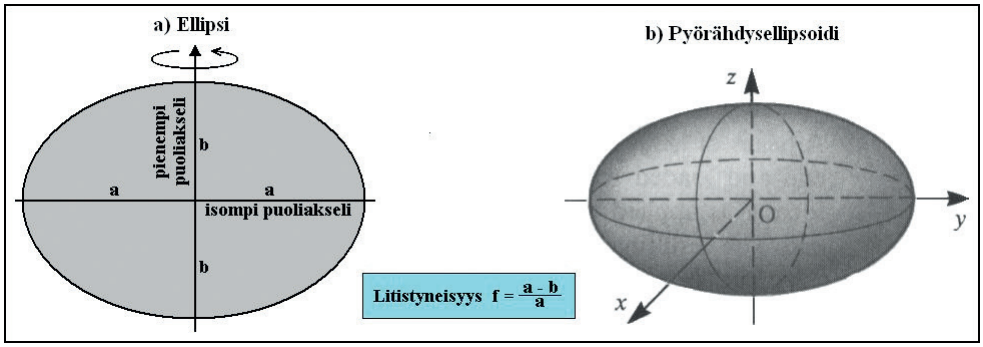
**KUVA 111** *Geoidi on loivasti aaltoileva pinta (Defence Mapping Agency 1984).*

Geoidi on jatkuva fysikaalinen pinta, joten sen muotoa ei voi kuvata täsmällisesti matemaattisesti. Geoidin muoto voidaan määrittää mittaamalla eri keinoin painovoimavaihteluita. Vaihteluiden mittaaminen ja geoidin määritys ovat geodesian alaan kuuluvaa tieteellistä työtä. Määritysmenetelmien mukaan puhutaan muun muassa astrogeodeettisesta tai gravimetrisesta geoidista. Eri tavoin määriteltyjen geoidien erot voivat olla kymmeniä metrejä.

### 4.2.3 Pyörähdysellipsoidi

Geoidin kautta painovoimakenttä liittyy Maan muodon ja mittasuhteiden määrittämiseen. Maan muotoa ja mittasuhteita parhaiten kuvaava matemaattinen pinta, pyörähdysellipsoidi, määritetään, niin että se vastaa mahdollisimman hyvin tarkoitukseen valittua geoidia. Geoidin ja pyörähdysellipsoidin pintojen erot ovat suurimmillaan noin 150 metriä. Pyörähdysellipsoidin mittaluvut ja asento geoidin suhteen luovat perustan koordinaattijärjestelmien määrittelylle.

Pyörähdysellipsoidi syntyy, kun ellipsi pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Maan muotoa kuvaavan pyörähdysellipsoidin poikkileikkaus on ellipsi, jonka isompi puoliakseli ($a$) on päiväntasaajan eli ekvaattorin säde ja pienempi puoliakseli ($b$) yhtyy Maan pyörimisakseliin. Pienempi puoliakseli on etäisyys päiväntasaajan tasosta navoille. (Kuva 112.)




**KUVA 112** *Pyörähdysellipsoidin poikkileikkaus ja ellipsin tunnusluvut ($a$, $b$ ja $f$). Maapalloon liittyvän pyörähdysellipsoidin isoakseli on päiväntasaajan tasossa ja pikkuakseli on Maan pyörimisakseli. Maan muotoa kuvaavan pyörähdysellipsoidin voidaan sanoa olevan navoilta litistynyt pallo.*

Ellipsin muotoa kuvataan litistyneisyyden avulla:

$$f = \frac{a-b}{a}, \tag{109}$$

jossa $f$ on litistyneisyys, $a$ on isompi puoliakseli ja $b$ on pienempi puoliakseli.

Suomessa käytettävien koordinaattijärjestelmien näkökulmasta kansainvälinen ellipsoidi eli Hayfordin ellipsoidi, GRS80-järjestelmän ellipsoidi ja WGS84-järjestelmän ellipsoidi ovat tärkeimmät Maan muotoa kuvaavista pyörähdysellipsoideista. Kun ellipsoidi otetaan jonkin koordinaattijärjestelmän osaksi, ellipsoidia kutsutaan vertausellipsoidiksi. (Taulukko 6.)

Esimerkiksi Suomen kartastokoordinaattijärjestelmässä vertausellipsoidina käytetään kansainvälistä eli Hayfordin ellipsoidia. Sen tunnusluvut otettiin käyttöön jo 1910. Hayfordin ellipsoidin muotoa kuvaavat tunnusluvut ovat:

$$\begin{cases} a = 6378388.0\ \text{m} \\ f = 1/297 \\ b = (1-f)a = 6356911.946\ \text{m} \\ c = a^2/b = 6399936.608\ \text{m} \\ e^2 = (a^2-b^2)/a^2 = 0.0067226700\ 25 \\ e'^2 = (a^2-b^2)/b^2 = 0.0067681702 \end{cases} . \qquad (110)$$

jossa $a$ on isompi puoliakseli, $f$ on litistyneisyys, $b$ on pienempi puoliakseli, $c$ on napakaarevuussäde, $e^2$ on ensimmäinen eksentrisyys ja $e'^2$ on toinen eksentrisyys. Litistyneisyys 1/297 on niin pientä, että silmävaraisesti ei ole mahdollista erottaa pyörähdysellipsoidia vastaavan kokoisesta pallosta. Laaja-alaisten mittausten kannalta litistyneisyydellä on kuitenkin merkitystä.

**TAULUKKO 6** *Suomessa käytettävien koordinaattijärjestelmien vertausellisoidit: a on ellipsoidin isompi puoliakseli ja f on litistyneisyys. GRS80 on maailmanlaajuinen geodeettinen vertausjärjestelmä, WGS84 on GPS-järjestelmän koordinaatisto, ETRS89 on eurooppalainen WGS84-järjestelmää lähellä oleva koordinaattijärjestelmä, EUREF-FIN on ETRS89-järjestelmän suomalainen toteutus ja KKJ on Suomen kartastokoordinaattijärjestelmä. KKJ on Suomessa vielä yleisessä käytössä. ETRS89-järjestelmä kuitenkin syrjäyttää sen vähitellen käytöstä.*

| Ellipsoidi | *a* / m | *f* | Käytössä järjestelmissä |
|---|---|---|---|
| **GRS80** | 6378137 | 1/298.257222101 | GRS80, ETRS89, EUREF-FIN |
| **WGS84** | 6378137 | 1/298.257223563 | WGS84 |
| **Hayford** | 6378388 | 1/297 | KKJ |

Mittauksissa Suomessa ja maailmalla käytetään kymmeniä toisistaan hieman poikkeavia vertausellipsoideja. Tämä osoittaa, että Maan mitoista ei ole täyttä yksimielisyyttä. Asiassa ei edes tarvita yksimielisyyttä. Erilaisiin mittoihin löytyy historiallisia, tieteellisiä ja käytännöllisiä syitä. Mittojen erot aiheuttavat jossain määrin ongelmia ja sekaannusta paikantamisessa ja mittauksissa. Nämä ongelmat ovat kuitenkin mittaustekniikan näkökulmasta hallittavissa olevia asioita.

### 4.2.4 Tehtäviä

**101.** Millaisten havaintojen perusteella on mahdollista päätellä, että Maa on pallonmuotoinen?

**102.** Maailmassa on vielä ihmisiä, jotka eivät usko, että Maa on pallonmuotoinen. Jos Maa olisi pannukakku, pyöreä levy, miten päivän pituus ja vuodenajat vaihtelisivat?

**103.** Noin 2200 vuotta sitten Eratosthenes havaitsi nykyisessä Assuanissa Auringon paistavan tiettynä päivänä puolen päivän aikaan kohtisuoraan syvään kaivoon. Samanaikaisesti todettiin Auringon paistavan 800 km pohjoisempana Aleksandriassa 7.5° kulmassa pystysuoraan nähden. Laske tämän tiedon perusteella Maan ympärysmitta ja säde. Mihin olettamuksiin ratkaisu perustuu?

**104.** Miten ellipsi määritellään matematiikassa? Kuinka halutun muotoisen ellipsin voi piirtää? Piirrä ellipsi, jonka isoakselin puolikas on 60 mm ja pikkuakselin puolikas on 40 mm.

**105.** Mikä on GRS80-ellipsoidin pienemmän puoliakselin pituus?

**106.** Onko Hayfordin ellipsoidi navoiltaan enemmän litistynyt kuin WGS84-ellipsoidi?

**107.** Mikä on Hayfordin pyörähdysellipsoidia tilavuudeltaan vastaavan pallon säde?

**108.** Oletetaan, että maapallon säde on 6380 km. a) Mikä on maapallon ympärysmitta? b) Mikä on sen pinta-ala?

**109.** Mikä on sellaisen maapalloa sivuavan lieriön pinta-ala, jonka korkeus on sama kuin maapallon halkaisija?

## 4.3 Koordinaatistot

### 4.3.1 Koordinaatisto ja koordinaattijärjestelmä

Koordinaatisto on tapa esittää kohteen sijainti lukuarvoina matemaattisen täsmällisesti. Paikantamisessa ja mittaamisessa käytetään kolmenlaisia koordinaatistoja:

- kaksiulotteinen kulmamittoja käyttävä maantieteellinen koordinaatisto
- ellipsoidikeskinen kolmiulotteinen suorakulmainen koordinaatisto
- kartan kaksiulotteinen suorakulmainen koordinaatisto.

Kaksiulotteisia koordinaatistoja käytettäessä kolmas ulottuvuus esitetään korkeuden avulla.

Koordinaatisto tulee kiinnittää maapalloon, ”pultata kiveen”, realisoida, jotta sitä voidaan hyödyntää käytännön mittauksissa. Tämä tehdään geodeettisten ja tähtitieteellisten mittausten sekä runkomittausten avulla. Tuloksena on koordinaattijärjestelmä. Se on maapalloon kiinnitetty koordinaatisto. Koordinaattijärjestelmä on jotain todellista, se on olemassa runkopisteiden muodossa. Koordinaatisto puolestaan on idea siitä, miten paikan sijainti voidaan maapallolla esittää.

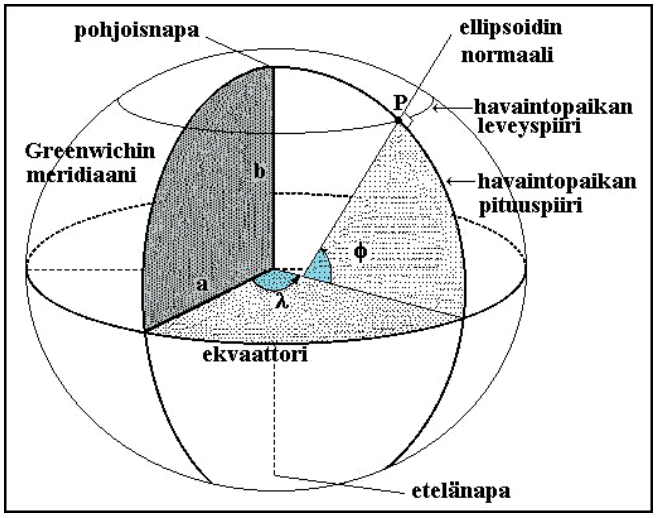
Koordinaattijärjestelmän sisällä kohteen sijainti voidaan esittää käyttäen mitä tahansa edellä mainituista kolmesta koordinaatistosta. Koordinaattilukuja voidaan muuntaa matemaattisen täsmällisesti esitystavasta eli koordinaatistosta toiseen. Sen sijaan koordinaatti-järjestelmien väliset muunnokset ovat ongelmallisempia, koska järjestelmien väliset muunnosparametrit täytyy määrittää mittauksin. Mittauksiin liittyy aina virheitä, joten koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset eivät ole absoluuttisen tarkkoja.

### 4.3.2 Maantieteellinen koordinaatisto

Paikanmäärityksessä käytettävät koordinaatistot pitää liittää maapalloon. Luonnolliset liitoskohdat ovat Maan pyörimisliikkeen ja painovoimakentän määrittämät navat, ekvaattoritaso eli päiväntasaaja ja painopiste. Itä-länsisuunnassa luonnollinen johonkin fysikaaliseen ilmiöön perustuva kiinnityskohta puuttuu. Tämän vuoksi Greenwichin meridiaani eli nollameridiaani on valittu neljänneksi vertailukohdaksi. Greenwich on Lontoon itäinen esikaupunki, jonka tähtitornin kautta kulkeva meridiaani hyväksyttiin 1884 kansainväliseksi nollameridiaaniksi. Samalla sitä vastaava keskiaurinkoaika hyväksyttiin yleiseksi perusajaksi. Ajalla ja paikalla on näin ollen sama vertailukohta.

Maapallon tai täsmällisemmin pyörähdysellipsoidin pinnalla on luontevaa esittää kohteen sijainti maantieteellisten koordinaattien avulla. Niiden ymmärtämiseksi on hyvä tuntea seuraavat määritelmät (kuva 113, s. 141):

- Napa on maapallon pyörimisakselin ja maapallon pinnan leikkauspiste.
- Isoympyrä on pallon ja sen keskipisteen kautta kulkevan tason leikkauskäyrä. Kahden pallopinnan pisteen välinen lyhyin matka mitataan pitkin isoympyrän kaarta.
- Pikkuympyrä on pallon ja tason leikkauskäyrä, kun leikkaava taso ei kulje pallon keskipisteen kautta.
- Meridiaani eli pituuspiiri on isoympyrän kaari, joka kulkee pohjoisnavalta etelänavalle. Se muodostuu, kun pyörimisakselin kautta asetettu taso leikkaa maapallon pinnan.
- Ekvaattori eli päiväntasaaja on isoympyrä, jonka muodostava taso on kohtisuorassa maapallon pyörimisakseliin nähden ja kulkee maapallon keskipisteen kautta.
- Leveyspiiri on päiväntasaajan suuntainen pikkuympyrä.




**KUVA 113** *Maantieteellisessä koordinaatistossa paikan sijainti ilmoitetaan leveyskulman (ϕ) ja pituuskulman (λ) avulla. Kulmat mitataan ekvaattoritasosta ja Greenwichin meridiaanin tasosta.*

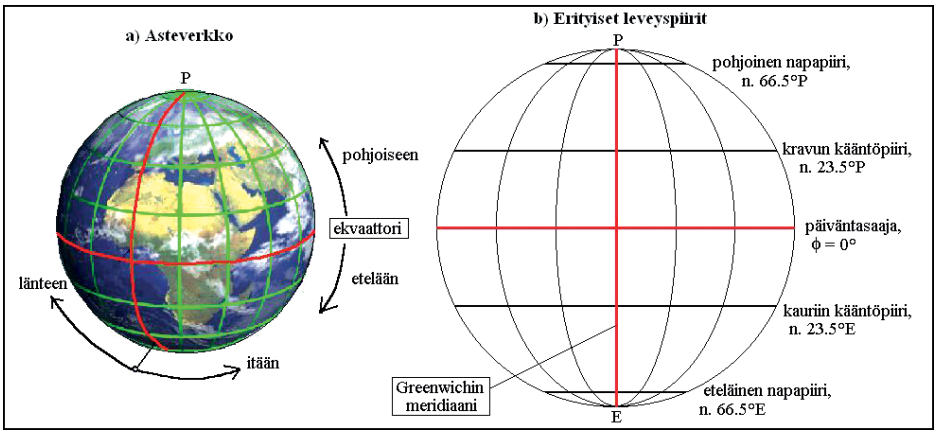
Maantieteellinen koordinaatisto on kulmamittoja käyttävä koordinaatisto (kuva 113). Sitä käytetään erityisesti laaja-alaisissa maantieteellisissä kartoissa ja merikartoissa, mutta sen käyttö on lisääntynyt yleensäkin paikantamisessa satelliittipaikannuksen ja globaalien koordinaattijärjestelmien käytön myötä. Paikan sijainti ilmoitetaan leveyskulman (ϕ) ja pituuskulman avulla (λ). Leveyskulma on havaintopaikan kautta asetetun ellipsoidin normaalin ja ekvaattoritason välinen kulma. Pituuskulma on Greenwichin ja havaintopaikan meridiaanitasojen välinen kulma. Leveyskulma lasketaan ekvaattorista pohjoiseen tai etelään. Pituuskulma puolestaan lasketaan Greenwichistä itään tai länteen. Koordinaattilukujen kasvusuunta voidaan esittää seuraavilla ilmaisuilla:

- pohjoista leveyttä, lyhennettynä suomenkielessä P ja englannin kielessä N
- eteläistä leveyttä, lyhennettynä E tai S
- itäistä pituutta, lyhennettynä I tai E
- läntistä pituutta, lyhennettynä L tai W.

Kulman arvo voidaan antaa asteina (°), minuutteina (’) ja sekunteina (”) tai asteina ja minuutteina tai desimaaliasteina. Esimerkiksi erään Rovaniemellä sijaitsevan kohteen maantieteelliset koordinaatit ovat ϕ = 66°29’40”P = 66°29.67’P = 66.4945°P ja λ = 25°44’21”I = 25°44.35’I = 25.3725°I. Laskettaessa pohjoinen leveys ja itäinen pituus ovat positiivisia lukuja ja vastaavasti eteläinen leveys ja läntinen pituus ovat negatiivisia lukuja.

Maantieteellinen koordinaatisto voidaan esittää maapallon pinnalla asteverkkona. Sen muodostavat tasaisin astevälein piirretyt pituus- ja leveyspiirit. Napapiirit ja kääntöpiirit ovat erityisiä leveyspiirejä, jotka liittyvät Auringon aseman vuotuiseen

vaihteluun taivaalla ja päivän pituuteen. Esimerkiksi pohjoisen napapiirin pohjoispuolella vallitsee kesällä yötön yö ja talvella auringoton päivä vähintään yhtenä vuorokautena. Havaittavana ilmiönä napa- ja kääntöpiirit ovat tuttuja monille ihmisille, mutta niitä kuvaavat tarkat yksityiskohdat ovat useimmille vieraita. Tieteellisen täsmällisesti napapiirien ja kääntöpiirien paikan määrittää Maan ekvaattoritason ja ratatason eli ekliptikan välinen kulma, jota kutsutaan ekliptikan kaltevuudeksi. Se suuruus on likimäärin $\varepsilon = 23.5°$, mutta arvo vaihtelee määrätyissä jaksoissa. (Kuva 114.)




**KUVA 114** *a) Asteverkko. b) Erityiset leveyspiirit.*

Vaikka maantieteellinen koordinaatisto on luonteva tapa esittää kohteen sijainti pallopinnalla, on se ongelmallinen kartan tekemisen ja etäisyyksien laskemisen kannalta, koska kohteiden etäisyyserot eivät ole suoraan verrannollisia niiden leveys- ja pituuskulmaeroihin. Esimerkiksi yhden asteen matka itään napapiirillä on eripituinen matka kuin päiväntasaajalla.

### 4.3.3 Ellipsoidikeskinen suorakulmainen koordinaatisto

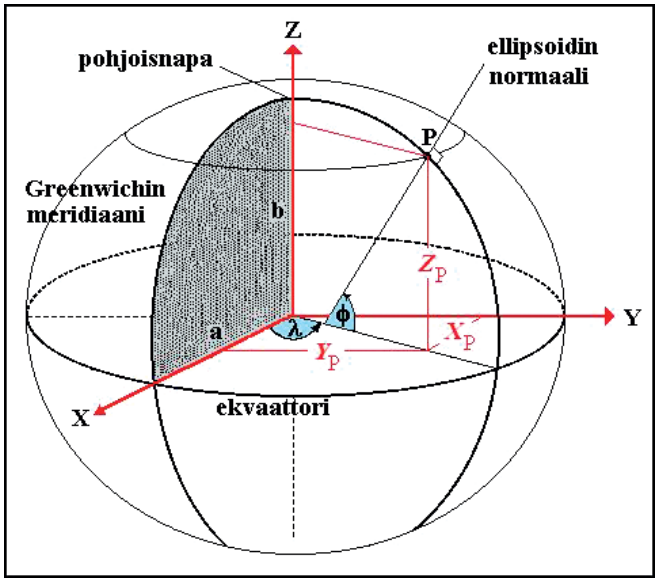
Maan muoto kuvaavaan pyörähdysellipsoidiin voidaan kiinnittää kolmiulotteinen suorakulmainen koordinaatisto (kuva 115, s. 143), jonka
origo on pyörähdysellipsoidin keskipisteessä

- X- ja Y-akselit ovat ekvaattoritasossa (oikeastaan isoakselin piirtämässä isoympyrätasossa),
- X-akseli osoittaa ja kasvaa nollameridiaanin suuntaan
- Y-akseli on tätä vastaan kohtisuorassa ja kasvaa itään
- Z-akseli yhtyy Maan pyörimisakseliin (oikeammin pyörähdysellipsoidin pikkuakseliin) ja kasvaa pohjoisnavalle.

Tällainen koordinaatisto voi olla realisaatioltaan sellainen, että sen origo sijaitsee Maan painopisteessä. Tällöin sanotaan, että koordinaatisto on geosentrinen eli maa-

keskinen. Satelliittipaikannuksessa, GPS-järjestelmän yhteydessä käytettävä WGS84-järjestelmä (World Geodetic System 1984) on geosentrinen koordinaattijärjestelmä.

Ellipsoidikeskinen koordinaatisto on epäkäytännöllinen kartan tuottamisen ja tavanomaisen mittaamisen kannalta, koska sen koordinaattitasot eivät yhdy maanpinnan vaaka- tai pystytasoihin kuin erikoistapauksissa. Satelliittipaikannuksessa se on kuitenkin tarpeellinen koordinaatisto, kuten myös koordinaattijärjestelmien välisissä muunnoslaskuissa.



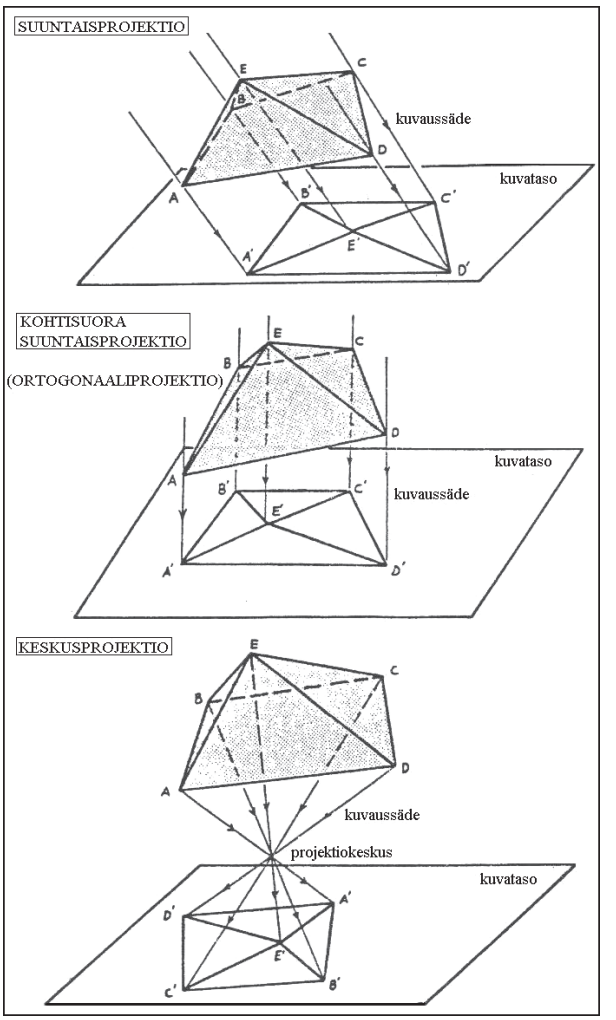

**KUVA 115** *Ellipsoidikeskinen suorakulmainen koordinaatisto. Koordinaatistoa käytetään satelliittipaikannuksessa. Sitä tarvitaan laskentakoordinaatistona myös koordinaattijärjestelmien välisiä muunnoksia tehtäessä.*

## 4.3.4 Karttaprojektiot

Jos halutaan esittää maantieteellisessä koordinaatistossa paikannetut kohteet kartalla tai vaikkapa tietokoneen kuvaruudulla, ei se onnistu suoraan. Karttakuvan tuottamista varten tulee siirtyä kulmamitoista pituusmittoihin. Koordinaatistojen kannalta tämä tarkoittaa siirtymistä ellipsoidipinnan maantieteellisistä koordinaateista karttaprojektion kautta suorakulmaiseen koordinaatistoon.

Määritelmänsä mukaan projektio on kappaleen tasokuva. Insinööritieteissä ja kartan käyttäjien keskuudessa pidetään tärkeänä, että kuva on mitattavissa. Toisin sanoen kappaleen geometria ja mitat tulee hallita kuvan avulla. Tämän vuoksi insinööritieteissä ja kartografiassa käytetään määrättyjä projektioita, kuten suuntaisprojektiot ja keskusprojektio. (Kuva 116, s. 144.)

Suuntaisprojektiossa kuvattavasta kappaleesta lähtevät kuvaussäteet kulkevat yhdensuuntaisina kuvatasolle. Tämän projektion erikois-tapaus on kohtisuora yhdensuuntaisprojektio eli ortogonaaliprojektio. Siinä kuvaussäteet kohtaavat kuvatason suorassa kulmassa. Mongen projektio on tunnettu ortogonaaliprojektion käyttötapa, jossa kappa-leen kuva muodostetaan kolmelle toisiinsa nähden kohtisuorassa olevalle kuvatasolle. Insinöörit ovat perinteisesti käyttäneet Mongen projektiota kappaleiden mittapiirustusten esittämiseen. Keskusprojektiossa kuvaussäteet kulkevat yhden pisteen, projektiokeskuksen, kautta kuvatasolle. Keskusprojektiota kutsutaan perspektiivikuvaksi. Silmä ja kamera muodostavat kuvan tällä tavoin. Keskusprojektio on tärkeä projektio muun muassa kaukokartoituksessa ja fotogrammetriassa, koska näillä mittaus- ja kartoitustekniikan osa-alueille käytetään mittauksissa hyväksi kameralla ja muilla kuvauslaitteilla otettuja kuvia. (Kuva 116.)

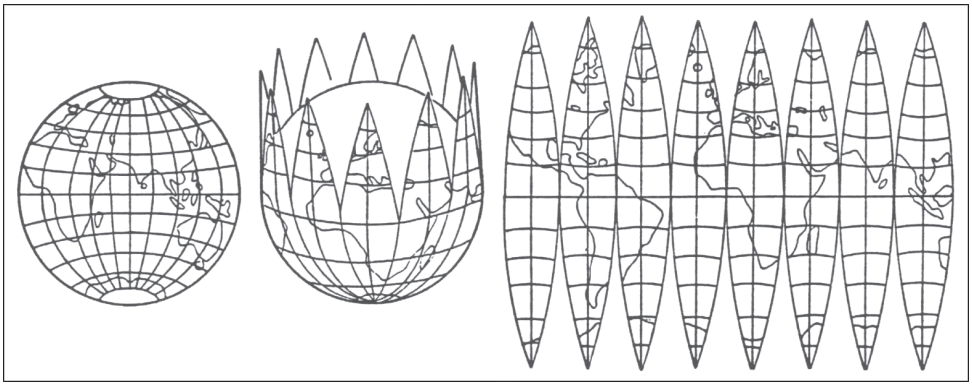



**KUVA 116** *Suuntaisprojektio, ortogonaaliprojektio ja keskusprojektio (Heinonen 1987, s. 10).*

Kappale näyttää erilaiselta, kun sitä tarkastellaan eri suunnista. Ei ole itsestään selvää, että tasokuvasta voi päätellä tai mitata kappaleen geometriset suhteet oikein. Ihminen on tottunut tarkastelemaan ja tulkitsemaan perspektiivikuvia, koska silmä muodostaa keskusprojektion. Ihmiselle on kehittynyt sisäisiä tulkintamalleja perspektiivikuvien tarkasteluun. Voimme esimerkiksi sanoa, että pöydän kulma on suora, vaikka emme sitä sellaisena näekään. Sisäiset tulkintamallit eivät kuitenkaan välttämättä toimi, kun tutkimme kuvia muissa projektioissa. Jotta pystymme tekemään kuvasta oikeita kappaleen geometriaa koskevia päätelmiä, meidän tulee tuntea projektion kuvaustekniset ominaisuudet.

Kun projektio on yleisesti kappaleen tasokuva, karttaprojektio on erityisesti maapallon tasokuva. Kartoilla voidaan käyttää edellä kuvattuja projektioiden perustyyppejä (kuva 116, s. 144). Kun tehdään kartta pieneltä alueelta, esimerkiksi rakennuspaikan asemapiirustus, on kartta ortogonaaliprojektio vaakatasolle. Yleisesti karttaprojektiot kuitenkin eroavat edellä mainituista projektioista kuvatasojen ja kuvaussäteiden kulun osalta. Syynä on se, että karttaprojektioissa hyödynnetään Maan pallonmuotoisuutta.

Karttakuvauksen tekninen perusongelma on, että pallopintaa ei voida projisoida tasolle vääristämättä kohdetta. Toisin sanoen kohteessa mitatut kulmat, suunnat, pinta-alat ja pituudet eivät välttämättä kuvaudu samassa suhteessa kuin ne ovat kohteessa. Pallopinta ei oikene tasokuvaksi ilman jonkinasteista väkivaltaa. (Kuva 117.)

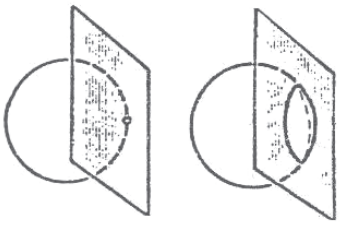
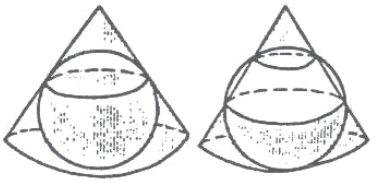
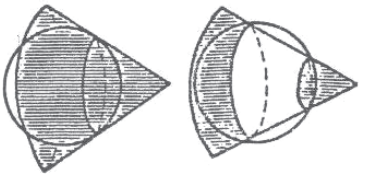
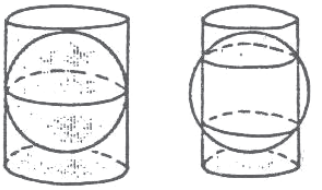
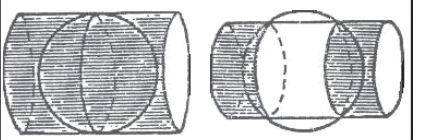


**KUVA 117** *Maapallon pintaa ei voi levittää tasoksi rikkomatta tai venyttämättä sitä (Heinonen 1987, s. 32–33).*

Karttaprojektiota on monenlaisia, joten on järkevää luokitella niitä. Kuvatason perusteella karttaprojektiot ovat joko taso-, kartio- tai lieriöprojektioita. Käytössä on myös määrittelyltään puhtaasti matemaattisia projektioita, joita ei voida tällä tavoin havainnollistaa. Tasoprojektiossa kuvataso on matemaattinen taso. Kartioprojektiossa kuva muodostetaan kartiopinnalle ja lieriöprojektiossa lieriö-

pinnalle. Kartio ja lieriö ovat sellaisia matemaattisia pintoja, jotka voidaan kehittää tasoksi. Tämä tarkoittaa, että ne voidaan leikata pituussuunnassa auki ja levittää tasoksi. (Kuva 118.)

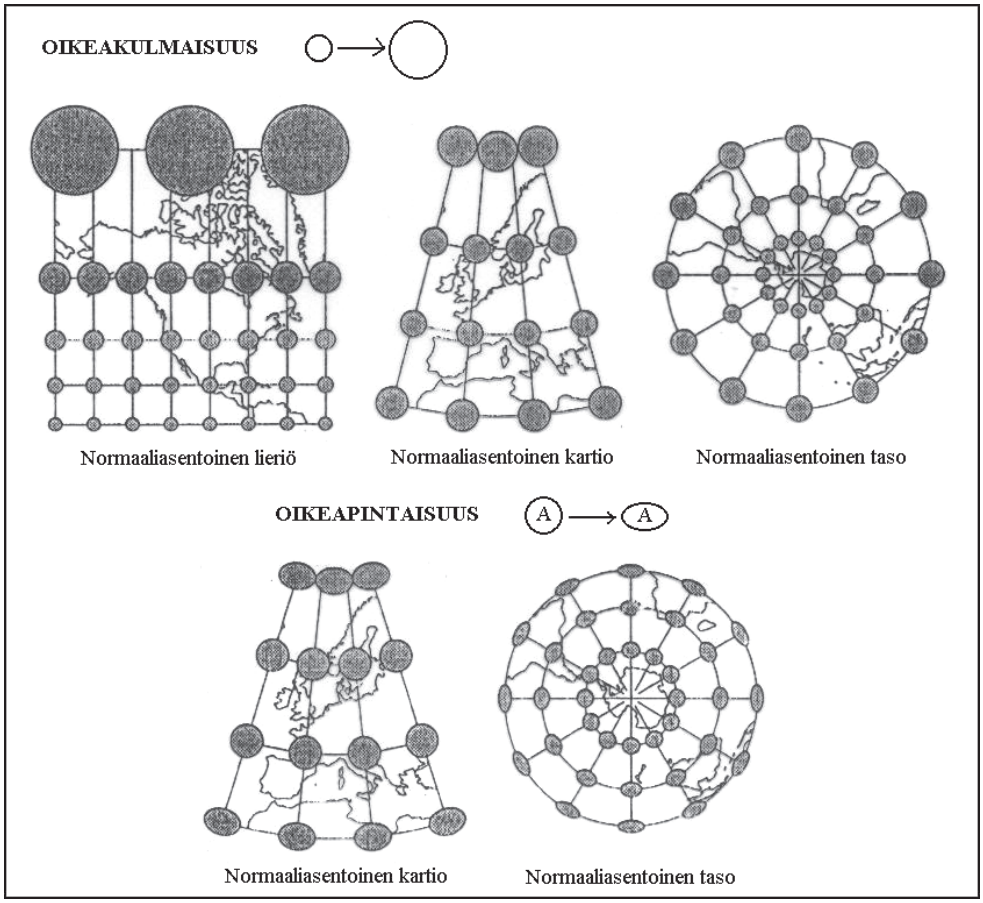
Sivuavassa projektiossa kuvataso on joko maapallon tangenttitaso tai kartio tai lieriö, joka sivuaa maapalloa pitkin sivuamisympyrää. Leikkaavassa projektiossa taso, kartio tai lieriö leikkaa maapallon pinnan. Normaaliasentoisessa eli perusasentoisessa tasoprojektiossa kuvataso on kohtisuorassa maapallon pyörimisakseliin nähden ja poikittaisasentoisessa se on yhdensuuntainen pyörimisakselin kanssa. Normaaliasentoisen kartion tai lieriön symmetria-akseli yhtyy pyörimisakseliin. Vastaavasti poikittaisasentoisessa projektiossa symmetria-akseli on kohtisuorassa pyörimisakseliin nähden. (Kuva 118.)

| | PERUSASENTOINEN | | POIKITTAISASENTOINEN | |
|---|---|---|---|---|
| | Sivuava | Leikkaava | Sivuava | Leikkaava |
| TASO-PROJEKTIO | | |  | |
| KARTIO-PROJEKTIO |  | |  | |
| LIERIÖ-PROJEKTIO |  | |  | |
| MATEMAATTINEN PROJEKTIO | | | | |

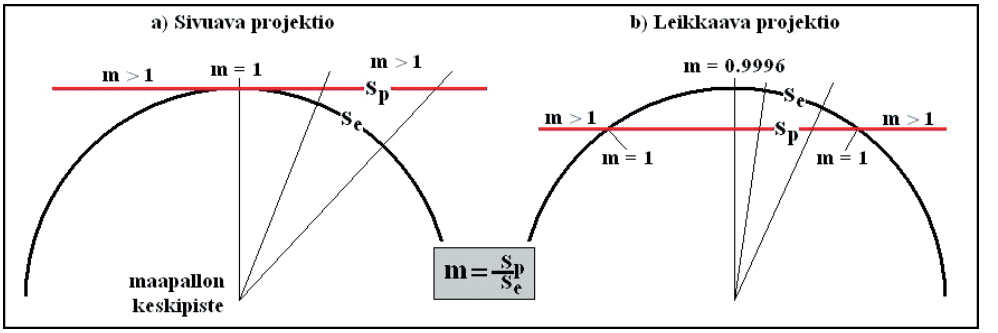
**KUVA 118** *Karttaprojektioiden jaottelu projektiopinnan perusteella. Perusasentoista projektiota sanotaan myös normaaliasentoiseksi projektioksi. (Heinonen 1987, s. 35.)*

### 4.3.5 Kartan kuvaustekniset ominaisuudet

Kuvaustekniset ominaisuudet määrittävät, mitä maanpinnalla mitatun kohteen mitoille ja muodolle tapahtuu, kun se esitetään kartalla. Kuvausteknisten ominaisuuksien yhteydessä käytetään nimityksiä oikeakulmaisuus, oikeapintaisuus ja oikeapituisuus. Oikeakulmaisessa eli konformisessa projektioissa maanpinnan pienialaisten kohteiden muodot säilyvät kuvauksessa. Oikeapintaisessa projektiossa maanpinnan kohteiden pinta-alojen suhteet säilyvät kuvauksessa. Oikeapituisessa projektiossa etäisyyksien suhteet säilyvät kuvauksessa eli kartta on vakiomittakaavainen. (Kuvat 119 ja 120, s. 148.)




**KUVA 119** *Kartan oikeakulmaisuus ja oikeapintaisuus. Maapallon pinnalle on asteverkon leikkauskohtiin asetettu samankokoisia ympyröitä. Oikeakulmaisissa projektioissa ne kuvautuvat ympyröiksi eli kohteiden muoto säilyy. Oikeapintaisissa projektioissa ne kuvautuvat ellipseiksi, joilla on sama pinta-ala.*

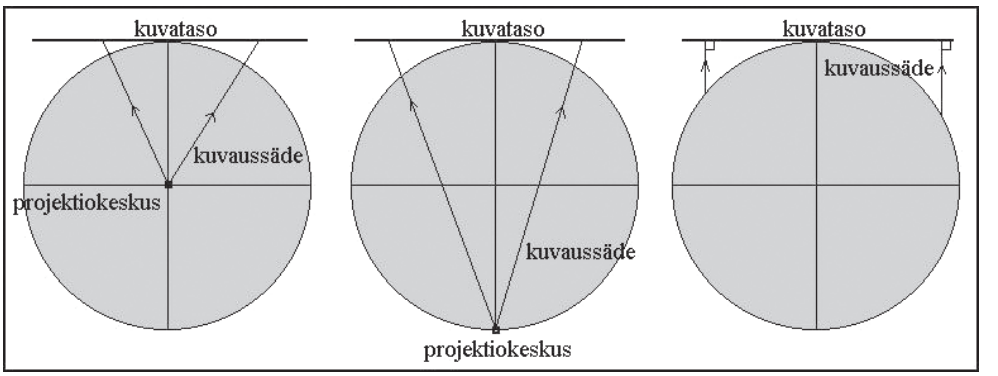



**KUVA 120** *Projektion mittakaavakerroin voi olla yksi vain maapallon pinnan ja projektiopinnan leikkauskohdissa. Näissä kohdin maapallon pinnalla mitattava matka ($s_e$) on yhtä suuri kuin projektiopinnalla mitattava matka ($s_p$)*

Valitettavasti mikään kartta ei voi olla koko projektion alueella oikeapituinen. Tämä ominaisuus on mahdollista toteuttaa vain joissakin projektion peruspisteissä ja -suunnissa (kuva 120). Monien käytännön sovellusten kannalta pienialaisten alueiden karttaprojektioita voidaan kuitenkin pitää oikeapituisina.

Sekä taso-, lieriö- että kartioprojektiot voivat olla oikeapintaisia tai oikeakulmaisia. Kuitenkin vain toinen näistä ominaisuuksista voi olla kerrallaan voimassa. Kuvausteknillisiltä ominaisuuksiltaan kartta voi siis olla joko oikeakulmainen tai oikeapintainen. Kartta ei ole periaatteessa koskaan oikeapituinen eli vakiomittakaavainen. Välttämättä mikään näistä kuvausteknisistä ominaisuuksista ei toteudu. Kun kartan projektio sovitaan, kyse on kartan käyttötarkoituksen perusteella tehtävästä valinnasta.

Kartan kuvausteknisten ominaisuuksien kannalta kuvaussäteiden kulku on ratkaiseva tekijä (kuva 121). Useimmissa karttaprojektioissa kuvaussäteet eivät kulje suoraviivaisesti, vaan niiden kulkua säädellään matemaattisesti haluttujen kuvausteknisten ominaisuuksien tuottamiseksi.

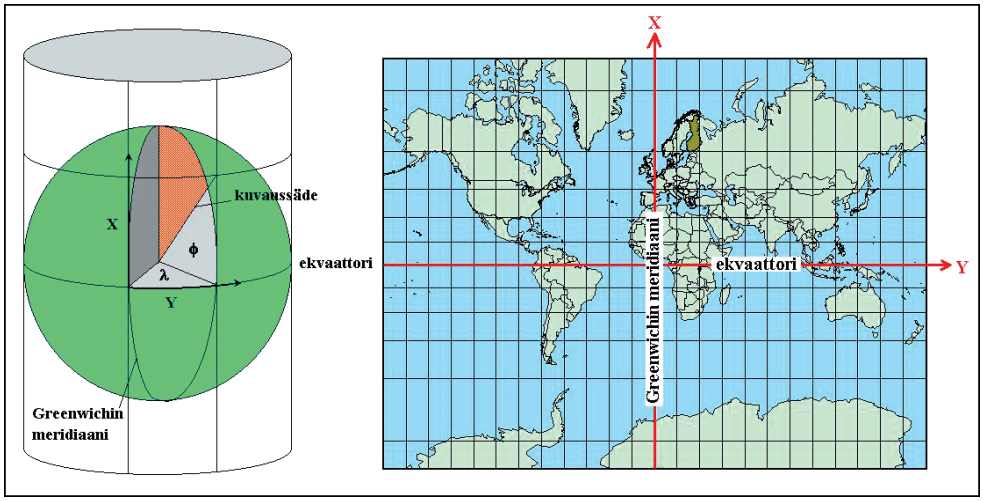



**KUVA 121** *Vaihtoehtoisia kuvaussäteiden kulkutapoja tasoprojektiossa. Kuvaussäteiden kulkutapa määrittää kartan kuvaustekniset ominaisuudet.*

Tasoprojektiot sopivat erityisen hyvin napa-alueiden karttoihin. Pallonpuoliskoa suuremman alueen kuvaaminen ei ole mielekästä tasoprojektioissa. Tasoprojektiot sopivat myös lentoliikenteen karttoihin ja erityisalana tähtikarttoihin. Kartioprojektioita käytetään esimerkiksi maanosien kartoissa. Ne sopivat myös sellaisten maiden yksityiskohtaisiin karttoihin, joiden alueellinen muoto on pitkä itä-länsisuunnassa. Matemaattisia projektioita ei voida havainnollistaa projektiopintojen ja kuvaussäteiden avulla. Niitä käytettäessä maapallon pinnan kohteiden kuvaus määritellään puhtaasti analyyttisesti. Matemaattisia projektioita käytetään monissa koko maapalloa esittävissä karttakuvauksissa.

### 4.3.6 Mercatorin projektio ja suorakulmainen koordinaatisto

Yksityiskohtaisten maasto- ja merikarttojen kannalta oikeakulmaiset lieriöprojektiot ovat erityisen tärkeitä, koska ne säilyttävät pienialaisten kohteiden muodon ja helpottavat muun muassa suuntien käyttöä. Lieriöprojektioihin liittyy läheisesti hollantilainen Gerhard Mercator (1512–1594). Hän julkaisi 1569 maailmankartan perusasentoisessa lieriöprojektiossa, joka edelleen kantaa hänen nimeään. (Kuva 122.)



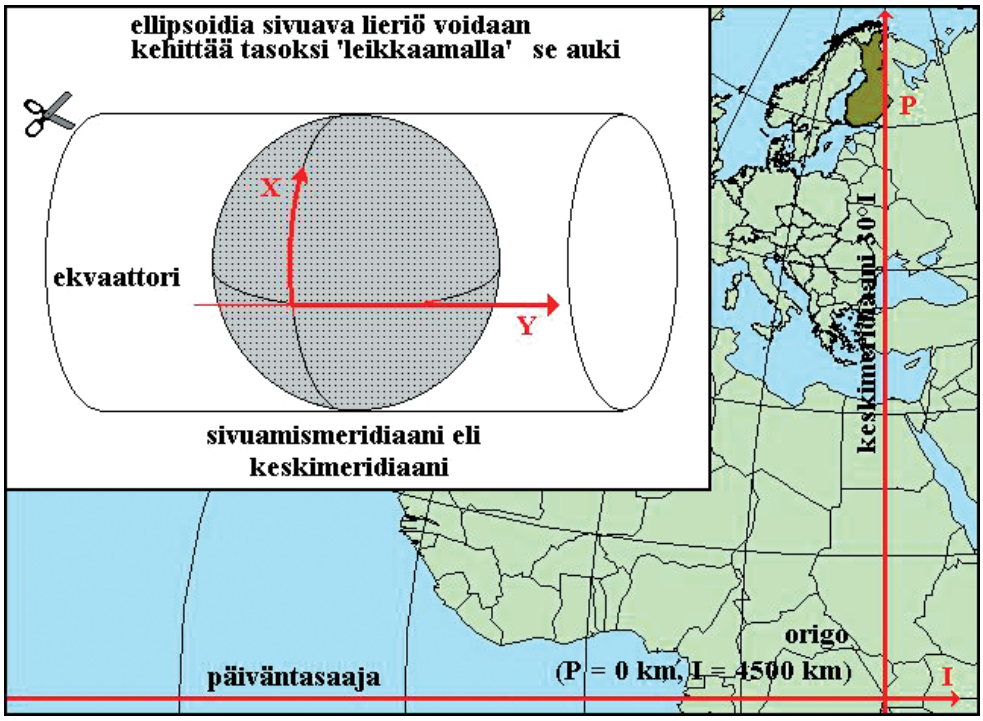

**KUVA 122** *Perusasentoinen Mercatorin projektio, joka on oikeakulmainen sivuava lieriöprojektio. Sivuamisympyrä on päiväntasaajaa. Vasemmalla on esitetty alkuasetelma projektioyhtälöiden johtamiseksi. Kuvaussäde ei todellisuudessa kulje suoraviivaisesti maapallon keskipisteestä projektiopinnalle, vaan sen täsmällinen kulku on hieman monimutkaisempi asia. Lieriöpinnalle ja karttatasolle piirretyt suorakulmaiset koordinaatistot (X, Y) näyttävät, kuinka kartan suorakulmainen koordinaatisto määritellään.*

Perusasentoista Mercatorin projektiota käytetään muun muassa merikartoilla, koska projektioon piirretty suora viiva (loksodromi eli kaartoviiva) leikkaa pituuspiirit maapallon pinnalla samassa kulmassa kuin kartalla. Näin kartalta on helppo mitata kulkusuunta pisteestä A pisteeseen B tai merkitä aluksen reitti kartalle kulkusuuntien ja matkojen perusteella. Projektiota käytetään yleisesti myös maailmankartoissa.

Perusasentoisessa Mercatorin projektiossa pituuspiirit kuvautuvat yhdensuuntaisina suorina, jotka ovat tasavälein. Leveyspiirit ovat kohtisuorassa pituuspiireihin nähden, mutta niiden välimatkat kasvavat päiväntasaajalta navoille päin mentäessä. Tämä tarkoittaa, että matkat ja pinta-alat vääristyvät napa-alueilla huomattavasti. Erityisesti pohjois- ja etelänavat kuvautuvat äärettömän kauas päiväntasaajan mittaisiksi viivoiksi. Napa-alueita ei voikaan esittää mielekkäällä tavalla perusasentoisessa Mercatorin projektiossa.

Perusasentoisen Mercatorin projektion projektiopinnalle on yksinkertaista määritellä suorakulmainen koordinaatisto, niin että X-akseli on Greenwichin meridiaani ja Y-akseli on päiväntasaaja. Menettely on perusteltua, koska mainitut asteverkon viivat ovat maantieteellisten koordinaattien vertailukohtia. (Kuva 122, s. 149.)

Suomalaisten maastokarttojen ja maastomittauksissa käytettävien suorakulmaisten koordinaatistojen kannalta poikittaisasentoiset Mercatorin projektiot ovat erityisen tärkeitä. Esimerkiksi Suomen kartastokoordinaattijärjestelmä (KKJ) perustuu poikittaisasentoiseen sivuavaan Mercatorin projektioon. Tässä projektiossa projektiopinta sivuaa maapalloa pitkin pituuspiiriä, jota sanotaan keskimeridiaaniksi. Poikittaisasentoisen lieriön pituusakseli on kohtisuorassa maapallon pyörimisakseliin nähden. (Kuva 123, s. 151).




**KUVA 123** *Poikittaisasentoinen sivuava Mercatorin projektio on oikea-kulmainen eli konforminen karttaprojektio. Kuvassa esitetään, kuinka lieriö-pinnalle ja karttatasolle määritellään suorakulmainen koordinaatisto. Kartan koordinaatiston (P, I) määrittely vastaa Suomen kartastokoordinaattijärjestelmän 4. kaistan peruskoordinaatistoa.*

Poikittaisasentoisessa Mercatorin projektiossa keskimeridiaani ja päiväntasaaja kuvautuvat suorina viivoina (kuva 123). On luontevaa käyttää näitä asteverkon viivoja suorakulmaisen koordinaatiston akseleina. Muut pituus- ja leveyspiirit ovat kaarevia viivoja, jotka leikkaavat toisensa suorassa kulmassa, koska projektio on oikeakulmainen. Keskimeridiaanin lähellä kuvautumisvirheet ovat pieniä, mutta keskimeridiaanista kaukana olevat alueet vääristyvät vastaavalla tavalla kuin napa-alueet perusasentoisessa Mercatorin projektiossa.

Muun muassa maat, joiden alueellinen muoto on pitkä pohjois-eteläsuunnassa, käyttävät yksityiskohtaisten karttojen projektiona poikittaista Mercatorin projektiota. Tällöin keskimeridiaani voidaan valita kulkemaan kuvattavan alueen keskeltä. Jos maa on laaja myös itälänsisuunnassa, käytetään kartoilla kaistajakoa. Yhdellä projektiokaistalla kuvataan vain rajallinen alue, esimerkiksi 1.5° levyinen kaistale keskimeridiaanin kummaltakin puolelta. Kaistajaon avulla pidetään matkojen kuvautumisvirheet mahdollisimman pieninä.

### 4.3.7 Tehtäviä

**110.** Miksi maantieteellinen leveys kasvaa pohjoiseen ja pituus itään?

**111.** Mitkä ovat maantieteellisten koordinaattien ääriarvot Suomen alueella?

**112.** Rovaniemen likimääräiset maantieteelliset koordinaatit ovat $\phi$ = 66°29'P ja $\lambda$ = 25°44'I. Mitkä ovat vastakkaisella puolella maapalloa sijaitsevan paikan eli Rovaniemen antipodin koordinaatit? Mitä siellä on?

**113.** Jos maapallon kaarevuussäde on 6380 km, niin kuinka pitkä matka on Rovaniemeltä a) pohjoisnavalle, b) päiväntasaajalle?

**114.** Jos maapallon kaarevuussäde on 6380 km, niin kuinka pitkä on leveyspiiri a) 0°P eli ekvaattori, b) 10°P, c) 60°E?

**115.** Jos maapallon kaarevuussäde on 6380 km, niin kuinka pitkää matkaa vastaa yksi kaariminuutti (1') meridiaanin suunnassa? Entä kuinka pitkä on kaariminuuttia vastaava matka leveyspiirin $\phi$ = 66°P suunnassa?

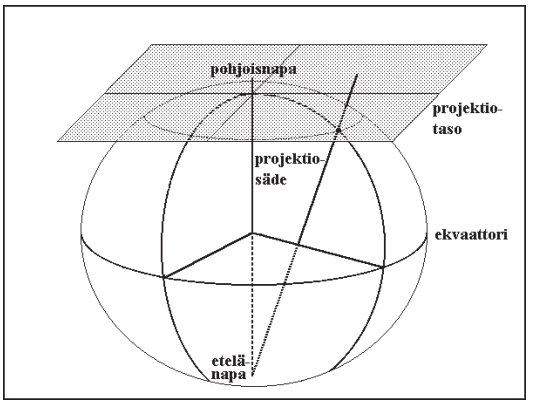
**116.** Tintti etsi ystävineen merirosvon aarretta. Sen piti sijaita paikassa 20°37'42"N ja 70°52'15"W, mutta sitä ei sieltä löytynyt. Syyksi paljastui, että aarteen kätkemisen aikoihin pituuskulma laskettiinkin Pariisin meridiaanista eikä Greenwichin meridiaanista. Mistä paikasta aarre löytyi? (Herge 1976. Rakham Punaisen aarre. Tintin seikkailut 17, Otava, Helsinki.)

**117.** Tutustu johonkin maailmankarttoja esittelevään karttakirjaan. Millaisia karttaprojektioita siinä käytetään? Millaisia projektionimiä siinä käytetään? Millaisia käytetyt projektiot ovat kuvausteknillisiltä ominaisuuksiltaan?

**118.** Maailmankartan sanotaan olevan oikeapintainen. Kuinka varmistat väittämän paikkansapitävyyden?

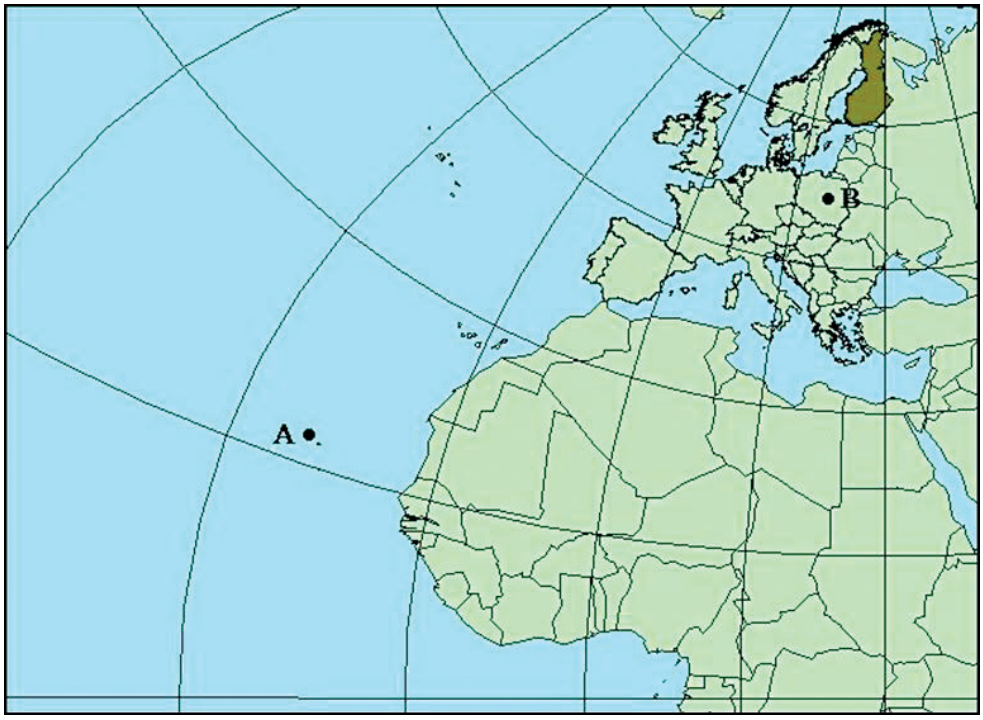
**119.** Missä kohtaa projektiota kartan kuvautumisvirheet ovat pienimmät kaikissa projektioissa? Miksi näin on?

**120.** a) Piirrä seuraava kuvan esittämässä stereografisessa projektiossa pohjoisen pallonpuoliskon asteverkko 30° välein. b) Selvitä lähteiden avulla stereografisen projektion kuvaustekniset ominaisuudet. (Kuva 124.)




**KUVA 124** *Tehtävä 120. Stereografisen projektion periaate.*

Seuraavat tehtävät (121- 126) tehtävät liittyvät kuvan 125 karttaan.




**KUVA 125** *Tehtävät 121–126. Poikittaisasentoisessa, sivuavassa Mercatorin projektiossa oleva kartta. Kartan keskimeridiaani on* $\lambda_0 = 30°I$. *Asteverkon viivat on piirretty 15° välein.*

**121.** Merkitse karttaan päiväntasaaja, Greenwichin meridiaani, keskimeridiaani ja leveys- ja pituuspiirien asteluvut.

**122.** Mitkä ovat pisteiden A ja B maantieteelliset koordinaatit?

**123.** Mikä on pisteiden A ja B likimääräinen välimatka a) pohjoiseteläsuunnassa, b) itälänsisuunnassa? Onko tehtävä yksikäsitteinen?

**124.** Mikä seikka kartalla viittaa siihen, että sen karttaprojektio on oikeakulmainen?

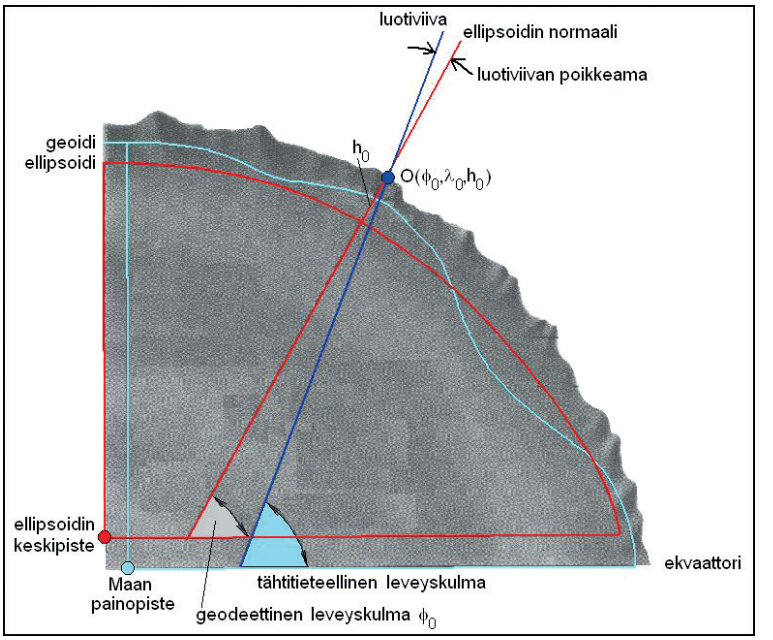
**125.** Mikä on kartan likimääräinen mittakaava keskimeridiaanilla?

**126.** Miten kartasta näkee, että kartta ei ole vakiomittakaavainen?

## 4.4 Koordinaattijärjestelmät

### 4.4.1 Geodeettinen datumi

Koordinaattijärjestelmä syntyy, kun koordinaatisto kiinnitetään maahan. Koordinaatiston kiinnittämiseen liittyy käsite geodeettinen datumi. Puhutaan myös geodeettisesta vertailujärjestelmästä. Vertailujärjestelmät jaetaan horisontaaliseen ja vertikaaliseen datumiin. Horisontaalinen datumi kiinnittää koordinaatiston ja vertikaalinen datumi korkeustason. Puhuttaessa pelkästään geodeettisesta datumista, tarkoitetaan horisontaalista datumia. (Kuva 126.)

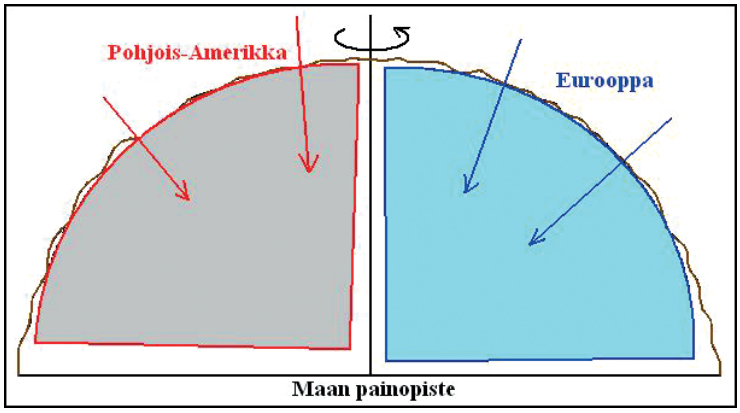



**KUVA 126** *Geodeettinen datumi, täsmällisemmin horisontaalinen datumi, määrittää lähtöpisteen paikan vertausellipsoidin suhteen. Luotiviivan poikkeama on ellipsoidin normaalin ja luotiviivan välinen kulma. Luotiviiva on geoidin normaali. Ellipsoidilla mitattavat maantieteelliset koordinaatit ovat geodeettisia koordinaatteja ja geoidin suhteet mitattavat koordinaatit ovat tähtitieteellisiä koordinaatteja. Luotiviivan poikkeamat ovat näiden koordinaattien eroja. Kuva on kaksiulotteinen, mutta todellinen geodeettisen datumin määrittelytilanne on kolmiulotteinen.*

Geodeettinen datumi määrittelee koordinaattijärjestelmän lähtöpisteen paikan vertausellipsoidin keskipisteen suhteen (kuva 126). Datumiin liittyy seuraavia määrittelyjä:

- pyörähdysellipsoidin eli vertausellipsoidin parametrit
- lähtöpisteen (O) maantieteelliset koordinaatit ($\phi_o$, $\lambda_o$)
- lähtösuunta toiseen pisteeseen
- luotiviivan poikkeamat lähtöpisteessä
- lähtöpisteen ellipsoidinen korkeus ($h_o$).

Geodeettinen datumi on tavallaan sopimusasia. Sen määrittely-parametrit voidaan jopa valita ilman tietoa suureiden suhteesta reaalimaailmaan. Tällainen menettely ei tietysti vie pitkälle, eikä se tue hyvää mittaustarkkuutta, mutta paikallisesti näinkin voidaan toimia. Datumi määrittelee koordinaattijärjestelmän paikan vertausellipsoidin suhteen, mutta määrittely ei suoraan sisällä sellaisia parametreja, jotka kertoisivat järjestelmän paikan esimerkiksi Maan painopisteen tai jonkin toisen koordinaattijärjestelmän suhteen. Suhde muihin järjestelmiin tulee aina määrittää mittaamalla. Ennen maailmanlaajuisten paikannusjärjestelmien käyttöönottoa eri mailla oli omat koordinaattijärjestelmänsä, joiden keskinäistä suhdetta ei välttämättä tarvinnut tietää. Kun nykyisin mitataan maailmanlaajuisesti satelliittien avulla, tulee tietää paikallisten järjestelmien suhde mittauksissa käytettävien satelliittijärjestelmien käyttämiin datumeihin. (Kuva 127.)

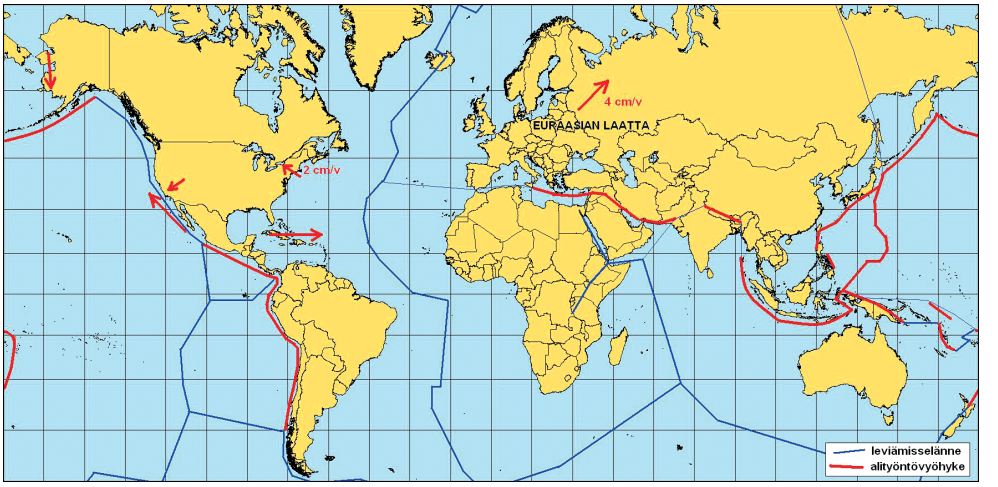



**KUVA 127** *Eri mailla ja alueilla on omat datuminsa. Tähän on historiallisia, geofysikaalisia ja mittausteknisiä syitä. Kahden geodeettisen datumin suhde selvitetään mittaamalla yhteisiä pisteitä kummassakin järjestelmässä.*

Geodeettinen datumi on koordinaattijärjestelmään liittyvä perussopimus. Se pannaan toimeen eli realisoidaan runkomittausten avulla. Runkomittausten yhteydessä maastoon rakennetaan pistemerkkejä, joille mitataan koordinaatteja datumin lähtöpisteestä alkaen. Runkopisteiden avulla järjestelmä tavallaan pultataan kallioon. Näin koordinaattijärjestelmä kiinnitetään konkreettisesti maahan.

Tärkeä geofysikaalinen syy siihen, että eri mailla ja alueilla on omia koordinaattijärjestelmiään, on mannerlaattojen liike. Maankuoren tiedetään jakautuvan tektonisiin laattoihin, jotka liikkuvat toistensa suhteen. Laattojen liike liittyy Maan sisäiseen lämmöntuotantoon ja sen aiheuttamiin vaipan konvektiovirtauksiin. Laattojen liikenopeudet ovat joitakin senttimetrejä vuodessa, suurimmillaan jopa 10 cm/v. Laattojen liikkeen vuoksi maailmanlaajuiset koordinaattijärjestelmät joudutaan kiinnittämään tähtitaivaan kohteisiin, sillä pelkästään Maahan fyysisesti kiinnitetty, koko maapallon laajuisesti käytettävä koordinaattijärjestelmä olisi hyvin vaikea

toteuttaa ja ylläpitää. Maailmanlaajuisissa koordinaattijärjestelmissä maanpäällisten kohteiden koordinaatit ovat ajasta riippuvia. Tämän vuoksi runkopisteiden avulla realisoituja järjestelmiä joudutaan päivittämään. Koska koordinaatit riippuvat ajasta, liitetään koordinaattijärjestelmiin vuosi, jolloin koordinaatit on määritetty. Ajankohtaa sanotaan järjestelmän epookiksi. (Kuva 128.)




**KUVA 128** *Maankuori rakentuu tektonisista laatoista, jotka liikkuvat toistensa suhteen. Suomi ja lähes koko Eurooppa sijaitsevat Euraasian laatalla, joka liikkuu koilliseen joitakin senttimetrejä vuodessa.*

## 4.4.2 Kartastokoordinaattijärjestelmä

Noin 40 vuotta Suomea on mitattu ja kartoitettu kartastokoordinaatti-järjestelmässä (KKJ). Edelleenkin se on yleisessä käytössä, mutta KKJ jää vähitellen pois käytöstä, kun on päätetty siirtyä ETRS89-järjestelmään. Koordinaattijärjestelmät ovat yllättävän pitkäikäisiä ja sitkeähenkisiä, joten on mahdollista, että 20 vuodenkin kuluttua jossain päin Suomea tehdään mittauksia kartastokoordinaattijärjestelmässä.

Koko itsenäisyyden ajan, viime vuosiin saakka, on Suomessa kartastotöiden pohjana ollut Hayfordin ellipsoidi (taulukko 6, s. 138) ja poikittaisasentoinen sivuava Mercatorin projektio, jossa käytetään 3° kaistajakoa. Projektiota kutsutaan Gauss-Krügerin projektioksi. Vastaavaa projektiota käytetään muun muassa Saksassa. Kuvausteknisiltä ominaisuuksiltaan se on oikeakulmainen eli konforminen projektio.

Itsenäisen Suomen alkuvuosina maassa käytettiin Helsingin järjestelmää (1924–1970). Sen lähtöpisteenä oli Helsingin Kallion kirkon tornin 1. luokan kolmiopiste. Järjestelmästä muodostui hyvin epähomogeeninen, koska se mitattiin vaiheittain. 1960-luvun alussa saatiin mitattua uusi 1. luokan kolmioverkko, johon kuului 291 pis-

tettä. Verkko tasoitettiin yhtenä kokonaisuutena 1966, jolloin laskennan lähtöpisteenä oli ED50-järjestelmässä oleva Simsiön kolmiopiste (SF 90). European Datum 1950 (ED50) on läntisen Euroopan kattava koordinaattijärjestelmä, joka perustuu eri maiden kolmioverkkojen monivaiheisiin tasoituslaskentoihin, jotka suoritettiin 1940- ja 1950-luvuilla. Simsiön kolmiopisteen kautta kartastokoordinaattijärjestelmä liittyy eurooppalaiseen ED50-järjestelmään. Satelliittimittausten alkuvaiheessa myös Suomen yhteys maailmanlaajuiseen WGS84-järjestelmään muodostettiin ED50-järjestelmän kautta.

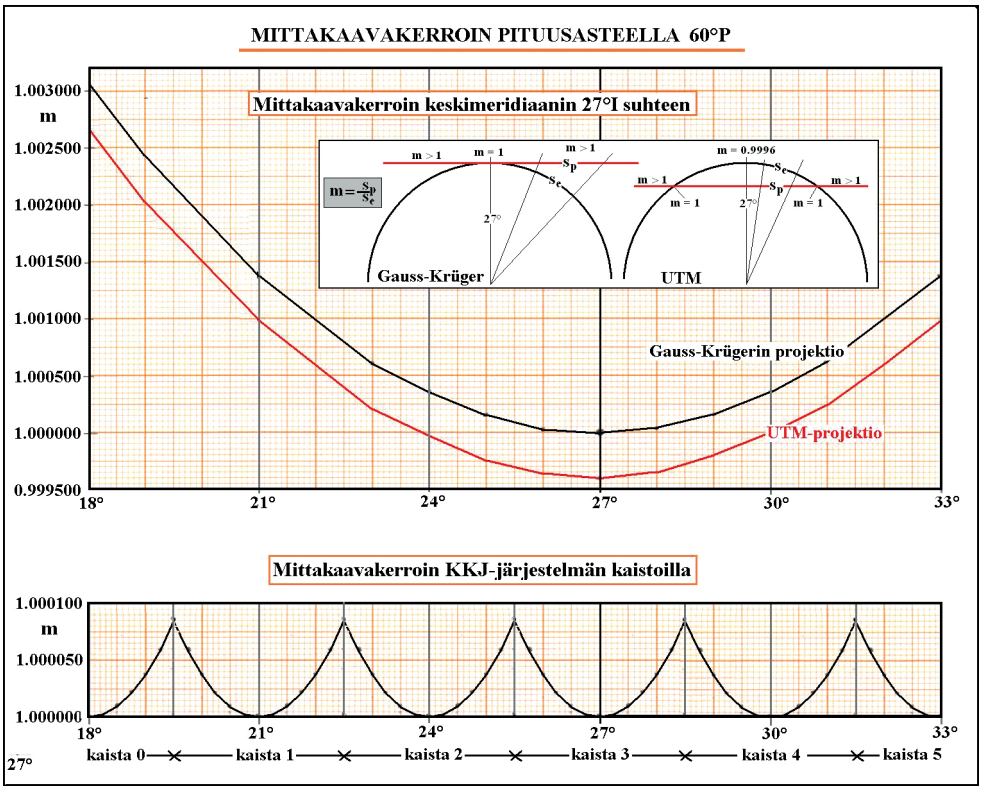
1960-luvun alussa mitatun kolmioverkon tasoituksen jälkeen I luokan verkko siirrettiin ja kierrettiin projektiotasolla yhtymään mahdolli-simman tarkoin vanhaan Helsingin järjestelmään 202 muunnospisteen avulla. Matemaattisesti tässä oli kyse tasokoordinaatistojen muunnoksesta, jossa käytettiin lineaarista yhdenmuotoisuusmuunnosta eli Helmertin muunnosta. Syynä tähän toimenpiteeseen oli se, että ei haluttu painaa uudestaan kaikkia maastokarttoja. Tasokoordinaattimuunnoksen vuoksi koordinaattilukujen muutokset olivat niin pieniä, että niillä ei ollut merkitystä karttojen silloisen käytön kannalta. Vanhaan Helsingin järjestelmään muunnetut I luokan kolmiopisteet muodostivat kartastokoordinaattijärjestelmän lähtöpisteistön. Silloinen maanmittaushallitus otti järjestelmän käyttöön vuonna 1970.

Nykyisen paikannusteknologian näkökulmasta kartastokoordinaatti-järjestelmä alkaa olla liian epätarkka ja epähomogeeninen. Järjestelmän heikkoudet periytyvät vanhan kolmioverkon puutteista. Sen mittakaava ja orientointi vaihtelevat verkon sisällä ja nämä virheet ylittävät selvästi nykyisillä mittausmenetelmillä saavutettavan mittaustarkkuuden. (Kuva 138, s. 173.)

### 4.4.3 KKJ:n suorakulmaiset koordinaatit

Kartastokoordinaattijärjestelmä muodostaa Suomen alueella käytettävän suorakulmainen koordinaattijärjestelmän, karttakoordinaatiston, joka on määritelty Gauss-Krügerin projektion pinnalle. Etäisyyksien kuvautumiseen liittyvän karttaprojektion mittakaavavirheen pienentämiseksi Suomi on jaettu kuuteen kolmen asteen levyiseen projektiokaistaan (kuva 129, s. 158 ja kuva 130, s. 159). Kuhunkin projektiokaistaan liittyy oma peruskoordinaatistonsa, niin että

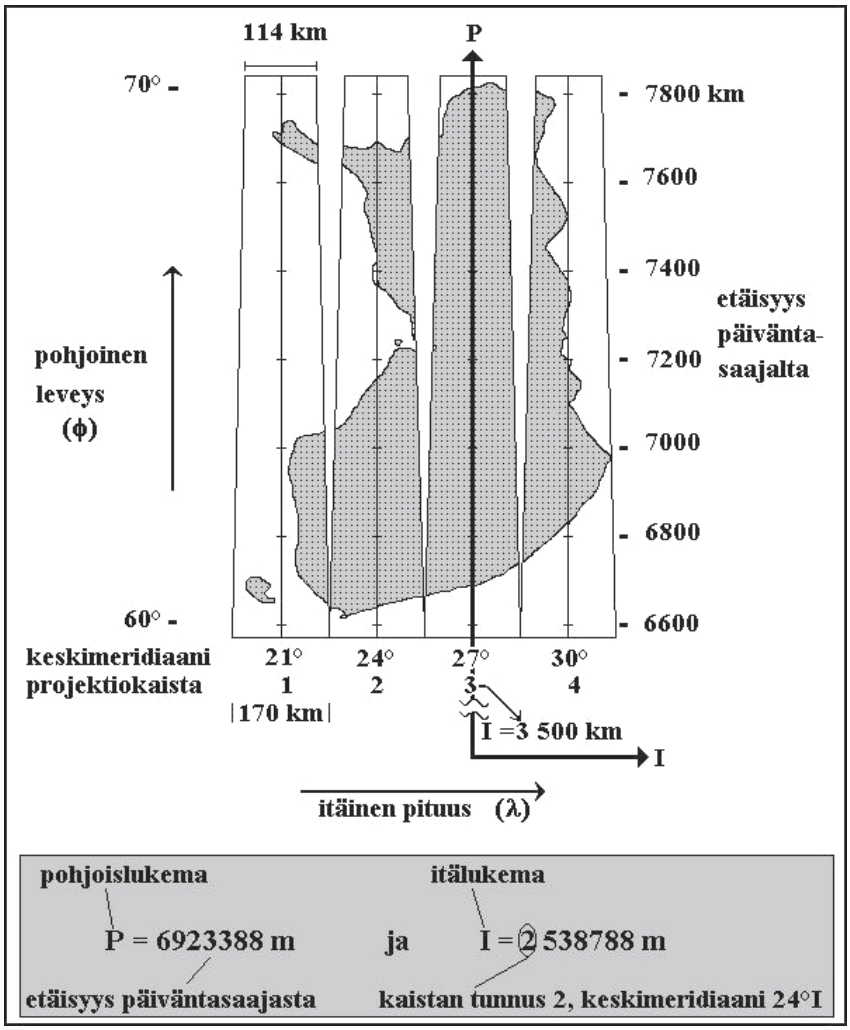
- kaistalla 0 keskimeridiaani on 18°I ja origossa $I$ = 500 km (puhutaan siirretystä origosta)
- kaistalla 1 keskimeridiaani on 21°I ja origossa $I$ = 1500 km
- kaistalla 2 keskimeridiaani on 24°I ja origossa $I$ = 2500 km
- kaistalla 3 keskimeridiaani on 27°I ja origossa $I$ = 3500 km
- kaistalla 4 keskimeridiaani on 30°I ja origossa $I$ = 4500 km
- kaistalla 5 keskimeridiaani on 33°I ja origossa $I$ = 5500 km.




**KUVA 129** *Kaistajaon vaikutus poikittaisasentoisen Mercatorin projektion mittakaavakertoimeen. Gauss-Krügerin projektio on sivuava poikittaisasentoinen Mercatorin projektio, jota käytetään muun muassa kartastokoordinaattijärjestelmässä. UTM-projektio on leikkaava, poikittaisasentoinen Mercatorin projektio, jota käytetään esimerkiksi ETRS89-järjestelmässä.*

Kaistojen 0 ja 5 keskimeridiaanit ovat Suomen rajojen ulkopuolella. Näitä kaistoja tarvitaan vain hyvin harvoin äärimmäisinä lännessä ja idässä sijaitsevien alueiden karttakuvauksissa. Usein koko maa halutaan esittää yhdessä projektiokaistassa. Tällöin käytetään 3. kaistan peruskoordinaatistoa, jolloin sitä kutsutaan yhtenäiskoordinaatistoksi. (Kuva 130, s. 159.)

Pohjoiskoordinaatti ($P$, $p$ tai $X$) on etäisyys päiväntasaajalta projektiotasoa pitkin mitattuna. Itäkoordinaatin ($I$, $i$ tai $Y$) arvo keskimeridiaanilla on 500 000 m. Luvun eteen laitetaan vielä kaistan tunnusnumero. Koska itäkoordinaatin arvo origossa ei ole nolla, sanotaan, että sillä on siirretty origo. Tunnusjärjestelmän ja origon siirron vuoksi Itäkoordinaatti ei siis ole etäisyys mistään tietystä kohtaa maapalloa. Kaistan peruskoordinaattien symboleina ovat isot kirjaimet $P$ ja $I$, yhtenäiskoordinaattien symboleina käytetään pieniä kirjaimia $p$ ja $i$, ja matemaattisissa esityksessä käytetään usein isoja kirjaimia $X$ ja $Y$.




**KUVA 130** *Periaatepiirros Suomen kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) kaistajaosta ja esimerkki koordinaattiluvuista. Suorakulmainen koordinaatisto määritellään Gauss-Krügerin projektiossa. Koordinaattikaistojen leveys on 3°. Kilometreinä mitattuna kaistan leveys muuttuu leveyskulman mukaan. Kuvasta puuttuvat itäisin ja läntisin projektiokaista (kaistat 0 ja 5), joita tarvitaan harvoin. Kaista 3, jonka keskimeridiaani on 27°I, on yhtenäiskoordinaatiston kaista. Geometrialtaan kuva ei ole täsmällinen.*

Suorakulmaisten koordinaattien lisäksi kartastokoordinaattijärjestelmässä voidaan käyttää myös maantieteellisiä koordinaatteja tai ellipsoidikeskisiä suorakulmaisia koordinaatteja. Viimeksi mainittuja koordinaatteja tarvitaan koordinaattijärjestelmien välisiä muunnoksia laskettaessa.

### 4.4.4 World Geodetic System 1984

World Geodetic System 1984 eli WGS84-järjestelmä on tärkeä koordinaattijärjestelmä, koska se on satelliittipaikannuksessa käytettävän GPS-järjestelmän koordinaattijärjestelmä. Sitä tai siihen läheisesti liittyviä järjestelmiä käytetään kaikkialla maapallolla. WGS84 on globaali koordinaattijärjestelmä. Satelliittipaikantimen käyttäjä pystyy kiinnittymään laitteellaan suoraan tähän järjestelmään. Tällöin paikannuksen tarkkuus ei ole kuitenkaan riittävä vaativiin käyttötarkoituksiin. Tarkimmissa mittauksissa käytetään apuna runkopisteitä, joiden koordinaatit tunnetaan WGS84-järjestelmässä tai oikeammin jossakin sen paikallisessa realisaatiossa.

WGS84 on geosentrinen suorakulmainen koordinaattijärjestelmä. Geosentrinen tarkoittaa, että järjestelmän origo sijaitsee Maan painopisteessä. Järjestelmä koordinaattiakselien määrittely vastaa ellipsoidikeskisen suorakulmaisen koordinaatiston määrittelyjä (kuva 115, s. 143) eräin tarkennuksin:

- origo on Maan painopisteessä
- X- ja Y-akselit ovat ekvaattoritasossa
- X-akseli osoittaa Greenwichin meridiaanin suuntaan
- Y-akseli on kohtisuorassa X-akselia vastaan kasvaen itään
- Z-akseli yhtyy Maan pyörimisakseliin.

WGS84-järjestelmän realisaatio on määritelty Yhdysvaltain armeijan karttaviraston (NIMA) toimesta. Määrittelyn taustalla on vuosikymmenien tieteellinen työ useissa eri maissa ja tutkimusorganisaatioissa. Järjestelmän määrittelyjä tarkennetaan ja päivitetään jatkuvasti. WGS84-järjestelmä liittyy läheisesti muihin maailmanlaajuisesti käytettäviin tähtitieteellisiin ja geodeettisiin vertailujärjestelmiin. GPS-järjestelmän valvontalohkon tukiasemat ovat järjestelmän realisoinnissa käytettyjä kiintopisteitä (kuva 249, s. 284).

Ellipsoidikeskisten suorakulmaisten koordinaattien lisäksi paikka voidaan esittää WGS84-järjestelmässä maantieteellisten koordinaattien tai suorakulmaisten karttakoordinaattien avulla. Jos käytetään projektiotasolla määriteltyjä suorakulmaisia karttakoordinaatteja, yleensä ne määritellään UTM-projektiossa (kuva 131, s. 163).

### 4.4.5 European Terrestrial Reference System 1989

Suomen valtakunnallisissa kartastotöissä ja paikkatietopalveluissa ollaan siirtymässä ETRS89-järjestelmään. Se on lyhenne sanoista European Terrestrial Reference System 1989. Uuteen koordinaattijärjestelmään siirtyminen tarkoittaa käytännössä siirtymistä maailman-laajuiseen WGS84-järjestelmään. ETRS89-järjestelmän suomalaista realisaatiota kutsutaan EUREF-FIN -järjestelmäksi. Järjestelmän vertausellipsoidi on GRS80 (taulukko 6, s. 138).

Vuonna 1990 IAG:n (International Association of Geodesy'n) piirissä esitettiin, että Euroopassa tulisi siirtyä käyttämään koordinaatistoa, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaatan deformoitumattomaan osaan (kuva 128, s. 156). Tuolloin sovittua järjestelmää kutsutaan ETRS89-järjestelmäksi. Määrittelyn realisoimiseksi toteutettiin jo vuonna 1989 Euroopan laajuiseen GPS-mittausohjelma EUREF89, jonka tuloksena saatiin Euroopan kattava yhtenäinen koordinaattijärjestelmä. Suomessa mittaukseen kuului neljä pistettä: Sjökulla, Jänhiälä, Nisula ja Kaunispää. EUREF89 on yhteneväinen kansainvälisen ITRS-järjestelmän (International Terrestrial Reference System) kanssa epookissa 1989.0. EUREF89 on kiinnitetty Euraasian mannerlaattaan, niin että järjestelmään kuuluvien pisteiden koordinaatit eivät muutu ajan mukana. Järjestelmästä on tullut yleiseurooppalainen standardi. Se on kiintopisteiden osalta tihein ja yhtenäisin käytettävissä oleva WGS84-järjestelmän realisaatio Euroopassa.

Suomen EUREF-pisteiden lukumäärää on lisätty edellä mainituista neljästä pisteestä myöhemmissä mittauksissa. Vuonna 1992 aloitettiin pysyvien GPS-asemien verkon, FinnRef-verkon, rakentaminen. Viimeisin verkon 12 asemasta otettiin käyttöön vuoden 1996 lopulla. Verkko loi perustan satelliittimittauksiin perustuville runkoverkon pistetihennyksille maassamme. Vuosina 1996–1997 Geodeettinen laitos mittasi sadan 1. luokan kolmiopisteen koordinaatit EUREF-standardin mukaisesti. Tämä sadan pisteen verkko yhdessä 12 pysyvän GPS-aseman kanssa muodostaa EUREF-FIN -koordinaatiston peruspisteistön. Vuosina 1998–1999 Geodeettinen laitos mittasi vielä noin 350 käyttöpisteen verkon. Nämä käyttöpisteet sijaitsevat helppopääsyisillä paikoilla teiden varsilla. Nykyisin verkon kiintopisteiden tiheys on Suomessa sellainen, että mittaajat pystyvät aina sitomaan omat mittauksensa EUREF-verkkoon ja toimimaan niiden kautta ETRS89-järjestelmässä. Suomessa realisoitua ETR89-järjestelmää voidaan kutsua EUREF-FIN -järjestelmäksi. Järjestelmässä mitattavia koordinaattieroja voidaan pitää identtisinä WGS84-järjestelmän koordinaattierojen kanssa.

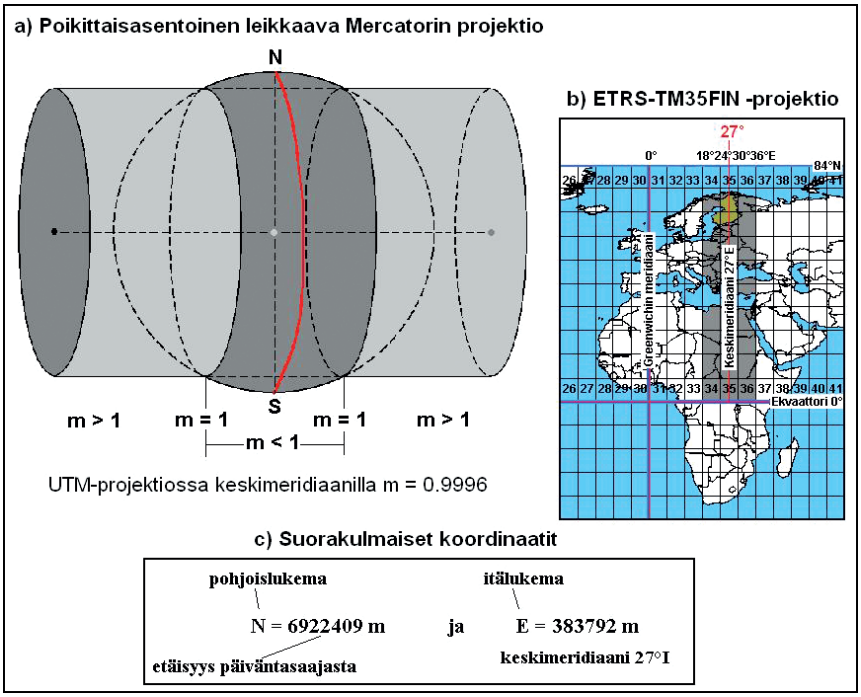
### 4.4.6 ETRS89:n suorakulmaiset koordinaatit

Kun toimitaan Suomessa ETRS89-järjestelmässä, valtakunnallisissa kartastotöissä ja paikkatietopalveluissa suositellaan käytettäväksi UTM-projektioon perustuvaa suorakulmaista koordinaatistoa. UTM-projektio (Universal Transverse Mercator) on oikeakulmainen, poikittaisasentoinen, leikkaava lieriöprojektio. Leikkaava projektio muodostuu, kun projektion mittakaavakerroin keskimeridiaanilla on pienempi kuin yksi. UTM-projektiossa mittakaavakerroin keskimeridiaanilla on $m_o$ = 0.9996. Projektio on kehitetty maailmanlaajuisiin sovelluksiin alun perin USA:n puolustushallinnon karttalaitoksen toimesta. Projektio on otettu käyttöön suomalaisilla kartoilla ETRS89-järjestelmän käyttöönoton myötä. Suomalaiset merikartat ovat jo tässä projektiossa ja yleisten maastokarttojen tuotanto UTM-projektiossa on käynnistynyt. (Kuva 131 a, s. 163.)

Suomessa käytettävä UTM-projektio poikkeaa niin sanotusta standardisoidusta projektiosta kaistan leveyden osalta siten, että koko maa kuvataan yhdessä kaistassa, jonka keskimeridiaani on 27°I. Se on sama kuin KKJ-järjestelmän yhtenäiskoordinaatiston keskimeridiaani. Projektiota kutsutaan ETRS-TM35FIN -projektioksi. Nimessä ETRS viittaa koordinaattijärjestelmään, TM tarkoittaa poikittaisasentoista Mercatorin projektiota (Transverse Mercator), 35 on standardin mukaisen UTM-projektion kaistan numero ja FIN viittaa siihen, että suomalainen projektio poikkeaa standardin mukaisesta projektiosta. (Kuva 131 b, s. 163.)

UTM-projektion suorakulmaiset koordinaatit ovat hyvin samannäköisiä kuin KKJ-järjestelmän suorakulmaiset koordinaatit (kuva 130, s. 159 ja kuva 131 c, s. 163). Pohjoiskoordinaatti ($N$, Northing) on etäisyys päiväntasaajalta projektion pintaa pitkin mitattuna. Itäkoordinaatin ($E$, Easting) arvo keskimeridiaanilla on 500 000 m. Sen eteen ei tarvitse laittaa kaistan tunnusta, kuten kartastokoordinaattijärjestelmässä tehdään. Jos kuitenkin on vaara, että eri järjestelmien koordinaatit voivat sekoittua keskenään, voidaan itäkoordinaatin eteen lisätä tunnusnumeroksi 8.

Suorakulmaisten UTM-koordinaattien lisäksi voidaan ETRS89-järjestelmässä käyttää paikallisesti, esimerkiksi kiinteistöjärjestelmän ylläpidossa, kunnissa ja rakentamisen tehtävissä, sivuavaan poikittaisasentoiseen Mercatorin projektioon perustuvia suorakulmaisia karttakoordinaatistoja. Sivuavan projektion mittakaavakerroin keskimeridiaanilla on $m_o$ = 1, kuten Gauss-Krügerin projektiossa. Gauss-Krügerin projektion kolmen asteen kaistaleveyttä ei kuitenkaan käytetä, vaan kaistan leveys on yksi aste. Keskimeridiaani valitaan paikan lähimmän kokonaisen asteluvun mukaan. Tässä järjestelmässä Suomi jakaantuu 13 projektio- ja koordinaattikaistaan. Koordinaatiston tunnuksena käytetään lyhennettä ETRS-GK$n$, missä $n$ tarkoittaa kaistan keskimeridiaania. Paikan koordinaatit voivat olla esimerkiksi N = 6924508 m ja E = 25486259 m. Itäkoordinaatin kaksi ensimmäistä numeroa kertovat, että kaistan keskimeridiaanin on 25°I, joten kyse on ETRS-GK27 – tasokoordinaateista.




**KUVA 131** *a) ETRS89-järjestelmässä käytetään poikittaisasentoista leikkaa-vaa lieriöprojektio. UTM-projektiossa keskimeridiaanilla projektion mittakaavakerroin on $m$ = 0.9996. b) UTM-projektiossa projektiokaistojen leveys on kuusi astetta. Suomi sijoittuu kaistoille 34–36, mutta on sovittu, että koko maa kuvataan kaistan 35 koordinaatistossa. Suomen projektiota kutsutaan ETRS-TM35FIN-projektioksi. c) Suorakulmaisten koordinaattien ($N$ ja $E$) esitystapa. Keskimeridiaanilla itäkoordinaatin arvo on 500 000 m.*

## 4.4.7 Tehtäviä

**127.** Paikanna kuvan karttaa apuna käyttäen seuraavat koordinaatein esitetyt paikat (kuva 132, s. 164). Anna vastaukseksi kartalta löytyvän paikkakunnan nimi.

a) Paikan KKJ-järjestelmän peruskoordinaatit ovat $P$ = 6710 km ja $I$ = 1570 km.

b) Paikan EUREF-FIN-järjestelmän maantieteelliset koordinaatit ovat $\phi$ = 62.62°N ja $\lambda$ = 29.75°E.

c) Paikan KKJ-järjestelmän yhtenäiskoordinaatit ovat $p$ = 7130 km ja $i$ = 3530 km.

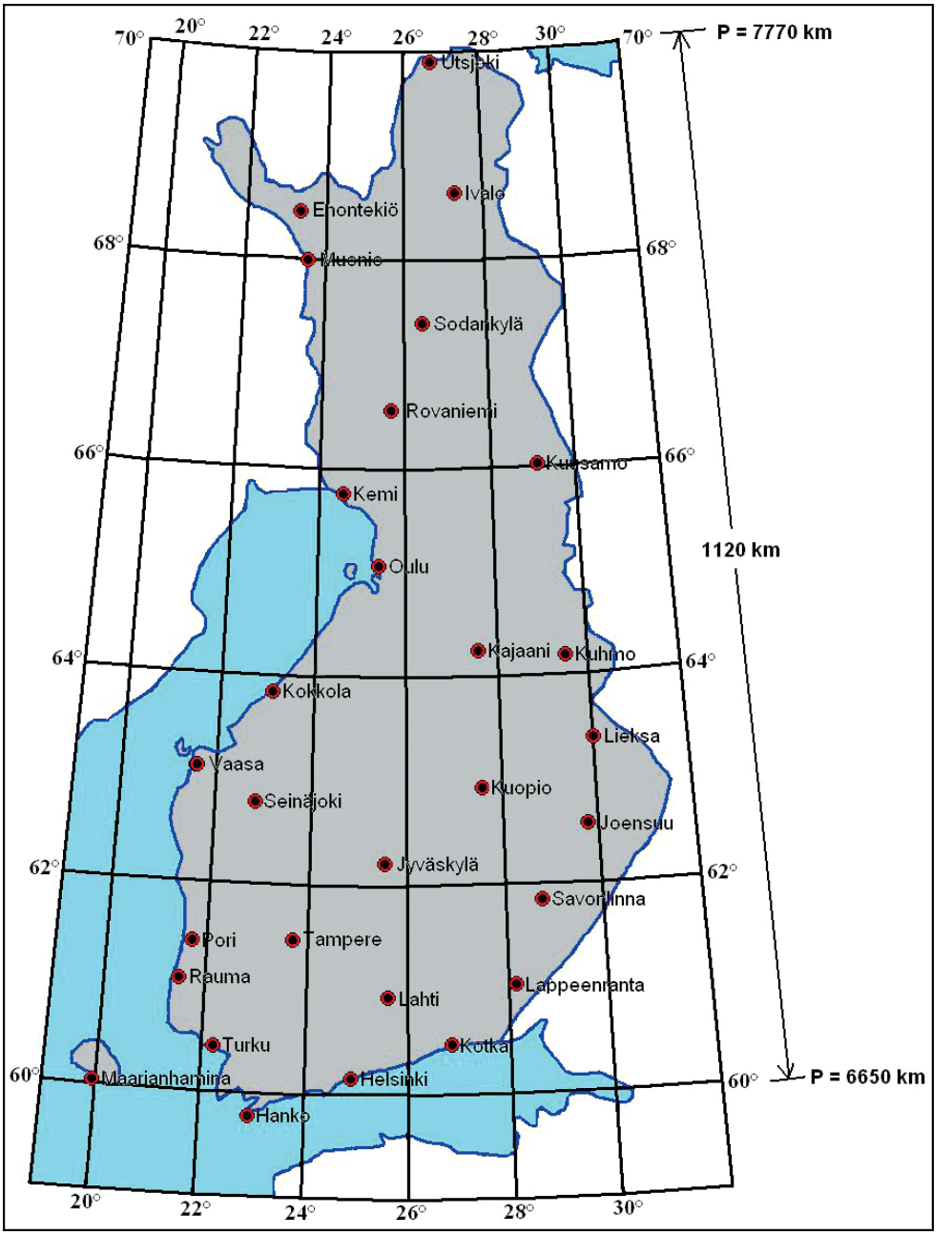
d) Paikan KKJ-järjestelmän peruskoordinaatit ovat $P$ = 7540 km ja $I$ = 2490 km.

e) Paikan EUREF-FIN-järjestelmän suorakulmaiset koordinaatit (ETRS-TM35FIN -projektiossa) ovat $N$ = 6950 km ja $E$ = 640 km.

f) Paikan KKJ-järjestelmän peruskoordinaatit ovat $P$ = 6710 km ja $I$ = 3490 km.

g) Paikan KKJ-järjestelmän maantieteelliset koordinaatit ovat $\phi$ = 67.97°P ja $\lambda$ = 23.65°I.

h) Paikan EUREF-FIN-järjestelmän suorakulmaiset koordinaatit (ETRS-TM35FIN -projektiossa) ovat $N$ = 6980 km ja $E$ = 530 km.




**KUVA132** *Tehtävä 127.*

**128.** Kartastokoordinaattijärjestelmän suorakulmaisessa koordinaatistossa tasokiintopisteiden koordinaatit annetaan yleensä millimetrin numeerisella tarkkuudella. Millä numeerisella tarkkuudella ne tulee antaa maantieteellisessä koordinaatistossa eli kuinka suuri on 1 mm kaarta vastaava kulma Maan keskipisteestä katsoen?

**129.** Paikan koordinaatit sivuavassa poikittaisasentoisessa Mercatorin projektiossa ovat $X$ = 6986100 m ja $Y$ = 732300 m. Y-koordinaatin arvo keskimeridiaanilla on 500 000 m. Mitkä ovat paikan UTM-koordinaatit, kun koordinaatistojen keskimeridiaanit ovat samat?

**130.** Suorakulmaisista koordinaateista laskettu tontin pinta-ala sivuavassa poikittaisasentoisessa Mercatorin projektiossa on 3409 m². Mikä on tontin pinta-ala UTM-projektiossa? Kummassakin projektiossa on sama keskimeridiaani.

**131.** Selvitä maanmittauslaitoksen Karttapaikan avulla jonkin itsellesi tärkeän paikan koordinaatit Suomessa käytettävissä koordinaattijärjestelmissä (http://kansalaisen.karttapaikka.fi).

## 4.5 Korkeusjärjestelmät

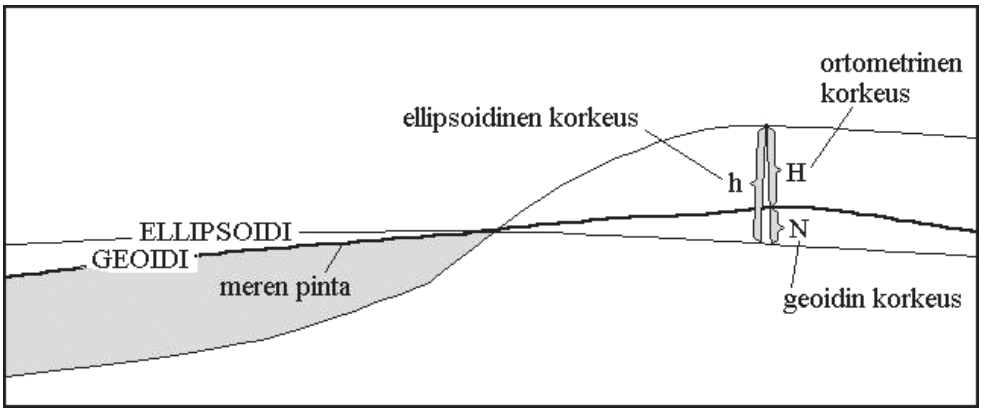
### 4.5.1 Kahdenlaisia korkeuksia

Esimerkiksi WGS84-järjestelmä geosentrinen suorakulmainen koordinaatisto on aidosti kolmiulotteinen koordinaatisto. Sen sijaan maantieteellinen koordinaatisto on pallopinnan ja suorakulmainen koordinaatisto on projektiopinnan kaksiulotteinen koordinaatisto. Ne kertovat vain kohteiden tasosijainnin. Niitä käytettäessä kolmas ulottuvuus esitetään korkeuden avulla. Yleisimmin korkeus ymmärretään kohteen etäisyydeksi merenpinnan tasosta mitattuna. Merenpinnasta, täsmällisemmin geoidin pinnasta, mitattava korkeus on ortometrinen korkeus. Suomessa käytettäviin korkeuslukuihin liittyy usein N60-järjestelmä. Kyse on korkeusjärjestelmästä, jonka vertauspintana on vuoden 1960 keskivedenkorkeus Suomen rannikoilla. Tilanne on korkeusjärjestelmän osalta kuitenkin muuttumassa, kun Suomessa ollaan ottamassa käyttöön uutta N2000-korkeusjärjestelmää.

Yleensä mittauksissa ja teknisessä suunnittelussa käytetään ortometrisia korkeuksia, koska ne muun muassa kertovat veden virtaussuunnan maanpinnalla. Ortometrisia korkeuksia käytettäessä vesi virtaa aina korkeammalla sijaitsevasta pisteestä alempana olevaan pisteeseen. Ortometrisia korkeuksia mitataan vaaitsemalla ja takymetrillä. Kun ei ole tarvetta erityisesti korostaa mitatun korkeuden ominaisuuksia, sana korkeus viittaa sellaisenaan ortometriseen korkeuteen. (Kuva 133, s. 166.)

Korkeus voidaan mitata myös pyörähdysellipsoidin eli Maan matemaattisen mallin pinnasta. Tällöin puhutaan ellipsoidisesta korkeudesta (kuva 133, s. 166). Satelliittipaikannus tuottaa ellipsoidisia korkeuksia WGS84-järjestelmän vertausellipsoidin suhteen mitattuna. Ellipsoidinen korkeus on geometrinen suure, joka perustuu matemaattiseen pintaan. Ortometrinen korkeus on puolestaan ei-geometrinen suure, joka perustuu fysikaaliseen pintaan. Näiden korkeuksien välillä ei ole täsmällistä matemaattista suhdetta, vaan korkeuksien muuntaminen perustuu mittauksiin.

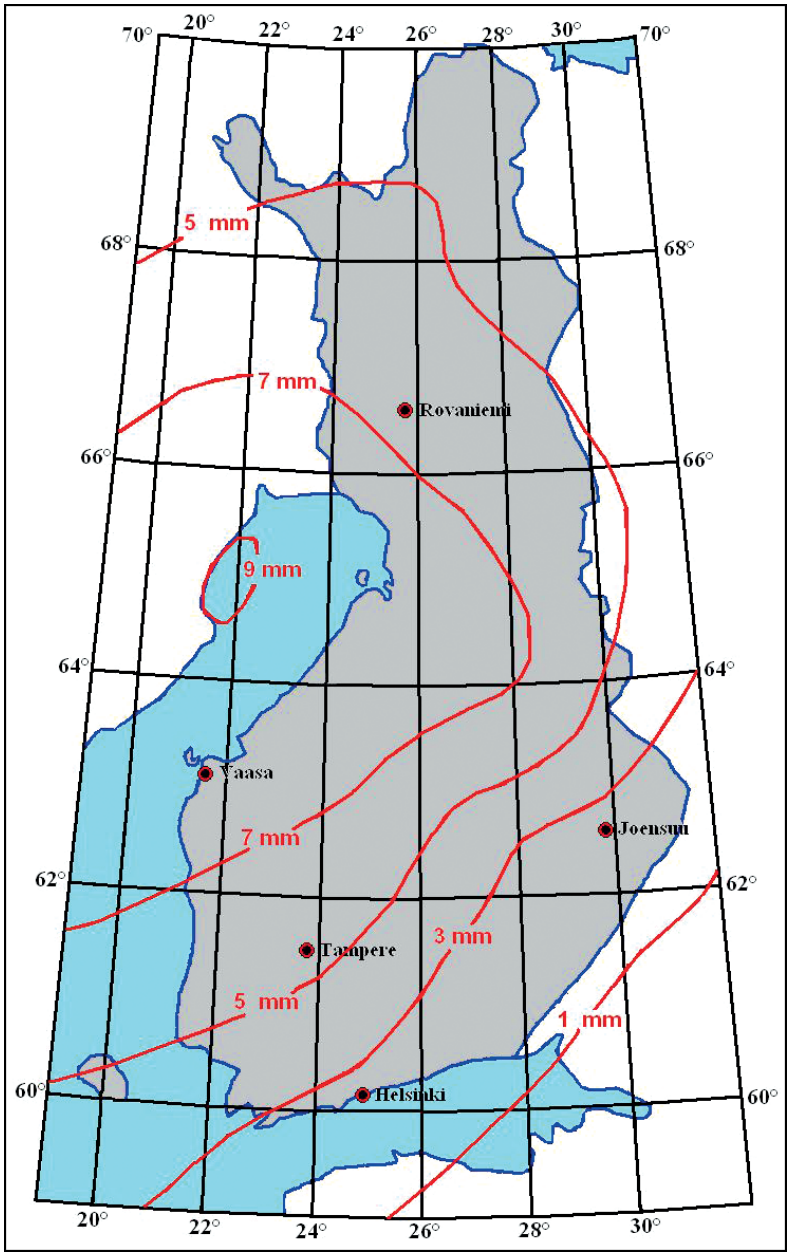
Jotta ellipsoidiset korkeudet pystyttäisiin tarvittaessa muuntamaan ortometrisiksi korkeuksiksi, tulee tuntea geoidin korkeudet. Ne saadaan selville geoidimallin ja runkopisteiden avulla. Suomessa on eri aikoina käytetty Geodeettisen laitoksen määrittämiä geoidimalleja, kuten FIN95, FIN2000 ja FIN2005. Viimeksi mainittu liittyy Suomen uuteen N2000-korkeusjärjestelmään. Geoidimalli riittää yleisiin muunnoksiin, mutta tarkimmissa töissä korkeuksien muunnos pitää määrittää paikallisin mittauksin korkeusrunkopisteiden suhteen.




**KUVA 133** *Geoidi, ellipsoidi ja korkeudet. Geoidi on Maan fysikaalinen malli. Se on painovoimakentän samanarvopinta, joka yhtyy tietyn ajanjakson ja paikan keskimerenpintaan. Pyörähdysellipsoidi on geoidin muotoihin sovitettu Maan muodon matemaattinen malli.*

### 4.5.2 Fennoskandian maannousu

Maanpinnan korkeus ei ole muuttumaton asia. Erityisesti Fennoskandian alueella tiedetään tapahtuvan maannousua, joka liittyy viimeisimpään jääkauteen, joka päättyi noin 10 000 vuota sitten. Alueella sijainnut mannerjäätikkö painoi maankuoren kuopalle, joka jäätikön sulamisen jälkeen vähitellen oikenee. Suomen alueella maannousu on suurimmillaan noin 8 mm/v Perämeren alueella. Siirryttäessä tältä alueelta koilliseen ja kaakkoon, pienenee maannousu noin kahteen millimetriin vuodessa eteläisimmässä ja pohjoisimmassa Suomessa. Koska maannousu on epätasaista, kallistuu Suomi vähitellen. Kallistumisen seurauksena aikanaan mitatut korkeuserot eivät vuosien jälkeen pidä paikkaansa. Maannousun ennakoidaan jatkuvan vielä noin 10 000 vuotta, joten maannousua voidaan pitää Suomen korkeusjärjestelmien kannalta pysyvänä ilmiönä. (Kuva 134, s. 167.)




**KUVA 134** *Käsitys maannoususta perustuu kolmeen tarkkavaaitukseen ja merenkorkeushavaintoihin. Kartan käyrät kuvaavat likimäärin havaittua maannousua keskimerenpintaa nähden millimetreinä vuodessa. (Kakkuri 1991, s. 45.)*

Itämeren alueella, muun muassa Suomessa, on vuosisatoja tunnettu ja seurattu maankohoamista, joka ilmenee uuden maan nousuna merestä. Tutkimusten perusteella on selvää, että kyse on nimenomaan maanpinnan noususta ja, että ilmiö on

viimeisimmän jääkauden aiheuttama. Jäätiköitymisvaihe alkoi noin 80000 vuotta sitten. Jääkauden aikana Fennoskandian alueella oli jopa useita kilometrejä paksu jäätikkö, joka paino maankuorta useita satoja metrejä alaspäin. Jäätikön sulaessa alkoi maankuori palautumaan alkuperäiseen asemaansa. Viimeiset jäätiköt sulivat noin 10000 vuotta sitten, jolloin maannousu oli nykyiseen verrattuna nopeudeltaan monikertainen. Vuosituhansien aikana maankohoaminen on aiheuttanut suuria muutoksia rannikkoalueilla ja vesistöissä. Muun muassa monien Suomen jokien ja järvien laskusuunnat ovat muuttuneet.

Geodesiassa maankohoaminen aiheuttaa ongelmia korkeudenmittausten osalta. Koska maannousu ei ole yhtä suurta kaikkialla, muuttuvat korkeudenmittausten perustana olevien korkeusrunkopisteiden väliset korkeuserot jatkuvasti. Maankohoaminen pakottaa uudistamaan Suomen korkeusjärjestelmän muutamien kymmenien vuosien välein.

### 4.5.3 Suomen korkeusjärjestelmät

Kuten koordinaattijärjestelmät myös korkeusjärjestelmät tulee määritellä ja realisoida. Korkeusjärjestelmän määrittelyyn liittyvät tärkeimmät tekijät ovat referenssitaso eli vertailukorkeus ja järjestelmän epookki eli ajankohta, johon vertailutaso liittyy. Määrittelyyn liittyviä tekijöitä voidaan kutsua yhteisesti vertikaaliseksi datumiksi. Korkeusjärjestelmien realisointi tehdään vaaitsemalla korkeusrunkopisteiden korkeudet tarkkavaaituksella.

Suomen ensimmäinen tarkkavaaitus tehtiin vuosina 1892–1910. Sen tuloksena maahan saatiin ensimmäinen valtakunnallinen korkeus-järjestelmä, jonka nimenä oli NN-järjestelmä. Mittaukset kattoivat Etelä-Suomen linjalle Joensuu-Kajaani-Oulu-Tornio asti.

Toisen valtakunnallisen tarkkavaaituksen kenttätyöt aloitettiin vuonna 1935 ja päätettiin pääverkon osalta vuonna 1955, mutta mittaukset jatkuivat tämänkin jälkeen, niin että ne kattoivat koko maan vuonna 1975. Mittausten aikana määriteltiin tilapäiseksi tarkoitettu N43-järjestelmä, jonka vertailutasoksi otettiin vuoden 1943 Helsingin keskivedenpinta.

Toisen tarkkavaaituksen pääverkon tulosten valmistuttua suoritettiin koko vaaitusverkon tasoitus painovoimaan liittyviä geopotentiaalilukuja käyttäen. Tuloksena saatiin maannousu niillä alueilla, joilla oli yhteisiä mittauspisteitä 1. ja 2. tarkkavaaituksessa. Maannousulukuja käyttäen redukoitiin eli korjattiin korkeuskiintopisteiden korkeuserot vuoteen 1960. Lähtökorkeudeksi valittiin Helsingin vuosien 1935–1954 havaintojen perusteella laskettu keskivedenpinta vuoteen 1960 korjattuna. Järjestelmän nimeksi otettiin N60-järjestelmä. Se on vielä tällä hetkellä Suomen

yleisin korkeusjärjestelmä. Sitä pidetään valtakunnallisena korkeusjärjestelmänä, mutta se on nyt syrjäytymässä uudella korkeusjärjestelmällä.

Kolmas tarkkavaaitus alkoi vuonna 1978 ja sen kenttätyöt saatiin valmiiksi vuonna 2006. Mittausten jälkeen voitiin määrittää myös Lappiin tarkat maannousuarvot, mistä ne olivat aikaisemmin puuttuneet. Mittausten perusteella Suomeen luotiin uusi ajanmukainen korkeusjärjestelmä, jonka nimi on N2000. Tätä järjestelmää suositellaan käytettäväksi valtakunnallisissa kartastotöissä ja paikkatietopalveluissa. Suositeltavaa on sen käyttöönotto myös paikallisissa mittaus- ja kartoitustehtävissä. N2000-järjestelmän vertailutaso on länsieurooppalainen Amsterdamin taso (NAP, Normaal Amsterdams Peil). Korkeusjärjestelmäuudistuksessa Suomi on liitetty kansainvälisiin korkeusjärjestelmiin. N2000-järjestelmän voidaan sanoa olevan Suomen uusi valtakunnallinen korkeusjärjestelmä.

Kaikki edellä mainitut korkeusjärjestelmät (NN, N43, N60 ja N2000) ovat oman aikansa valtakunnallisia korkeusjärjestelmiä. Valtakunnallisten järjestelmien lisäksi muun muassa monilla kunnilla on käytössä näistä poikkeavia korkeusjärjestelmiä. Kaikki eivät vain toimi yleisten suositusten mukaisesti tai on olemassa perusteltuja syitä poiketa yleisistä järjestelmistä. Mittaajien pitää olla tietoisia erilaisista koordinaatti- ja korkeusjärjestelmistä ja osata toimia vaihtelevissa koordinaattiympäristöissä.

## 4.6 Koordinaattien muuntaminen

### 4.6.1 Koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset

Koordinaattien muunnoksia tarvitaan ja käytetään mittauksissa monenlaisissa tehtävissä. Esimerkkejä muunnosten käytöstä ovat:

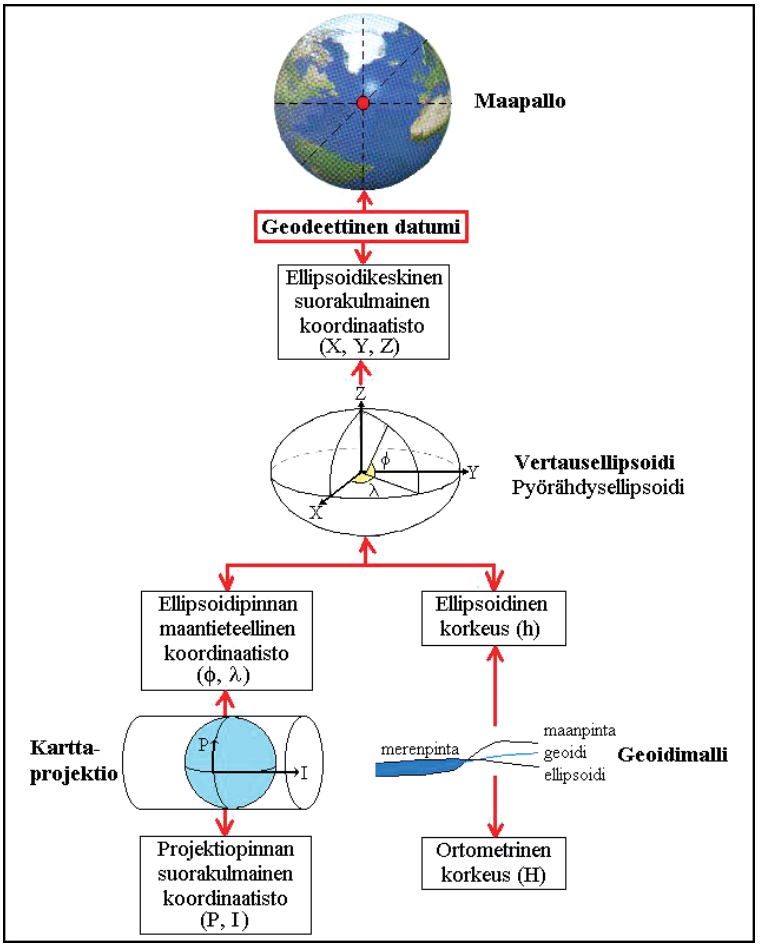
- siirtyminen koordinaattijärjestelmän sisällä esitystavasta eli koordinaatistosta toiseen
- siirtyminen koordinaattijärjestelmästä toiseen
- karttojen ja kuvien digitointi ja skannaus
- valokuvien ja satelliittikuvien mittaus
- takymetrillä mitatun vapaan asemapisteen laskenta
- rakenteiden ja pisteverkkojen muodonmuutosten tutkiminen
- kolmiulotteisten mallien visualisointi tietokoneella.

Moniin sovelluksiin, joissa muunnoksia käytetään, liittyy erityispiirteitä, joita ei tässä yhteydessä ole mahdollista käsitellä. Seuraavassa tarkastellaan vain koordinaattien muuntamista koordinaattijärjestelmän sisällä tai järjestelmästä toiseen. Esitys on pääosin kuvailevaa. Pitää kuitenkin ymmärtää, että muunnokset voidaan esittää aina matemaattisesti, niiden perustelu on matematiikkaa, ja että muunnosten laskenta on osaksi hyvin vaativaa matematiikkaa.

Koordinaattijärjestelmän sisällä kohteen sijainti voidaan esittää yhtäpitävästi kolmella tavalla (kuva 135):

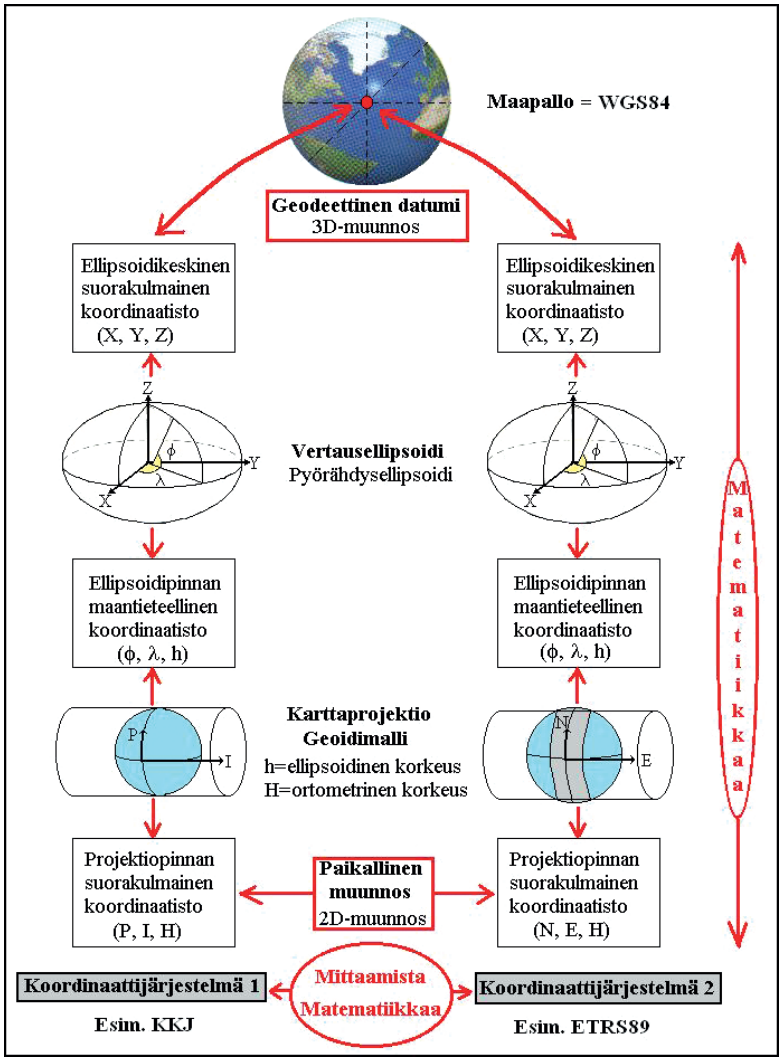
- kolmiulotteisina suorakulmaisina koordinaatteina ($X$, $Y$, $Z$)
- maantieteellisinä koordinaatteina ($\phi$, $\lambda$) ja korkeutena ($h$ tai $H$)
- projektiopinnan suorakulmaisina koordinaatteina (esimerkiksi $P$ ja $I$) ja korkeutena ($h$ tai $H$)

Korkeus voi olla joko ellipsoidinen korkeus ($h$) tai ortometrinen korkeus ($H$). Projektiopinnan suorakulmaiset koordinaatit ($P$, $I$) ovat sidottuja karttaprojektioon. Jos karttaprojektio muuttuu, myös koordinaattien lukuarvot muuttuvat. Koordinaattijärjestelmän sisäiset muunnokset ovat puhtaasti matemaattisia laskutoimituksia, joten kaikki koordinaattien esitystavat ovat samanarvoisia ja yhtä tarkkoja. Järjestelmän sisäisiä muunnoksia kutsutaan koordinaattikonversioiksi.




**KUVA 135** *Koordinaattijärjestelmän koordinaatistot ja muunnoslaskujen suoritusjärjestys koordinaattijärjestelmän sisällä.*

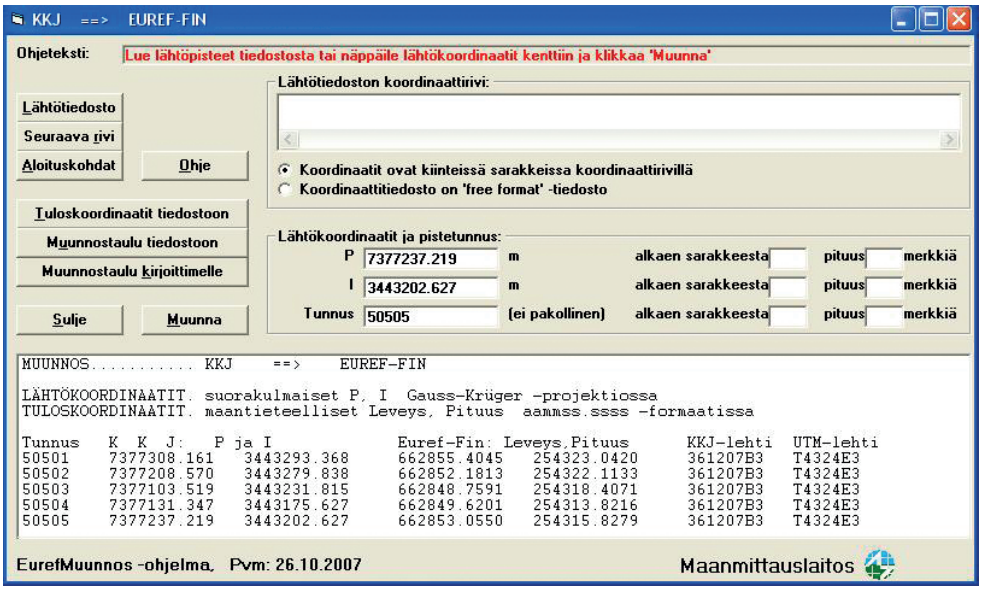
Koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset ovat monimutkaisempia ja monivaiheisempia toimenpiteitä kuin koordinaattijärjestelmän sisäiset esitystavan muunnokset. Koordinaattijärjestelmien välisissä muunnoksissa ei ole kyse pelkästään matematiikasta vaan myös mittaamisesta. Järjestelmien väliset muunnosparametrit määritetään mittaamalla yhteisiä pisteitä kummassakin järjestelmässä. Mittaukset ovat aina jossakin määrin virheellisiä, joten koordinaattijärjestelmien väliset muunnoksetkaan eivät voi olla virheettömiä. (Kuva 136.)




**KUVA 136** *Kahden koordinaattijärjestelmän välinen muunnos kulkee Maan painopisteen kautta, jota edustaa laskennassa WGS84-järjestelmän origo. Järjestelmien välinen muunnos ei ole pelkkää matematiikkaa, sillä muunnosparametrit on määritetty mittaamalla yhteisiä pisteitä kummassakin järjestelmässä. Mittausten virheiden vuoksi koordinaattijärjestelmien väliset muunnokset eivät ole virheetön.*

Jos esimerkiksi halutaan muuntaa kartastokoordinaattijärjestelmän 4. kaistan peruskoordinaatit ($P$, $I$) ETRS-TM35FIN -projektion suorakulmaisiksi koordinaateiksi ($N$, $E$), yleispätevät muunnoslaskut kulkevat maapallon keskipisteen kautta. Keskipiste on muunnoslaskujen näkökulmasta sama kuin WGS84-järjestelmän origo. Muunnoksen suorittamiseksi joudutaan muuntamaan koordinaatteja useita kertoja esitystavasta toiseen. Laskennat ovat niin vaativia, että ne on aina syytä tehdä laskentaohjelmien avulla (kuva 137 ja kuva 140, s. 176.)

Laskentateknisesti on mahdollista siirtyä paikallisesti esimerkiksi kartastokoordinaattijärjestelmän 4. kaistan peruskoordinaateista ($P$, $I$) suoraan ETRS-TM35FIN -projektion suorakulmaisiin koordinaatteihin ($N$, $E$). Tällainen muunnos ei ole kuitenkaan yleispätevä koko Suomen alueella, koska projektioiden mittakaavakertoimet vaihtelevat alueittain ja projektiotasot eivät ole yhdensuuntaiset. Pienellä alueella näin voidaan kuitenkin menetellä, jonka vuoksi puhutaan paikallisesta muunnoksesta (kuva 136, s. 171).




**KUVA 137** *Maanmittauslaitoksen EurefMuunnos-ohjelman ikkuna, jossa näkyvät viiden KKJ-järjestelmästä EUREF-FIN -järjestelmään muunnetun pisteen koordinaatit. EUREF-FIN on Suomen uusi valtakunnallinen koordinaattijärjestelmä.*

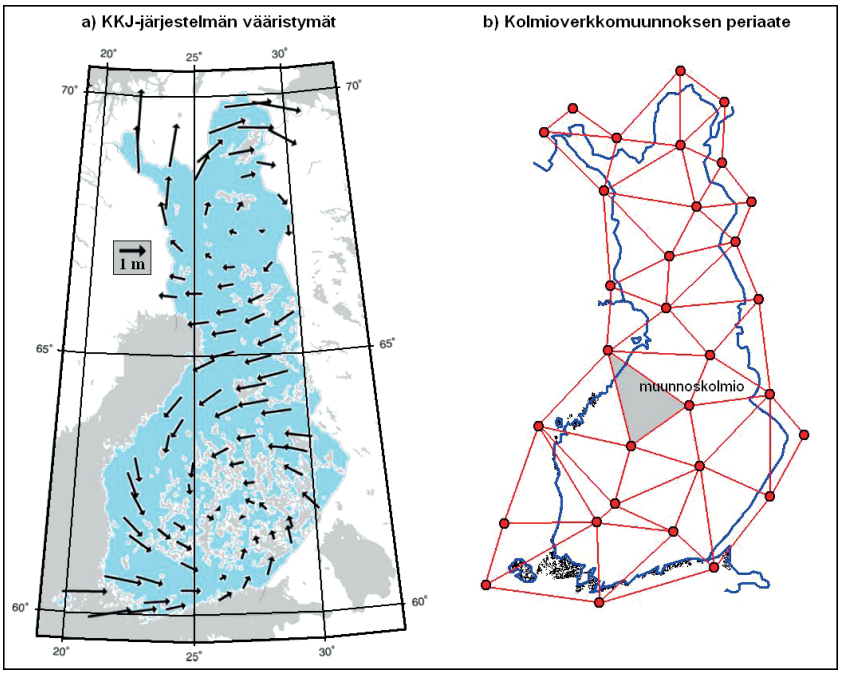
## 4.6.2 Kartastokoordinaattijärjestelmät erityispiirteet

Suomessa tehdään mittauksia sekä kartastokoordinaattijärjestel-mässä että ETRS89-järjestelmässä. Tarkat satelliittimittaukset osoittavat, että kartastokoordinaattijärjestelmä on vääristynyt eli siinä on virheitä (kuva 138 a, s. 173). Virheiden vuoksi ei ole mahdollista muodostaa sellaisia muunnosparametreja, jotka toimisivat

koko maan alueella mittaus- ja kartoitustekniikan näkökulmasta katsoen riittävän tarkasti. Jotta kartastokoordinaattijärjestelmän paikalliset vääristymät voidaan korjata, on otettu käyttöön kolmioverkkomuunnos. Muunnosta varten Suomi on jaettu kolmioihin (kuva 138 b). Jokaisen kolmion alueella muunnos tehdään paikallisten muunnosparametrien avulla. Näin jokainen muunnosverkon kolmio tarkoittaa tavallaan omaa koordinaattijärjestelmäänsä.

Matemaattisilta ominaisuuksiltaan kolmioverkkomuunnos on affiininen muunnos. Se on Helmertin muunnoksen tyyppinen lineaarinen muunnos. Kolmioverkkomuunnoksen avulla muunnetaan ETRS-TM35FIN -projektion suorakulmaiset koordinaatit suoraan KKJ-järjestelmän yhtenäiskoordinaateiksi tai päinvastoin. Muunnos on toteutettu, niin että

- viereisten kolmioiden yhteisissä kärkipisteissä muunnos tuottaa täsmälleen samat koordinaatit
- viivamaiset kohteet ovat jatkuvia siirryttäessä kolmiosta toiseen
- muunnospisteistöä voidaan tihentää paikallisesti ja tihennys vaikuttaa vain niihin kolmioihin, joiden sisällä tihennys suoritetaan.




**KUVA 138** *a) Perinteisin menetelmin mitattu KKJ-järjestelmän runkoverkko on vääristynyt ja epäyhtenäinen, kun sitä verrataan tarkoin satelliittimittauksin mitattuihin koordinaatteihin (JHS 153, liite 3, kuva 1). b) Jos mittaukset halutaan muuntaa EUREF-FIN -järjestelmästä KKJ-järjestelmän runkopisteisiin sopiviksi, muunnos joudutaan tekemään paikallisten muunnosparametrien avulla. Jokaiselle muunnoskolmiolle määritetään omat muunnosparametrit. Kuvan (b) kolmioverkko ei miltään osin kuvaa Suomessa käytössä olevaa muunnosverkkoa.*

ETRS89-järjestelmä ja ETRS-TM35FIN -projektio on otettu Suomessa käyttöön, koska ne ovat yhteneviä satelliittipaikannuksessa käytettävän WGS84-järjestelmän kanssa. Muun muassa monissa kunnissa mittaukset kuitenkin tehdään edelleen kartastokoordinaattijärjestelmässä. Suomessa on yleensäkin vielä valtavasti paikkatietoaineistoja, jotka on mitattu KKJ-järjestelmässä paikallisten runkopisteiden suhteen. Jos mittaukset tehdään suoraan ETRS89-järjestelmässä, voidaan mittaukset sovittaa kolmiverkkomuunnoksella kartastokoordinaattijärjestelmän runkoverkkoon.

Jos ETRS89-järjestelmässä tehdyt mittaukset muunnettaisiin yleisillä muunnosparametreilla kartastokoordinaattijärjestelmään, voisivat muunnetut koordinaatit erota paikallisten runkopisteiden suhteen mitatuista koordinaateista jopa 2 m (kuva 138 a, s. 173). Kolmioverkkomuunnosta käytettäessä muunnettujen koordinaattien erot paikallisten KKJ-järjestelmän runkopisteiden suhteen ovat enintään noin 10 cm ja yleensä muutamien senttimetrin suuruusluokkaa. Matemaattisen muunnoksen sijasta mittaukset voidaan aina liittää paikalliseen runkoverkkoon käyttämällä alueen runkopisteitä hyväksi.

### 4.6.3 Korkeuksien muuntaminen

Satelliittipaikannuksella mitataan ellipsoidisia korkeuksia, kun taas mittauksissa ja kartoilla yleisesti käytettävät korkeudet ovat ortometrisia korkeuksia. Tämän vuoksi korkeuksia tulee voida muuntaa mainittujen järjestelmien välillä. Muunnosta varten tarvitaan geoidimalli. Se kertoo geoidin korkeudet ellipsoidista mitattuna. Ellipsoidiset korkeudet ovat aina WGS84-järjestelmän ellipsoidisia korkeuksia. Esimerkiksi kartastokoordinaattijärjestelmän ellipsoidisilla korkeuksilla ei ole mitään käytännön merkitystä.

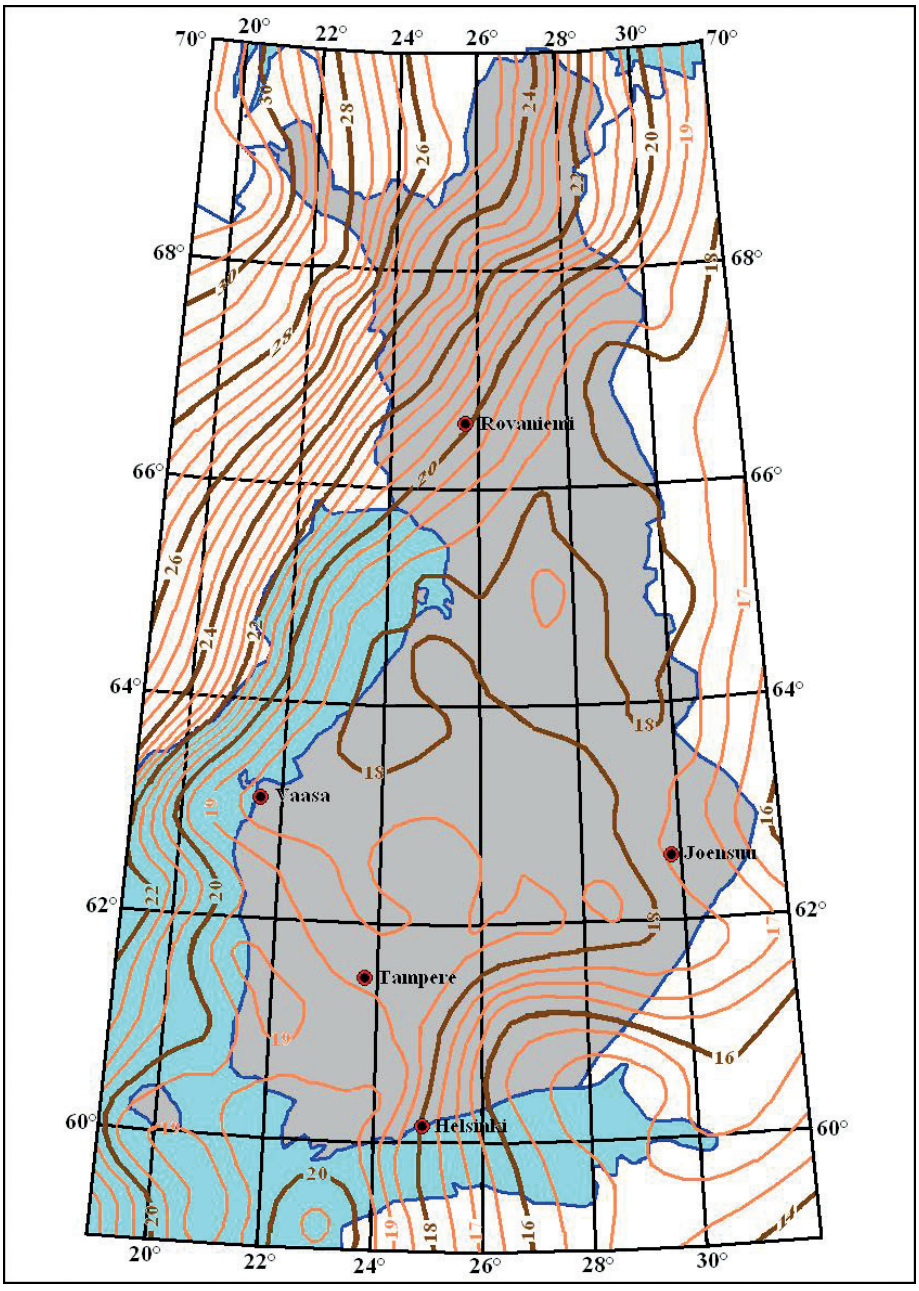
Suomessa käytettävät geoidimallit perustuvat tavalla tai toisella globaaleihin geoidimalleihin, koska myös alueellisen geoidimallin pohjana on oltava tiedot koko maapallon painovoimakentästä. Geodeettinen laitos tutkii ja ylläpitää Suomessa käytettäviä geoidimalleja. FIN95- ja FIN2000-geoidimallien avulla voidaan muuntaa WGS84-järjestelmän ellipsoidiset korkeudet N60-järjestelmän korkeuksiksi. FIN2005 on uuden N2000-järjestelmän yhteydessä käytettävä geoidimalli. Kaavan muodossa korkeuksien muunnos on

$$H = h_{WGS84} - N, \tag{111}$$

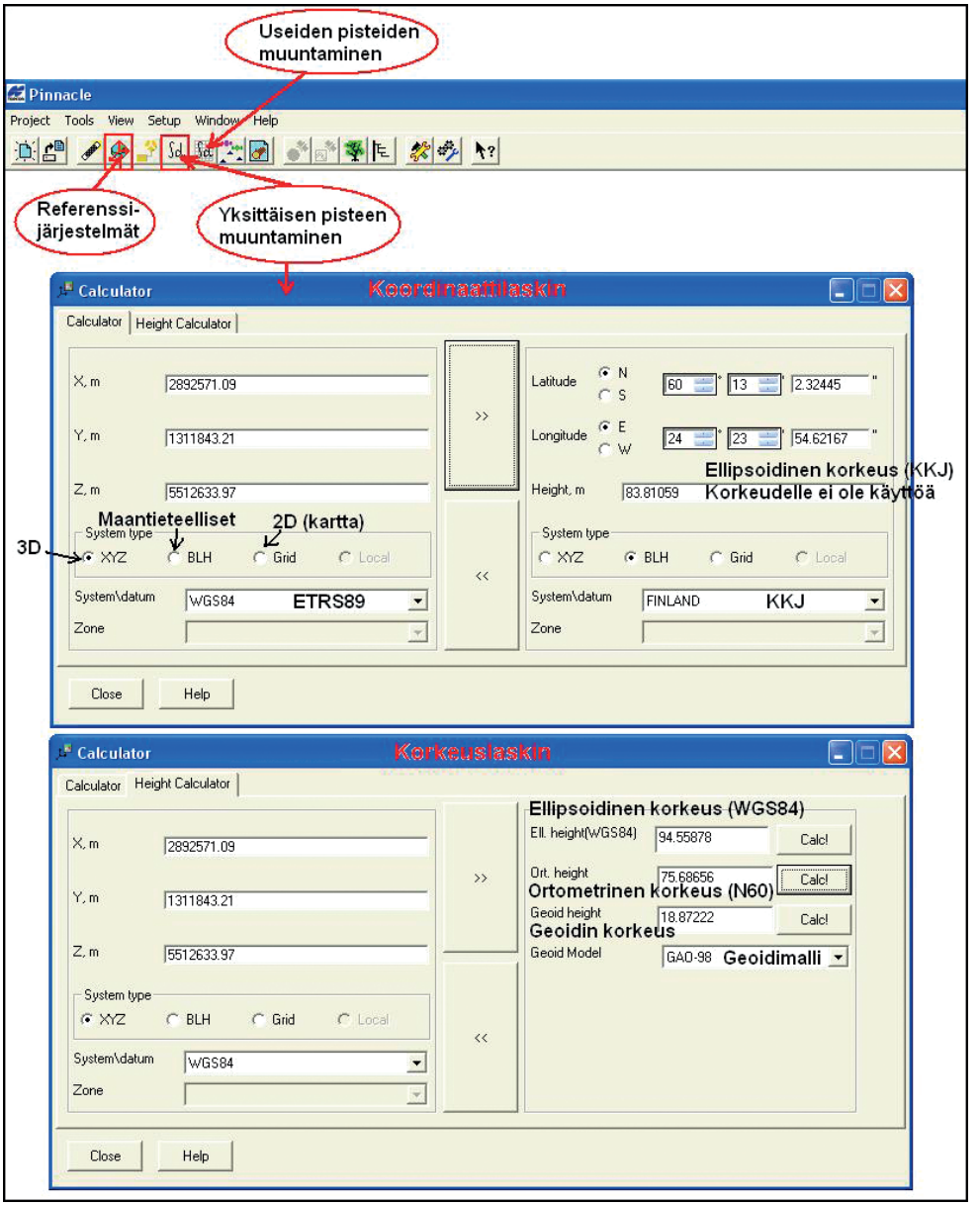
jossa $H$ on korkeusjärjestelmän ortometrinen korkeus, $h_{\mathrm{WGS84}}$ on WGS84-järjestelmän ellipsoidinen korkeus ja $N$ on geoidimallin perusteella laskettu geoidin korkeus. (Kuva 139, s. 175.)

Korkeuksien muunnokset tehdään laskentaohjelmien avulla joko tiedonkeruuvaiheessa tai jälkikäteen (kuva 140, s. 176). Geoidimallien avulla tapahtuva korkeuksi-

en muuntaminen ei riitä tarkimpiin mittauksiin. Tarkoissa mittauksissa korkeuksien muunnos tulee määrittää paikallisesti korkeusrunkopisteiden avulla. Tilanne on tältä osin sama kuin tarkoissa koordinaattien mittauksissa.




**KUVA 139** *Geodeettisella laitoksella laskettu Suomen gravimetrinen geoidimalli FIN95, joka perustuu valtakunnallisiin painovoima- ja GPS-mittauksiin ja naapurimaiden vastaaviin mittauksiin (Geodeettisen laitoksen esite: FinnNet, Suomen pysyvä GPS-verkko). Uusin Suomessa käytettävä geoidimalli on nimeltään FIN2005.*




**KUVA 140** *Pinnacle-ohjelman muunnosikkunat. Koordinaattilaskin muuntaa koordinaatteja esitystavasta ja järjestelmästä toiseen. Korkeuslaskin muuntaa WGS84-järjestelmän ellipsoidisia korkeuksia ortometrisiksi korkeuksiksi ja päinvastoin. Korkeuksien muuntaminen perustuu korkeusmalliin. GAO98 on yleispiirteinen maailmanlaajuinen malli, jota ei erityisesti ole sovitettu Suomen korkeusjärjestelmiin.*

### 4.6.4 Tehtäviä

**132.** Arvioi FIN95-geoidimallikartan (kuva 139, s. 175) perusteella geoidin korkeus a) Helsingissä, b) Tampereella, c) Oulussa, d) Rovaniemellä, e) Utsjoella.

**133.** Julkisen hallinnon suosituksessa JHS 153 on Suomen runko-verkkoon liittyviä pistetietoja (kuva 141). Niitä voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi laskentaohjelmia testattaessa. a) Muunna pisteiden 4, 9, 17 ja 21 ETRF89-järjestelmän maantieteelliset koordinaatit KKJ-järjestelmän maantieteellisiksi koordinaateiksi jollakin muunnos-ohjelmalla. Esimerkiksi maanmittauslaitos (www.maanmittauslaitos.fi) ja Geodeettinen laitos (http://coordtrans.fgi.fi) tarjoavat yksityiskäyttöön ilmaisia muunnosohjelmia. b) Kuinka paljon muunnetut koordinaatit eroavat tunnetuista koordinaateista metreinä? c) Vertaa eroja kuvan 138 a (s. 173) eroihin. d) Vertaa kuvan 138 korkeuksien eroja kuvan 139 (s. 175) antamiin geoidin korkeuksiin.

**JHS 153:**

**Liite 1: Pisteet, jotka määrittelevät ETRF89-koordinaatiston**

ETRF89-koordinaattien määrittämisestä on laadittu yksityiskohtainen raportti Geodeettisen laitoksen julkaisuja -sarjaan (Geodeetisen laitoksen julkaisuja no. 129). Seuraavassa taulukossa esitetään koordinaatiston määrittelemiseen käytetyt pisteet sekä niiden geodeettiset koordinaatit ETRF89-koordinaatistossa.

**Taulukko 1.** ETRF89-koordinaatiston määrittelevät pisteet ja niiden maantieteelliset koordinaatit ja korkeus vertausellipsoidista (GRS80) .

| No. | Nimi | Lyh. | φ | | | λ | | | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ° | ' | " | ° | ' | " | m |
| **I-luokan kolmiopisteet:** | | | | | | | | | |
| 4 | Geta | Ge | 60 | 23 | 6.38474 | 19 | 50 | 53.29237 | 118.309 |
| 9 | Kökar | Kö | 59 | 55 | 21.90272 | 20 | 55 | 35.77597 | 50.477 |
| 17 | Dragsfjärd | Dr | 60 | 2 | 30.00060 | 22 | 25 | 42.11416 | 80.866 |
| 21 | Perniö | Pe | 60 | 14 | 28.38025 | 23 | 3 | 1.74531 | 103.973 |

**Taulukko 3.** 3-D-siirtoparametrien ratkaisemiseen käytettyjen pisteiden maantieteelliset kkj-koordinaatit (φ, λ), ortometriset korkeudet N60-järjestelmässä (*H*) sekä "Bomford 70" -geoidimallin mukaiset geoidin korkeudet (*N*).

| No. | φ | | | λ | | | *H* | *N* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ' | " | ° | ' | " | m | m |
| 4 | 60 | 23 | 6.24353 | 19 | 51 | 5.58844 | 98.4 | -7.68 |
| 9 | 59 | 55 | 21.71015 | 20 | 55 | 47.70240 | 31.59 | -8.42 |
| 17 | 60 | 2 | 29.64537 | 22 | 25 | 53.85241 | 60. | -7.06 |
| 21 | 60 | 14 | 27.93759 | 23 | 3 | 13.45600 | 84.23 | -6.66 |

**KUVA 141** *Tehtävä 133 (JHS 153, taulukko 1, s. 13 ja taulukko 3, s. 19).*

**134.** Rovaniemen ammattikorkeakoulun tuotantoalojen kampuksella on viisi monikulmiopistettä, joiden kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) koordinaatit ja vaaitut (ortometriset) korkeudet ovat seuraavat:

| **Piste** | ***P* / [m]** | ***I* / [m]** | ***H* / [m]** |
|---|---|---|---|
| 50501 | 7377308.161 | 3443293.368 | 77.220 |
| 50502 | 7377208.570 | 3443279.838 | 77.610 |
| 50503 | 7377103.519 | 3443231.815 | 77.863 |
| 50504 | 7377131.347 | 3443175.627 | 77.590 |
| 50505 | 7377237.219 | 3443202.627 | 77.192 |

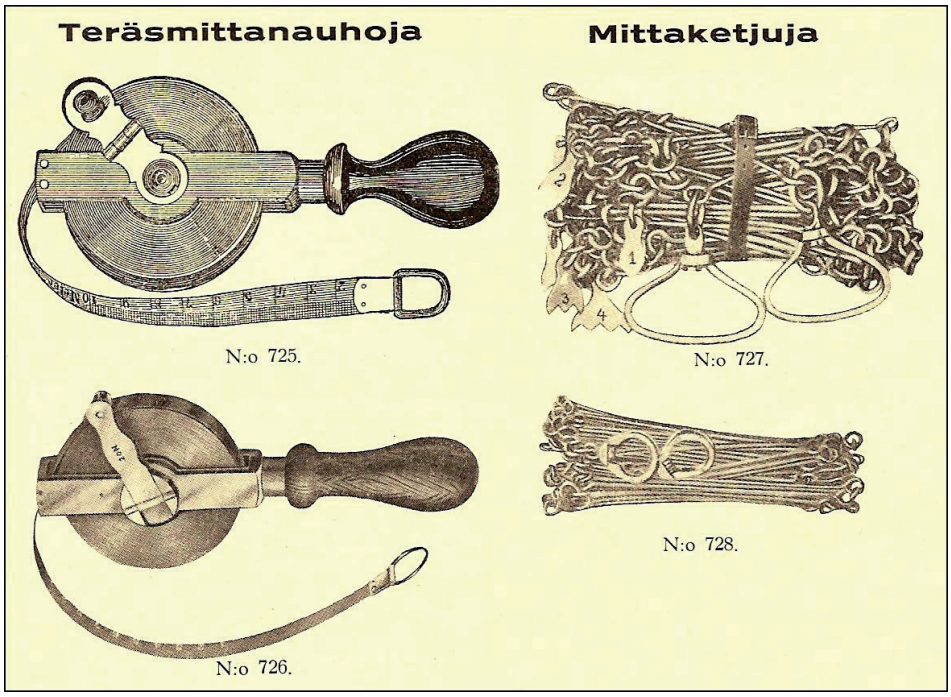
Muunna näiden pisteiden koordinaatit ja korkeudet jollakin muunnos-ohjelmalla seuraavasti:

- kartastokoordinaattijärjestelmän maantieteellisiksi koordinaateiksi
- kartastokoordinaattijärjestelmän 2. kaistan suorakulmaisiksi koor-dinaateiksi (kaistanvaihto)
- ETRS89-järjestelmän maantieteellisiksi koordinaateiksi
- ETRS-TM35FIN -projektion suorakulmaisiksi koordinaateiksi
- korkeudet WGS84-järjestelmän ellipsoidisiksi korkeuksiksi.

**135.** Tehtävä liittyy edelliseen tehtävään (134). Laske pisteiden 50501 ja 50503 välimatka KKJ-järjestelmän (kaistat 2 ja 3) ja ETRS-TM35FIN -projektion suorakulmaisista koordinaateista. Miksi tulokset eroavat toisistaan? Onko eroilla käytännön merkitystä?

# 5 APUMITTAUKSET

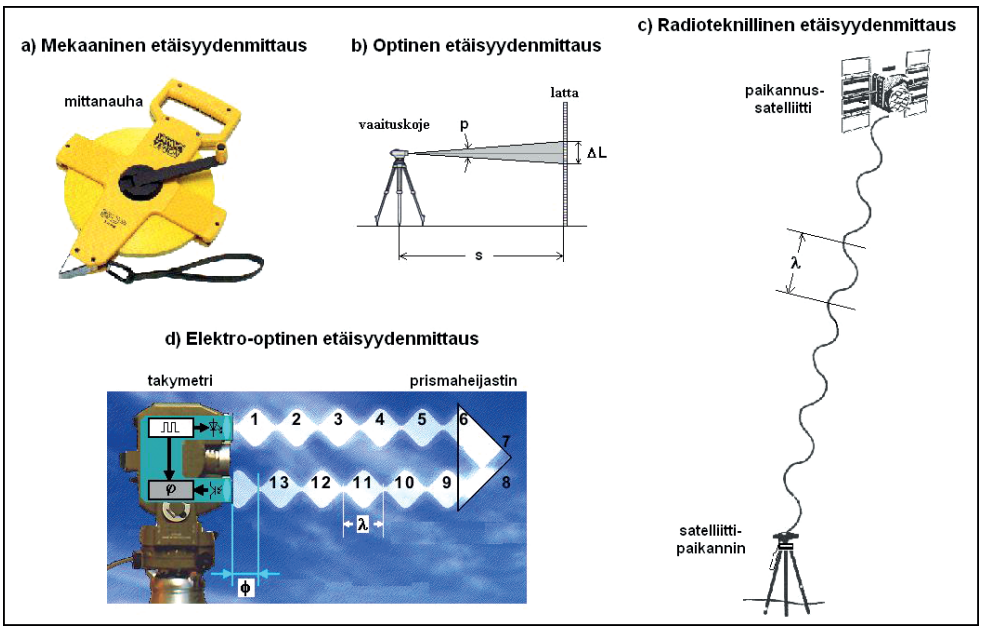
1970-luvulla suorakulmainen mittaus, jossa käytettiin mittanauhaa, suorakulmaista prismaa ja linjaseipäitä, oli yleinen kartoitusmenetelmä. Tällöin käytettiin monia muitakin yksinkertaisia mittausmenetelmiä, joita nykyisin käytetään lähinnä satunnaisesti tai muiden mittausten yhteydessä täydentämään mittauksia joiltakin osin. Näitä yksinkertaisin välinein tehtäviä mittauksia voidaan kutsua käyttötarkoituksensa vuoksi apumittauksiksi. Puhutaan myös pikkumittauksista. Apumittaukset-luvussa tarkastellaan joitakin yksinkertaisia mittausmenetelmiä ja -välineitä. Tarkasteltavista menetelmistä erityisesti suorakulmaisen mittauksen periaate on edelleen tärkeä ja ajankohtainen. Se liittyy yleisestä näkökulmasta katsoen tasokoordinaattien määrittelyyn ja käyttöön. Sitä tarvitaan mm. monissa rakentamisen suunnitteluun ja merkintämittauksiin liittyvissä tehtävissä. Myös takymetrillä ja satelliittipaikannuksella tehtävissä kartoitus- ja merkintämittauksissa on tärkeää tuntea suorakulmaisen mittauksen periaate ja käsitteet. Suuntien määrittämiseen liittyvät käsitteet ja periaatteet ovat toinen tärkeä Apumittaukset-lukuun sisältyvä asiakokonaisuus. (Kuva 142.)




**KUVA 142** *Noin 100 vuotta sitten etäisyydenmittauksia tehtiin kuvan esittämillä mittanauhoilla ja mittaketjuilla. Mittanauhoja käytetään edelleen, mutta mittaketjujen käytöstä on luovuttu kauan sitten. (Th. Wulff Osakeyhtiön myyntiesite 1920-luvulta, s. 55.)*

## 5.1 Etäisyydenmittaustavat

Etäisyydenmittauksessa käytettävät mittauskojeet voidaan ryhmitellä toiminta-periaatteensa perusteella mekaanisiin, optisiin ja elektronisiin mittausvälineisiin. Mekaanisessa etäisyydenmittauksessa määrittää mekaaninen mitta omalla pituudellaan mitattavan etäisyyden (kuva 143 a). Optisessa etäisyydenmittauksessa kahden tähtäyssäteen välinen parallaktinen kulma ($p$) ja parallaktisessa kulmassa näkyvä kanta ($\Delta L$) määrittävät etäisyyden (kuva 143 b). Elektronisessa etäisyydenmittauksessa käytetään hyväksi sähkömagneettista mittaussignaalia. Radioteknillisessä etäisyydenmittauksessa käytettävän mittaussignaalin kantoaalto sijoittuu radioaaltojen alueelle. Radioaaltojen aallonpituus voi olla muutamasta kymmenestä senttimetristä satoihin metreihin. Satelliittipaikannuksessa käytettävän signaalin kantoaalto on esim. noin 20 cm (kuva 143 c). Elektro-optisesta etäisyydenmittauksesta puhutaan, kun mittaussignaalin kantoaalto sijoittuu sähkömagneettisen spektrin optiselle alueelle. Tällöin signaalin aallonpituus on noin 400–1000 nm (0.4–1 µm). Esimerkiksi takymetrillä mitattaessa etäisyys mitataan elektro-optisesti (kuva 143 d).

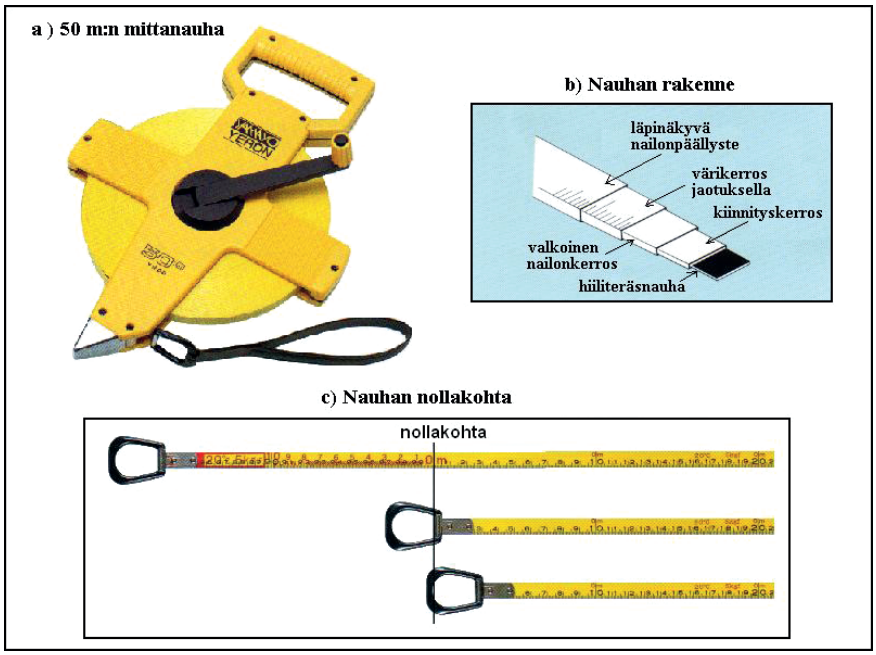



**KUVA 143** *Etäisyydenmittaustavat. a) Mekaanisessa etäisyydenmittauksessa käytetään esim. mittanauhaa. b) Optista etäisyydenmittausta voidaan tehdä vaaituskojeen ja latan avulla. $p$ on parallaktinen kulma ja $\Delta L$ on kanta. c) Satelliittipaikannin mittaa etäisyyden satelliittiin sähkömagneettisen spektrin radioaaltojen alueelle sijoittuvan signaalin avulla. d) Takymetri mittaa etäisyyden sähkömagneettisen spektrin optiselle alueelle sijoittuvan signaalin avulla. Radioteknillinen ja elektro-optinen etäisyydenmittaustapa ovat kumpikin elektronisia etäisyydenmittaustapoja.*

## 5.2 Etäisyydenmittaus mittanauhalla

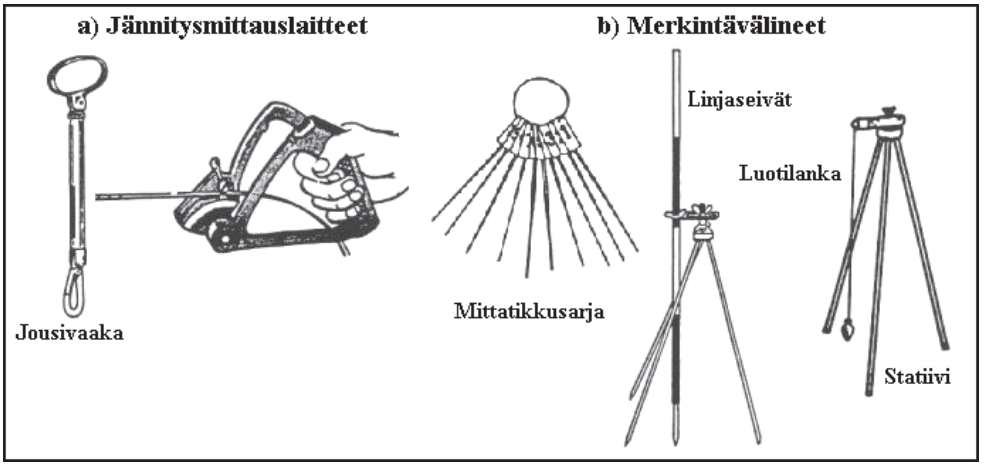
### 5.2.1 Mittanauhamittauksen välineet

Vielä 1970-luvulla ennen kuin elektroniset etäisyysmittarit yleistyivät, mittanauha oli tärkeä etäisyydenmittausväline. Edelleenkin se on käyttökelpoinen ja hinnaltaan edullinen väline lyhyiden matkojen mittaukseen. Mittanauhaa käytetään erityisesti talonrakennustyömailla. Yleisimmin käytetyt mittanauhat valmistetaan hiiliteräksestä ja päällystetään suojakalvolla. Ne ovat lujia ja mitanpitäviä vaikeissakin käyttöolosuhteissa. Mittanauhojen tavallisimmat pituudet ovat 30 ja 50 m. (Kuva 144.)




**KUVA 144** *a) 50 m:n teräsmittanuha. b) Teräsmittanauhan rakenne. c) Nauhan nollakohdan paikka voi vaihdella.*

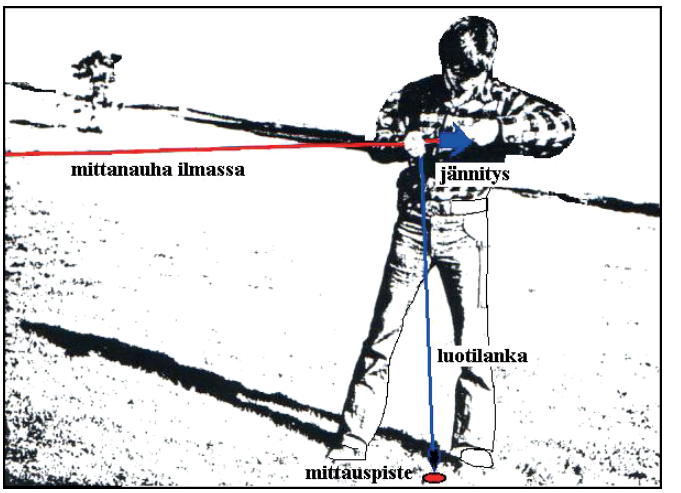
Mittanauhamittauksessa saatetaan tarvita nauhan lisäksi erilaisia apuvälineitä. Tarkoissa mittauksissa nauha tulee jännittää vakiojännityksellä, joka on yleensä 50 N tai 100 N. Käytettävä jännitys on merkitty nauhan alkuun. Jännittäminen tehdään jousivaa'an tyyppisillä jännitysmittauslaitteilla. Mitattavan sivun ja osamatkojen merkinnässä käytetään mittatikkuja, linjaseipäitä ja luotilankoja. Sivu joudutaan merkitsemään, jos se on pidempi kuin nauhan pituus. Mitatut vinoetäisyydet pitää korjata eli redukoida vaakatasoon. Tätä varten määritetään mittanauhan kaltevuus esimerkiksi kaltevuusmittarin eli klinometrin avulla. Nauhan pituus muuttuu lämpötilan muuttuessa. Lämpötilan vaikutusten arvioimiseksi tarvitaan lämpömittaria. (Kuva 145, s. 182.)




**KUVA 145** *Mittanauhamittauksen apuvälineitä. a) Jännitysmittauslaitteita tarvitaan, kun nauhaa joudutaan pitämään ilmassa. b) Merkintävälineitä tarvitaan erityisesti silloin, kun mitattava sivu on mittanauhaa pidempi.*

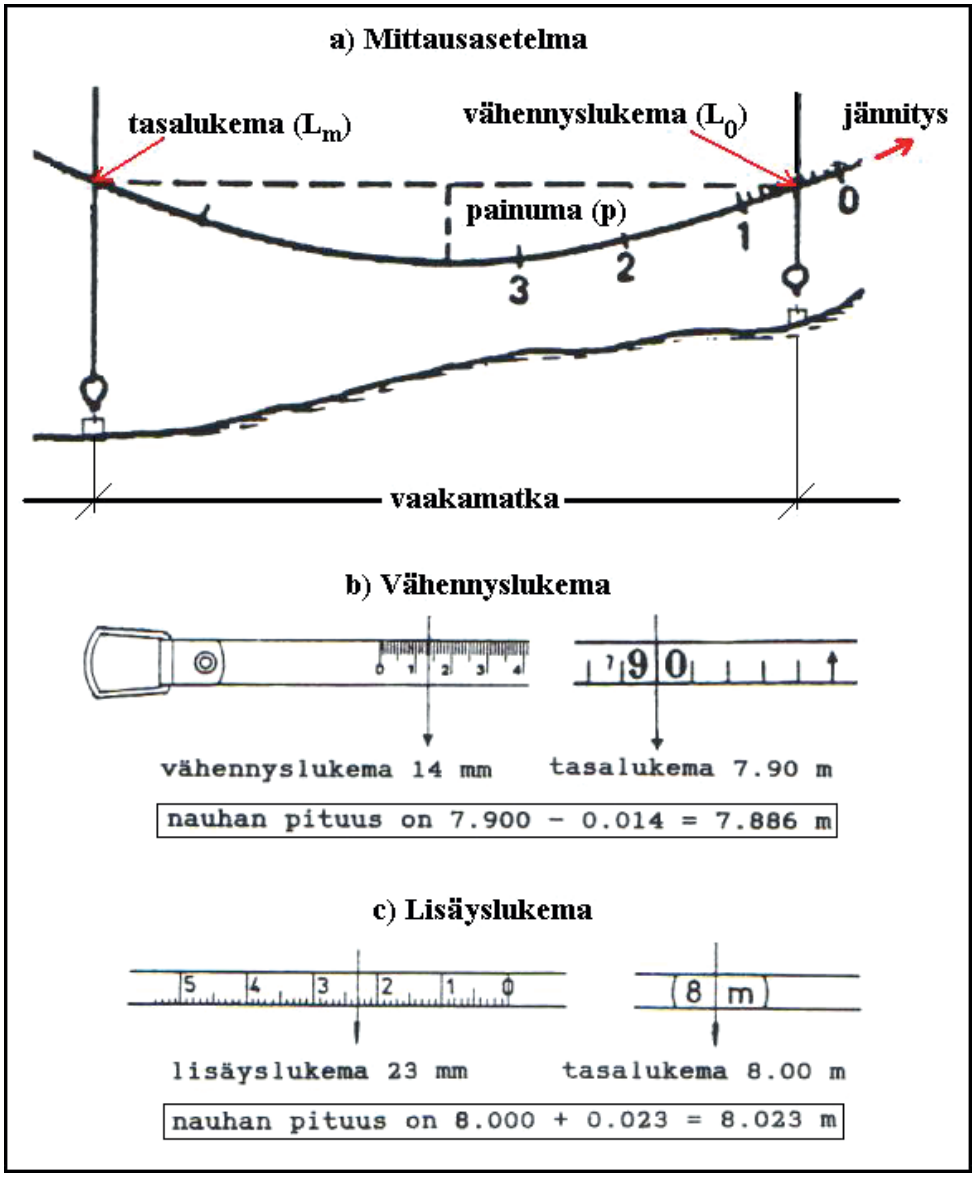
### 5.2.2 Mittanauhan lukeminen

Mittanauhalla mittaaminen on yksinkertaista, jos nauha on koko matkaltaan tuettu ja vaakasuorassa. Toisaalta, jos mittanauhaa joudutaan pitämään ilmassa, muuttuu mittaus melko vaativaksi suoritukseksi. Tällöin nauhan painuman hallitsemiseksi nauha tulee jännittää vakiojännityksellä. Samanaikaisesti mittaaja joutuu luotimaan lukemakohdan mittauspisteeseen. (Kuva 146.)




**KUVA 146** *Jos mittanauhalla joudutaan mittaamaan nauha ilmassa, on mittaus teknisesti vaativaa, koska mittaaja joutuu samanaikaisesti luotimaan lukemakohdan mittauspisteeseen ja jännittämään nauhaa.*

Mittanauha jännitetään nauhan nollapäästä, jolloin nollapäätä on vaikea pitää täsmällisesti kohdallaan. Ilmassa vapaasti roikkuvan mittanauhan pituus luetaankin niin, että nauhan kelapäähän asetetaan mitattavaan matkaan sopiva tasametrilukema tai tasadesimetrilukema, ja mitan nollapäästä luetaan vähennys- tai lisäyslukema. Vähennyslukemaa käytetään, kun nauhan nollapiste on mitattavan sivun ulkopuolella ja lisäyslukemaa käytetään, kun nollapiste on sivun sisäpuolella. (Kuva 147.)




**KUVA 147** *Kun nauha on ilmassa, otetaan lukema nauhan nollapäästä, jossa on jännitysmittari. Lukema on joko vähennys- tai lisäyslukema. Nauhan kelapäässä pidetään sopiva tasalukema. Tuloksena saadaan riippuvan nauhan muodostaman kaaren pituus. Lukema korjataan tarvittaessa vaakamatkaksi.*

### 5.2.3 Mittanauhamittauksen korjaukset

Kun mittanauha riippuu vapaasti mittauspisteiden välillä, on mitattu pituus nauhan muodostaman kaaren pituus. Tämä tulee korjata mittauspisteiden välisen jänteen pituudeksi. Korjaus tehdään painumakorjauksen avulla. Painumakorjaus voidaan määrittää nauhan jollekin pituudelle esim. mittaamalla kahden vaakatasossa tasaisella lattialla olevan pisteen välinen nauhan pituus ($s_N$) ja sitä vastaava painuma ($p$) halutulla jännityksellä. Yleensä käytetään 50 N jännitystä. Vapaasti riippuvan nauhan geometrian perusteella voidaan johtaa painumakorjaus

$$K_{PN} = -\frac{8p^2}{3s_N}, \tag{112}$$

jossa $K_{PN}$ on painumakorjaus pituudelle $s_N$, $p$ on nauhan keskikohdan painuma ja $s_N$ on nauhan pituus. Pituutta ($s_N$) voidaan kutsua painumakorjauksen määrityspituudeksi.

Kun painumakorjaus on määritetty yhdelle pituudelle, voidaan muita pituuksia vastaavat painumakorjaukset laskea, edellyttäen, että mitauksissa käytettään aina samaa jännitystä. Korjaus on

$$K_P = \left(\frac{s}{s_N}\right)^3 K_{PN}, \tag{113}$$

jossa $K_P$ on nauhan pituutta $s$ vastaava painumakorjaus, $K_{PN}$ on määrityspituutta ($s_N$) vastaava painumakorjaus, $s$ on mitattu nauhan pituus ja $s_N$ on painumakorjauksen määrityspituus.

Nauhakorjaus ($K_N$) tarkoittaa poikkeamaa, jonka verran nauhan todellinen pituus eroaa nimellispituudestaan. Nauhakorjaus voidaan tehdä, jos mittanauha on kalibroitu. Kalibroinnissa nauhakorjaus määritetään metrin välein. Suomessa Mittatekniikan keskus (MIKES) kalibroi mittanauhoja.

Mittanauhan pituus vastaa nimellispituuttaan ns. vakauslämpötilassa. Se on ilmoitettu mittanauhan alkupäässä ja on normaalisti 20 °C. Vakauslämpötilasta poikkeavien lämpötilojen vaikutus nauhan pituuteen huomioidaan lämpötilakorjauksen avulla, joka on

$$K_L = \alpha s(t - t_0), \tag{114}$$

jossa $K_L$ on lämpötilakorjaus, $\alpha$ on lämpölaajenemiskerroin, $s$ on mitattu pituus, $t$ on nauhan lämpötila mittaushetkellä ja $t_0$ on nauhan vakauslämpötila. Hiiliteräksen, yleisimmän nauhamateriaalin, lämpölaajenemiskerroin on $\alpha$ = 0.0115 mm/m°C.

Jos nauhan päät ovat eri korkeudella, on nauhasta luettu etäisyys päiden välinen vinoetäisyys. Se tulee korjata vaakamatkaksi. Vaakaetäisyys voidaan laskea trigonometrisesti, jos nauhan päiden välinen korkeusero tai korkeuskulma on mitattu. Jos nauhan päiden välinen korkeusero tunnetaan, lasketaan vaakamatka Pythagoraan lauseeseen perustuvalla kaavalla

$$s = \sqrt{v^2 - \Delta H^2} \ . \tag{115}$$

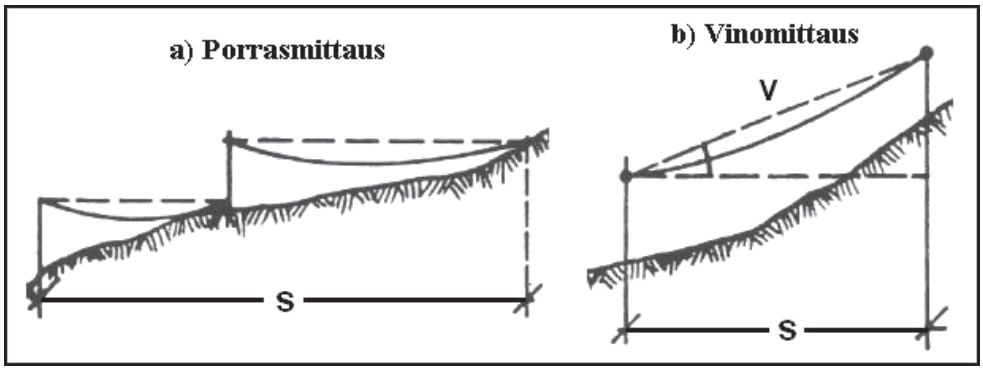
Jos taas päiden välinen korkeuskulma on mitattu esim. klinometriä käyttäen, on vaakamatka

$$s = v \cos \alpha \ . \tag{116}$$

Kaavoissa (115) ja (116) $s$ on vaakaetäisyys, $v$ on vinoetäisyys, $\Delta H$ on nauhan päiden korkeusero ja $\alpha$ on päiden välinen korkeuskulma.

### 5.2.4 Porras- ja vinomittaus

Kun mitattava matka on suurempi kuin nauhan pituus, jaetaan mitattava matka osiin. Osapituudet merkitään mittatikuilla tai luotilangoilla. Merkinnät saadaan samalle linjalle esimerkiksi kulmanmittauskojeen tai kaksoispentagonprisman avulla linjaamalla. Linjan merkinnän jälkeen mitataan osamatkat. Kaltevassa maastossa käytetään joko porras- tai vinomittausta (kuva 148).




**KUVA 148** *Rinteessä mittanauhamittaus voidaan suorittaa joko a) porrasmittauksena tai b) vinomittauksena.*

Porrasmittauksessa pidetään nauhan molemmat päät samalla korkeudella, jolloin matkat saadaan helposti vaakaetäisyyksinä. Menetelmä ei sovi kovin jyrkkiin rinteisiin. Vinomittauksessa nauhan päät ovat eri korkeudella. Huolellisella työllä molemmilla nauhamittauksen mittaustavoilla voidaan päästä mittaustarkkuuteen, joka on 5 mm/100 m (mittausten keskihajonta).

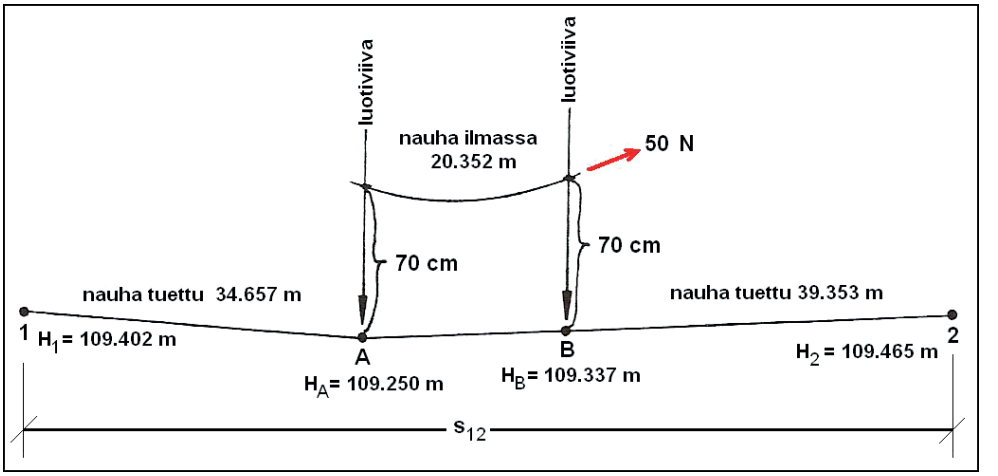
## 5.2.5 Tehtäviä

**136.** Kuva 143 b (s. 180) esittää vaaituskojeella tehtävän optisen etäisyydenmittauksen periaatetta. Kuinka etäisyys lasketaan kuvan esittämässä tilanteessa?

**137.** Kuvaile mittanauhan painumakorjauksen määrittämiseksi tarvittavat mittausjärjestelyt (kaava 112, s. 184).

**138.** Mittanauhan painumakorjaus määritettiin mittaamalla vaakasuoralla alustalla nauhan keskikohdan painumaksi $p$ = 0.302 m, kun nauha jännitettiin 50 N voimalla ja nauhan pituus oli 30.015 m. Laske painumakorjaus.

**139.** Edellisen tehtävän (138) nauhalla mitattiin pisteiden 1 ja 2 välinen etäisyys kolmessa osassa kuvan 149 esittämällä tavalla. Nauhan lämpötila oli +16 °C, vakauslämpötila oli +20 °C, nauhan lämpölaajenemiskerroin oli $\alpha$ = 0.0115 mm/m°C ja lineaariseksi oletettu nauhakorjaus oli -3.5 mm/50 m. Laske näiden tietojen perusteella pisteiden 1 ja 2 välinen vaakamatka.




**KUVA 149** *Tehtävä 139: mittanauhalla kolmessa osassa mitattu matka. Välillä AB olevan esteen vuoksi tämä osamatka jouduttiin mittaamaan nauha ilmassa.*

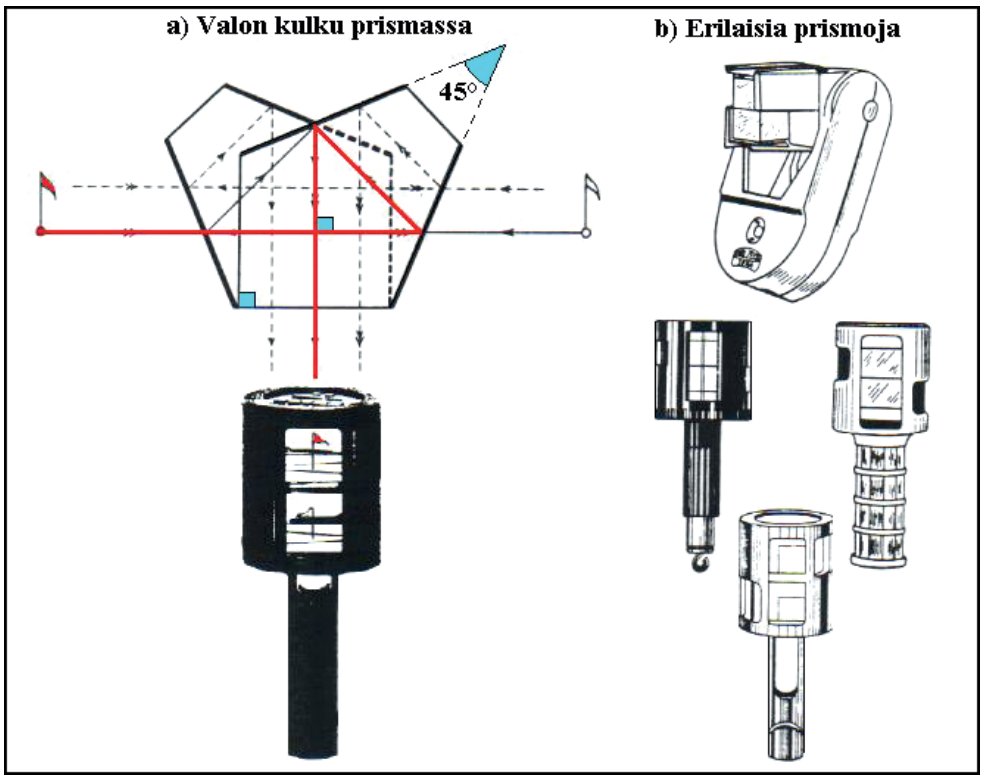
**140.** Työmaalla on mitattava paikalleen 27.356 m etäisyydellä oleva piste teräsmittanauhalla. Nauhan lineaariseksi oletettu nauhakorjaus on +2.0 mm/50 m. Painumakorjaus on -37.5 mm, kun nauhaa jännitetään 50 N voimalla ja nauhan pituus on 50 m. Nauhan lämpötila on +8 °C, vakauslämpötila on +20 °C ja nauhan lämpölaajenemiskerroin on $\alpha$ = 0.0115 mm/m°C. Minkä nauhalukeman kohdalle piste tulee merkitä, kun mittaus suoritetaan riippuvalla nauhalla ja nauhan päät ovat samalla korkeudella?

## 5.3 Suorakulmainen mittaus

### 5.3.1 Kaksoispentagonprisma

Kulmaprismat ovat noin 10 mm:n vahvuisesta tasapaksusta lasilevystä leikattuja lasikappaleita, joiden leikkaussärmät ovat kohtisuoria. Prisman leikkauspinnoissa tähtäyssäde heijastuu kaksi kertaa ja taittuu kaksi kertaa. Pentagonprisma on poikkileikkaukseltaan viisikulmion muotoinen kappale. Prisman kahden leikkauspinnan välinen kulma on suorakulma. Sitä vastapäätä olevan kahden hopeoidun peilipinnan välinen kulma on 45°. Pentagonprismassa sen lävitse kulkeva valonsäde muodostaa prisman sisälle suoran kulman. Pentagonprisma onkin suoran kulman mittauslaite. Kun kaksi pentagonprismaa asetetaan päällekkäin, syntyy kaksoispentagonprisma. Sen avulla voidaan mitata suoran kulman lisäksi myös oikokulma. (Kuva 150.)

Prismoja käytetään optisten tähtäys- ja lukemalaitteiden rakenneosina sekä suoran ja oikokulman mittausvälineinä. Kulmaprismat ovat ns. vapaan käden kojeita. Vastakohtana ovat varsinaiset mittauskojeet, kuten vaaituskojeet, teodoliitit ja takymetrit. Niitä voidaan kutsua jalustakojeiksi.

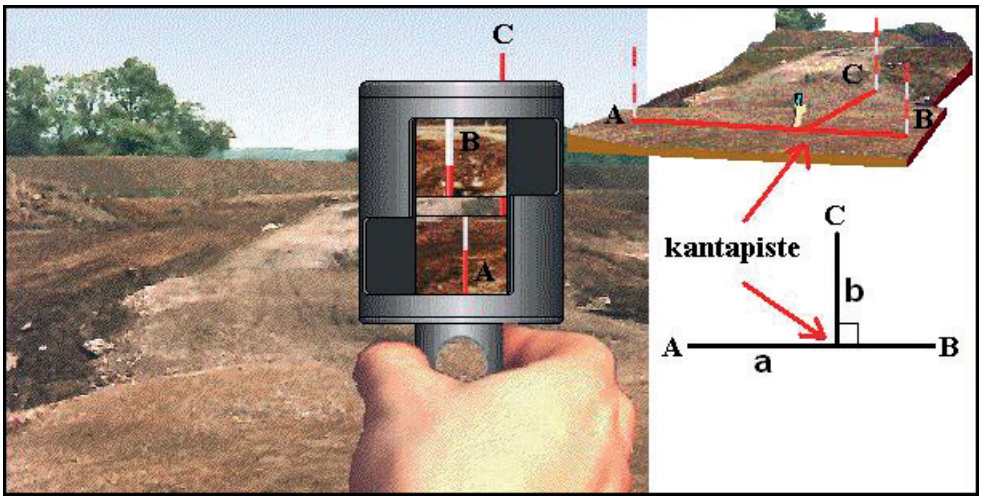



**KUVA 150** *Kaksoispentagonprisman avulla määritetään suora- tai oikokulma. a) Valon kulku prismassa. b) Erimallisia kaksoispentagonprismoja.*

### 5.3.2 Suorakulmainen mittaus ja sen laskennat

Suorakulmainen mittaus on ollut aikanaan yleisesti käytetty mittausmenetelmä kartoitus- ja merkintämittauksissa. Siihen liittyvät mittaukset voidaan suorittaa yksinkertaisilla ja halvoilla mittausvälineillä. Suorakulmainen mittaus ei kuitenkaan ole enää tarkkuutensa ja tehokkuutensa puolesta vertailukelpoinen nykyaikaisempien menetelmien kanssa. Suorakulmaisen mittauksen periaate on kuitenkin edelleen ajankohtainen. Periaate tulee ymmärtää ja sitä joutuu käyttämään monissa yhteyksissä, esim. takymetrillä mitattaessa ja rakentamisen mittausten yhteydessä.

Suorakulmaisessa mittauksessa muodostetaan suorakulmainen kolmio siten, että mittauksen lähtösivulta haetaan ns. kantapiste. Kantapisteen ja määritettävän pisteen kautta kulkeva suora on suorassa kulmassa lähtösivuun nähden. Kantapisteen merkinnän jälkeen mitataan lähtöpisteen ja kantapisteen välinen etäisyys. Tätä etäisyyttä kutsutaan a-mitaksi. Sitten mitataan kantapisteen ja määritettävän pisteen välinen etäisyys, jolloin saadaan b-mitta. a-mitta mitataan lähtösivun suunnassa ja b-mitta on pisteen etäisyys lähtösivusta. a- ja b-mitat muodostavat mittauspaikalle lähtösivuun sidotun suorakulmaisen koordinaatiston. b-mitta on positiivinen lähtösivun oikealla puolella ja negatiivinen lähtösivun vasemmalla puolella. (Kuva 151.)




**KUVA 151** *Suorakulmaisessa kartoituksessa kantapisteen paikka etsitään lähtösivulla AB kaksoispentagonprisman avulla. Suorakulmaiset kartoitusmitat (a ja b) mitataan mittanauhalla. (Scherer 1999.)*

Määritettävän pisteen P koordinaatit halutaan lähtösivun määrittämässä koordinaatistossa. Suorakulmaiset kartoitusmitat pitää siis muuntaa lähtösivun koordinaatistoon. Koordinaatit voidaan laskea ratkaisemalla aluksi lähtösivun suuntakulma geodeettisella käänteistehtävällä (kuva 152, s. 190):

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \tag{117}$$

Seuraavaksi ratkaistaan suorakulmaisessa kolmiossa suorakulmaisista kartoitusmitoista vaakamatka ($s_{1P}$) ja kulma ($\alpha_1$) lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P:

$$\begin{cases} s_{1P} = \sqrt{a_P{}^2 + b_P{}^2} \\ \alpha_1 = \arctan\left(\frac{b_P}{a_P}\right) \end{cases}. \tag{118}$$

Jos noudatetaan merkkisääntöä, että b-mitta on positiivinen lähtösivun oikealla puolella ja negatiivinen vasemmalla puolella, kulman $\alpha_1$ laskentakaava huomioi kulman kiertosuunnan oikein jatkolaskennan kannalta.

Seuraavaksi lasketaan suuntakulma lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P:

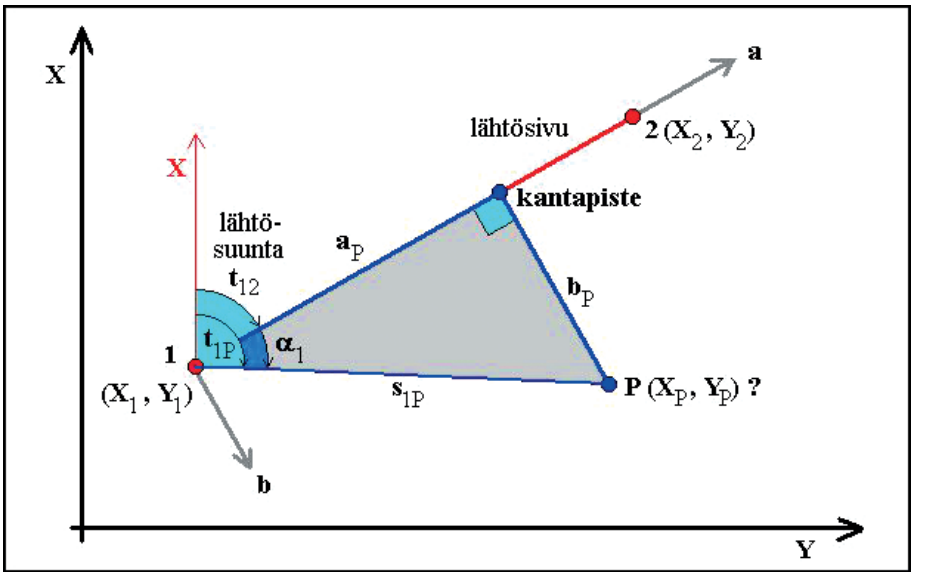
$$t_{1P} = t_{12} + \alpha_1. \tag{119}$$

Lopuksi lasketaan määritettävän pisteen koordinaatit geodeettisella päätehtävällä:

$$\begin{cases} X_P = X_1 + s_{1P}\cos t_{1P} \\ Y_P = Y_1 + s_{1P}\sin t_{1P} \end{cases}. \tag{120}$$

Kaavoissa 114–117 $X_1$, $Y_1$, $X_2$ ja $Y_2$ ovat lähtöpisteiden koordinaatit, $t_{12}$ on lähtösivun suuntakulma, $a_P$ ja $b_P$ ovat pisteen P suorakulmaiset kartoitusmitat, $\alpha_1$ on kulma lähtöpisteellä 1, $t_{1P}$ on suuntakulma ja $s_{1P}$ on vaakamatka lähtöpisteeltä 1 määritettävälle pisteelle P sekä $X_P$ ja $Y_P$ ovat määritettävän pisteen koordinaatit. Kaavojen merkinnät vastaavat kuvan 152 (s. 190) merkintöjä.

Edellä esitetty suorakulmaisen mittauksen laskentatapa on vain yksi monista vaihtoehdoista. Usein suorakulmaista mittausta on tarkoituksenmukaista tarkastella koordinaatistomuunnoksen näkökulmasta, sillä suorakulmaiset kartoitusmitat määrittävät kohteen sijainnin lähtösivuun sidotussa suorakulmaisessa ab-koordinaatistossa. Sitä voidaan kutsua sivujärjestelmäksi. Sivujärjestelmän koordinaatistosta voidaan siirtyä Helmertin muunnoksella lähtöpisteiden määrittämään pääjärjestelmän XY-koordinaatistoon. (Kaavat 57–59, s. 83 sekä luku 2.10.6 Muunnosparametrit muista lähtötiedoista, s. 87.)

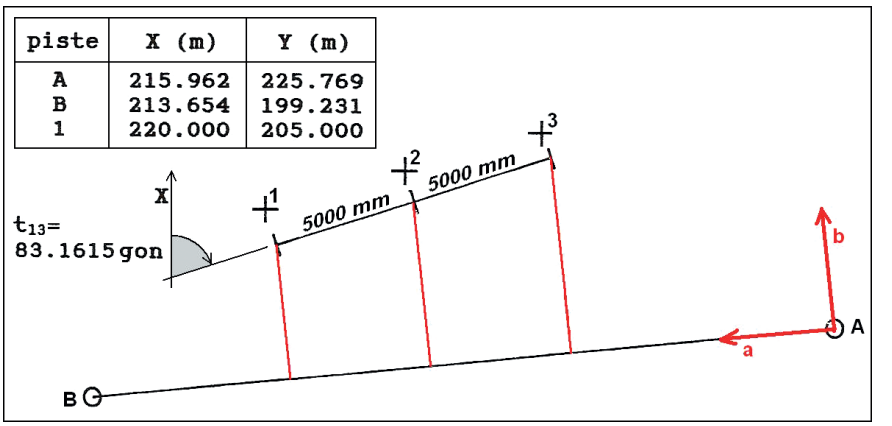



**KUVA 152** *Suorakulmaisen mittauksen laskennassa käytettävät suureet. Suorakulmaiset kartoitusmitat (a ja b) määrittävät mittauspaikalle oman koordinaatistonsa, jonka a-suunta kiinnitetään lähtösivuun.*

## 5.3.3 Tehtäviä

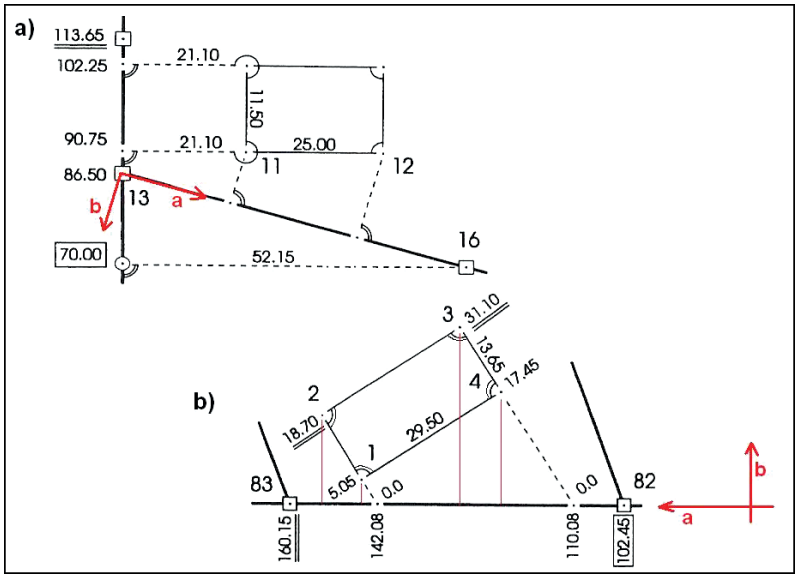
**141.** Rajapyykki 4 kartoitettiin suorakulmaisesti linjalta 123–124. Linjan suuntakulma oli $t_{123\text{-}124}$ = 46.120 gon ja lähtöpisteen 123 koordinaatit olivat $X_{123}$ = 473.12 m ja $Y_{123}$ = 702.12 m. Pyykin suorakulmaiset kartoitusmitat olivat *a* = 52.03 m ja *b* = -12.34 m. Laske pyykin koordinaatit kahdella tavalla: a) käytä kaavoja 118–120 (s. 189), b) Käytä Helmertin muunnosta (kaavat 56–59, s. 82–83).

**142.** Laske kuvan 153 esittämien pisteiden 1–3 suorakulmaiset mitat linjan AB suhteen. Lähtötiedot ovat kuvassa.




**KUVA 153** *Tehtävä 142: suorakulmaisten mittojen laskeminen.*

**143.** a) Laske kuvan 154 esittämien pisteiden 11 ja 12 suorakulmaiset mitat linjan 13–16 suhteen. b) Laske pisteiden 1–4 suorakulmaiset mitat linjan 82–83 suhteen. Pisteellä 82 a-mitta on 102.45 m.




**KUVA 154** *Tehtävä 143 a ja b: suorakulmaisten mittojen laskeminen (Gross 2004, s. 95).*

## 5.4 Korkeuksien määrittäminen klinometrillä

Kaltevuusmittari eli klinometri on yksinkertainen mittausväline, jolla mitataan korkeuskulmia. Laitteesta riippuen mittaustulos saadaan joko asteina, kaltevuusprosenttina tai määrätyllä etäisyydellä olevan kohteen korkeutena. Yleisimmin käytettävissä klinometreissä on kaksi asteikkoa, esimerkiksi aste- ja kaltevuusprosenttiasteikot. Mitattaessa kaltevuusmittaria pidetään pystyasennossa, niin että sivulla näkyvä asteikko osoittaa vasemmalle. Kohteeseen tähdättäessä mittaaja pitää kummankin silmänsä auki ja ottaa lukeman laitteen päässä olevan tähtäysikkunan indeksiviivan kohdalta. (Kuva 155, s. 192.)

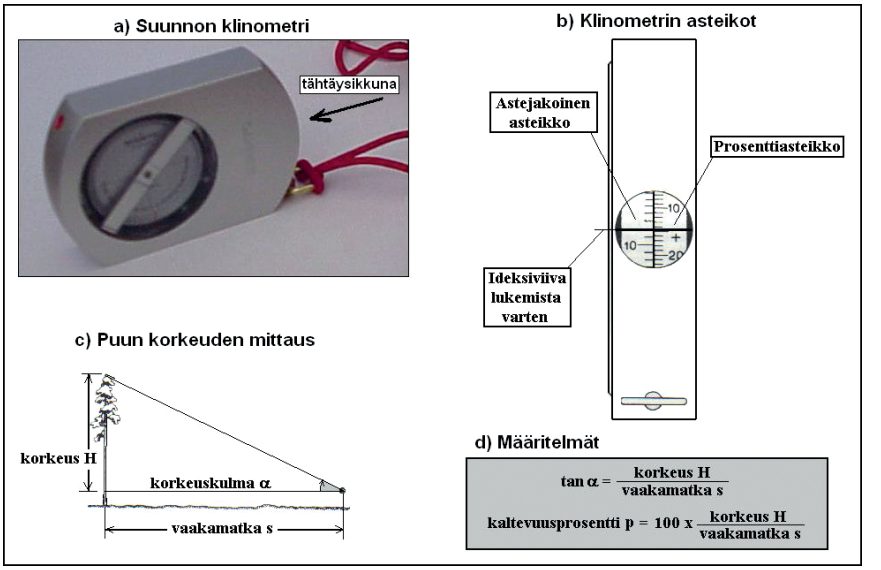
Kaltevuusmittarin avulla voidaan mitata kohteiden korkeuksia, jos apuna käytetään myös mittanauhaa. Tällöin joudutaan tekemään joitakin yksinkertaisia laskutoimituksia:

$$H = s \tan \alpha \qquad (121)$$

$$H = s \frac{p}{100}, \qquad (122)$$

joissa $H$ on kohteen korkeus, $s$ on vaakamatka havaitsijasta kohteeseen, $\alpha$ on korkeuskulma ja $p$ on kaltevuusprosentti. Merkinnät vastaavat kuvan 155 merkintöjä.

Kaltevuusmittaria käytetään mittaus- ja kartoitustekniikassa esim. vaativien satelliittimittausten yhdessä mittauspaikan kartoittamiseen. Tarkoituksena on selvittää näkemäesteiden vaikutus satelliittien näkyvyyteen. Mittanauhamittauksen yhteydessä kaltevuusmittarilla on voitu mitata nauhan päiden korkeusero.

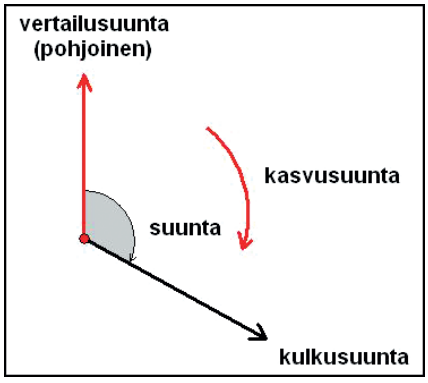



**KUVA 155** *a) Suunnon valmistama klinometri. b) Aste- ja prosenttiasteikoilla varustettu klinometri. Havaitsija katsoo kohdetta tähtäysikkunan kautta kumpikin silmä auki. Lukema otetaan indeksiviivan kohdalta. c) Puun korkeus voidaan laskea korkeuskulman ja vaakamatkan perusteella. d) Suureiden keskinäiset riippuvuudet.*

## 5.5 Suuntien määrittäminen

### 5.5.1 Suuntakäsite

Suunta on tärkeä käsite, kun kuvataan kahden kohteen keskinäistä asemaa ja liikkumista paikasta toiseen. Suunta on kulkusuunnan ja valitun vertailusuunnan välinen kulma. Maanmittaustekniikassa suunta määritellään vertailusuunnasta lähtien myötäpäivään kiertyvänä kulmana (kuva 156, s. 193). Vertailusuunta on kartoilla ja maanmittaustekniikassa pohjoissuunta. Muitakin yleisesti käytettyjä ja hyväksyttyjä vertailusuunnan määrittelytapoja löytyy. Matematiikassa suunnat kasvavat vastapäivään ja vertailusuuntana on itä. Tähtitieteessä suunnat kasvat myötäpäivään ja vertailusuuntana on etelä. Kun eri asiayhteyksissä törmää suuntakäsitteeseen, pitää aina varmistaa, millä tavoin määritellystä suunnasta on kysymys.




**KUVA 156** *Suunta on vertailusuunnan ja kulkusuunnan välinen kulma. Maanmittaustekniikassa se mitataan pohjoissuunnasta myötäpäivään kiertyvänä kulmana.*

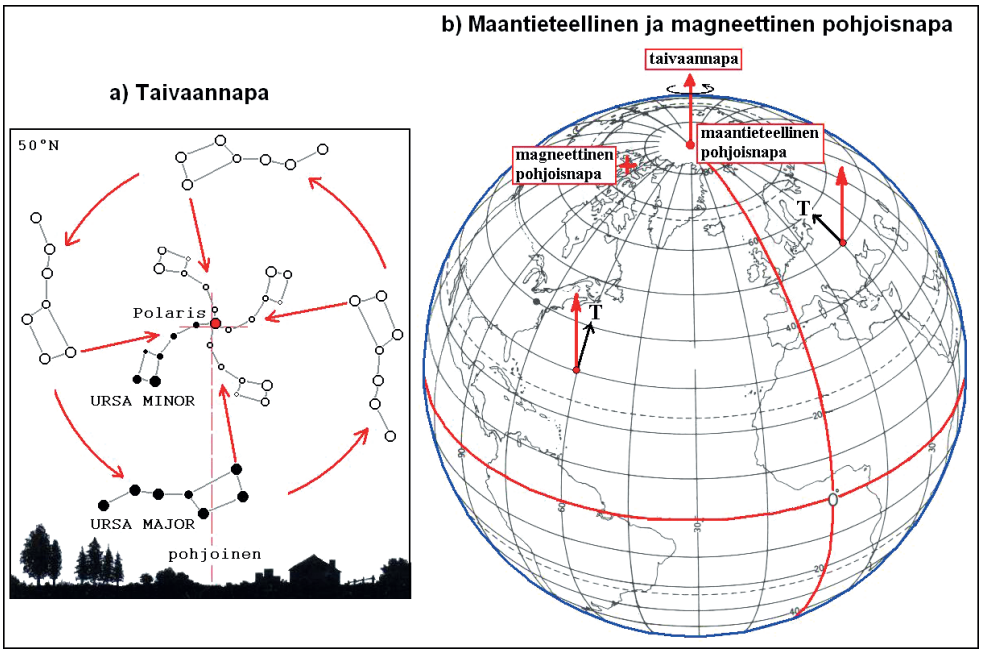
Kun vertailusuunta on pohjoinen ja suunnat kasvavat myötäpäivään, suunta voi saada astejärjestelmässä arvoja välillä [0°, 360°) seuraavasti (kuva 158 b, s. 194):

- 0° on pohjoinen
- 90° on itä
- 180° on etelä
- 270° on länsi.

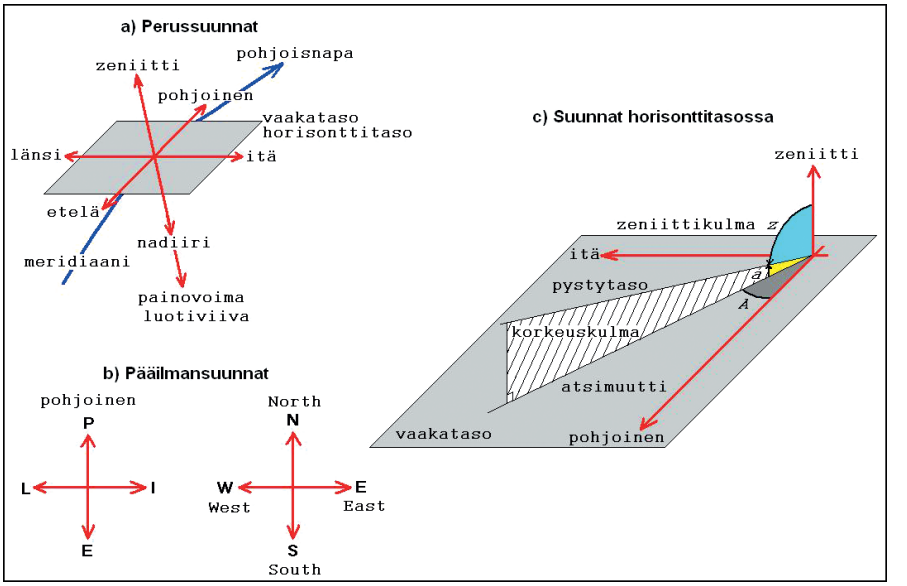
Suunta pidetään aina arvovälillä [0°, 360). Suuntia ja kulmia yhteen laskettaessa voidaan kuitenkin saada yli 360° suuntia. Tällöin on tehty yli täysi kierros, jolloin tuloksesta voidaan vähentää 360°. Jos lähtösuunnalta kierrytään vastapäivään, voidaan saada jopa negatiivisia suuntia. Tällöin lisätään 360°, jotta päästään sovitulle arvovälille.

## 5.5.2 Vertailusuunnat

Suunnan määritykseen liittyvä vertailusuunta voi olla maantieteellinen pohjoinen, magneettinen pohjoinen tai karttapohjoinen. Maantieteellinen pohjoinen, jota voidaan kutsua myös tähtitieteelliseksi pohjoiseksi tai napapohjoiseksi, voidaan määritellä eri tavoin. Kuitenkin tarkoitetaan samaa vertailusuuntaa. Jos tarkastelun lähtökohtana on maapallon asteverkko, maantieteellinen pohjoinen on suunta pohjoisnavalle pitkin meridiaanin eli pituuspiirin kaarta (kuva 157 b, s. 194). Tähtitieteen näkökulmasta maantieteellinen pohjoinen on taivaannavan suunnassa (kuva 157 a, s. 194). Taivaannapa on piste taivaanpallolla, jonka ympäri Maan kiertoliike tähtien suhteen näyttää tapahtuvan. Lähellä tätä pistettä sijaitsee Pohjantähti eli Polaris. Kun ihminen katsoo Pohjantähteen, katsoo hän pohjoiseen. Pohjantähti on melko helppo löytää Otavan tähtikuvion avulla. Otava on osa Ison Karhun (Ursa Major) tähdistöä (kuva 157 a, s. 194). Maapallon pinnalla suuntien esittämiseen liittyviä muita käsitteitä havainnollistetaan kuvassa 158 (s. 194).

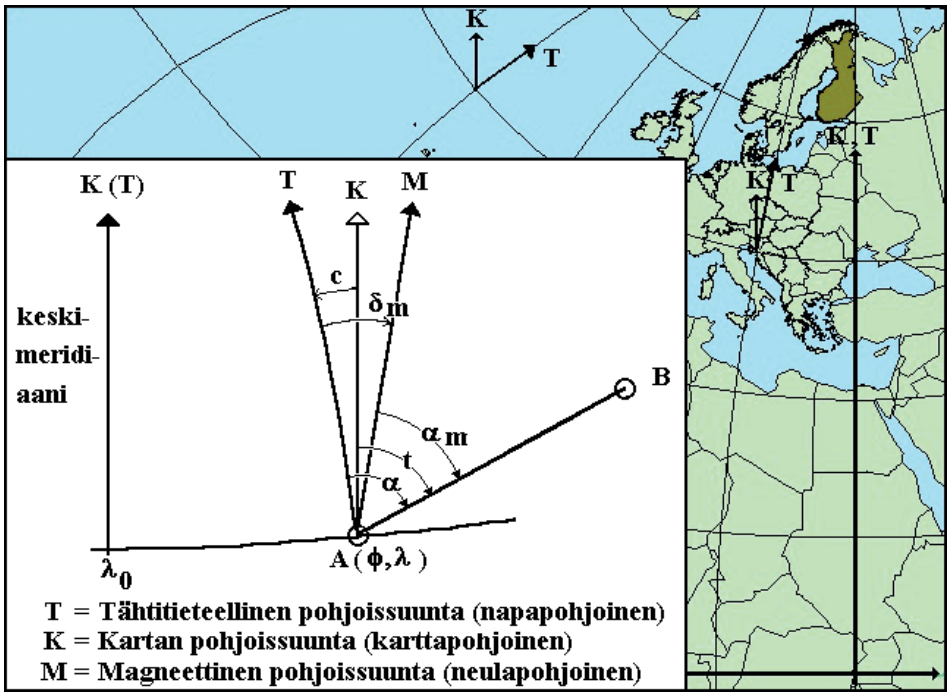



**KUVA 157** *Taivaannapa (a) määrittää tähtitieteellisen pohjoisen (T). Se näkyy samassa suunnassa kuin maantieteellinen pohjoisnapa (b). Asteverkon pituuspiirit (meridiaanit), jotka kulkevat pohjoisnavalta etelänavalle, osoittavat maantieteellisen pohjoisnavan suunnan. Kuvaan (b) on merkitty myös magneettisen pohjoisnavan likimääräinen paikka.*



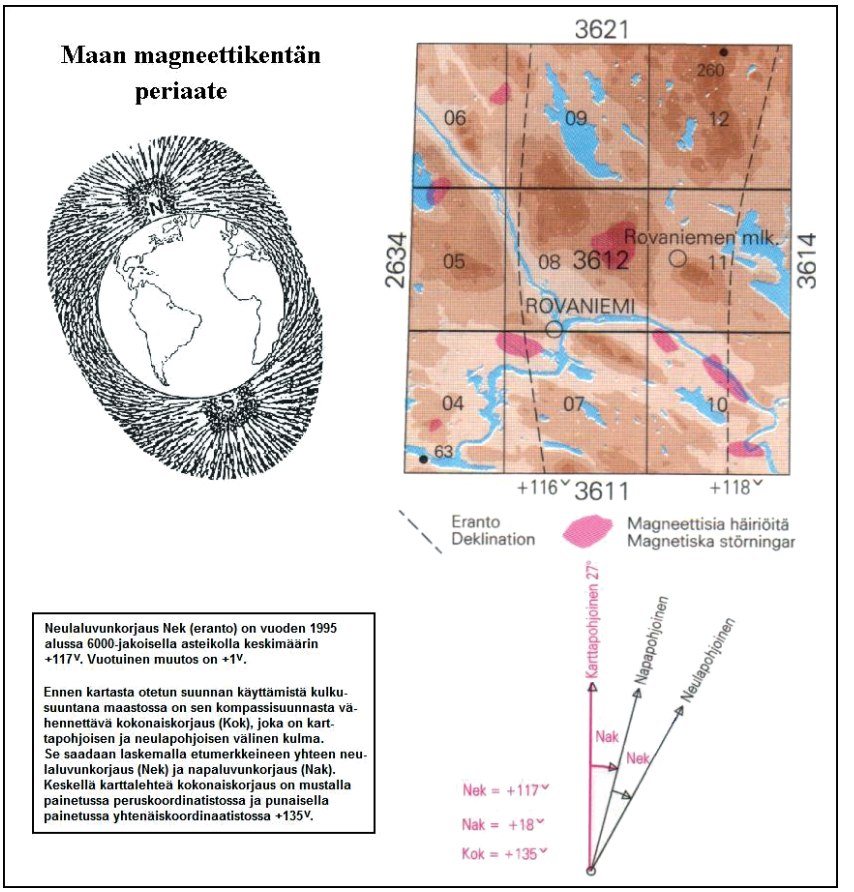

**KUVA 158** *a) Perussuunnat maapallon pinnalla. b) Pääilmansuunnat suomeksi ja englanniksi. c) Suunnat horisonttitasossa eli havaintopaikan vaakatasossa. Atsimuutti on maantieteellisen pohjoisen suhteen mitattu suunta. Esityksen havainnollisuuden vuoksi pohjoissuunta on piirretty kuvassa poikkeuksellisesti alaspäin.*

Kartalla pohjoissuunta voi liittyä projektiotasolla määriteltyyn suorakulmaiseen koordinaatistoon. Karttapohjoinen on kartan suorakulmaisen koordinaatiston pohjoissuunta. Suomalaisilla maastokartoilla karttaprojektio on poikittaisasentoinen Mercatorin projektio. Tässä projektiossa suorakulmainen koordinaatisto määritellään niin, että keskimeridiaani on pohjoisakseli. Se edustaa karttapohjoista kaikkialla kartan käyttöalueella. (Kuva 159.)




**KUVA 159** *Karttapohjoinen (K) on koordinaatiston pohjoissuunta. Kuvan kartta on poikittainen sivuava Mercatorin projektio, jonka keskimeridiaani on 30°I. Keskimeridiaani on kartan suorakulmaisen koordinaatiston pohjoisakseli ja päiväntasaaja on itäsuunnan koordinaattiakseli. Karttapohjoinen (K) on sama suunta kaikkialla kartan alueella. Ainoastaan keskimeridiaanilla karttapohjoinen yhtyy napapohjoiseen (T).*

Maapallolla on magneettikenttä, jonka pääkenttä muistuttaa sauvamagneetin aiheuttamaa magneettikenttää (kuva 160, s. 196). Magneettikentän pohjoinen napa sijaitsee Pohjois-Kanadassa (kuva 157 b, s. 194). Magneettikentän suunta voidaan mitata hyvin yksinkertaisesti. Ilmiötä on osattu käyttää apuna suunnanmäärityksessä jo noin 2000 vuoden ajan. Magneettisen pohjoisnavan eli neulapohjoisen arvoa suunnanmäärityksessä vähentää sen epävakaus. Maan magneettikentän suunta ja suuruus vaihtelevat jatkuvasti. Osa muutoksista on säännöllisiä, joten niitä voidaan ennustaa. Toisaalta Aurinko synnyttää magneettisia myrskyjä, jotka aiheuttavat hetkellisiä häiriöitä Maan magneettikenttään. Myös malmiesiintymät, suuret rakenteet ja voimalinjat voivat paikallisesti häiritä magneettikenttää (kuva 160, s. 196).




**KUVA 160** *Maan magneettikentän periaate ja suuntien kuvaus maanmittauslaitoksen julkaisemalla 1:50 000 maastokartalla numero 3612 Rovaniemi (© Maanmittauslaitos, lupa numero 51/MML/08). Suomalaiset maastokartat ovat tärkeä pohjoissuuntien eroja koskeva tietolähde. Tietojen sisältä vaihtelee eri mittakaavaisilla ja eri aikoina julkaistuilla kartoilla. Uusilla ETRS89-järjestelmässä tuotetuilla maastokartoilla tietojen esitystapa poikkeaa kuvan esitystavasta. Suuntien erot annetaan kartoilla piiruina ja uusimmilla kartoilla myös asteina.*

### 5.5.3 Suuntien ja niiden erojen nimitykset

Eri pohjoissuuntien (maantieteellinen pohjoinen, karttapohjoinen ja magneettinen pohjoinen) suhteen määriteltyjä suuntia kutsutaan seuraavilla nimillä (kuva 159, s. 195):

- atsimuutti (napaluku, $\alpha$) on maantieteellisen pohjoisen (T) suhteen mitattu suunta
- suuntakulma ($t$) on karttapohjoisen (K) suhteen mitattu suunta
- neulaluku (magneettinen atsimuutti $\alpha_m$) on magneettisen pohjoisen (M) suhteen mitattu suunta.

Sekä vertailusuunnille että niiden suhteen määritellyille suunnille käytetään siis useita nimityksiä. Tämä voi aiheuttaa jonkin verran sekaannusta. Saman asian erilaiset nimitykset johtuvat eri käyttäjäryhmien tarpeista ja perinteistä. Maanmittaajien lisäksi muun muassa sotilaat, veneilijät, suunnistajat ja tähtitieteilijät tarvitsevat työssään ja harrastuksissaan suuntatietoja.

Suuntia joudutaan joskus muuntamaan toisikseen. Muunnoksia varten tulee tuntea pohjoissuuntien erot. Niitä kutsutaan seuraavasti (kuva 159, s. 195 ja kuva 160, s. 196):

- meridiaanikonvergenssi (napaluvun korjaus, Nak, $c$) on maantieteellisen pohjoisen (T) ja karttapohjoisen (K) välinen ero
- magneettinen deklinaatio (neulaluvun korjaus eli eranto, Nek, $\delta_m$) on maantieteellisen (T) ja magneettisen (M) pohjoisen välinen ero.

Meridiaanikonvergenssi on puhtaasti matemaattinen suure, jonka taustalla ovat karttaprojektio ja suorakulmaisen koordinaatiston määrittely. Poikittaisasentoisessa Mercatorin projektiossa meridiaanikonvergenssin suuruus voidaan laskea likimäärin kaavalla

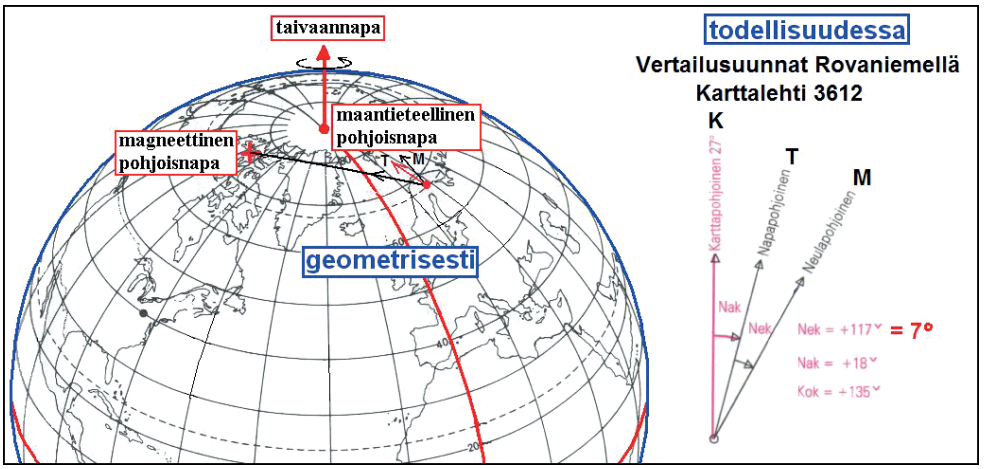
$$c = (\lambda_0 - \lambda)\sin\phi\,, \tag{123}$$

jossa $\phi$ on havaintopaikan leveyskulma, $\lambda$ on pituuskulma ja $\lambda_0$ on kartan keskimeridiaanin pituuskulma. Kaavan perusteella huomataan, että meridiaanikonvergenssin suunta (merkki) muuttuu ylitettäessä keskimeridiaani. Kaava antaa meridiaanikonvergenssin samanmerkkisenä kuin maastokartoilla napaluvun korjaus (Nak).

Magneettisen deklinaation suuruus saadaan parhaiten maanmittauslaitoksen painetuilta maastokartoilta (kuva 160, s. 196). Myös meridiaanikonvergenssin suuruus voidaan arvioida maastokartoilta, jos sitä ei haluta laskea. Magneettisen deklinaation suunta on koko Suomen alueella sellainen, että magneettinen pohjoinen osoittaa aina sekä maantieteellisen pohjoisen että karttapohjoisen itäpuolelle. Tämä on ristiriidassa magneettisen pohjoisnavan maantieteellisen sijainnin kanssa (kuva 161, s. 198), mutta ilmiöllä on geofysikaaliset syynsä. Ne liittyvät Maan magneettikentän vaihteluihin ja epäsymmetrisyyteen.

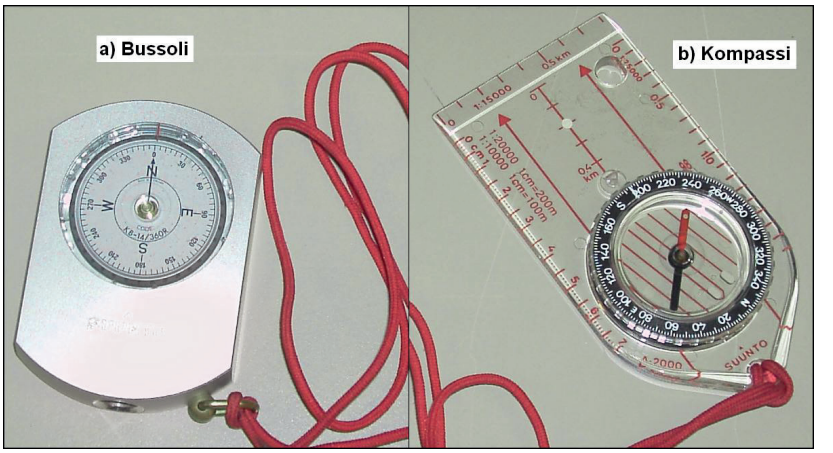
### 5.4.4 Suunnanmääritys

Kun karttapohjoinen perustuu matemaattiseen määrittelyyn, maantieteellinen ja magneettinen pohjoinen määräytyvät tiettyjen fysikaalisten ilmiöiden kautta. Maantieteellinen (tähtitieteellinen) pohjoinen liittyy Maan pyörimisliikkeeseen ja magneettinen pohjoinen Maan magneettikenttään. Suuntiin liittyvien fysikaalisten ilmiöiden vuoksi kaksi jälkimmäistä pohjoissuuntaa voidaan havaita suoraan, mutta karttapohjoinen voidaan mitata vain välillisesti runkopisteiden avulla.




**KUVA 161** *Suomessa kompassineula osoittaa muutamia asteita itään maantieteellisestä pohjoisesta. Magneettisen pohjoisnavan sijainti on kuitenkin sellainen, että geometrisesti tarkastellen sen pitäisi osoittaa länteen maantieteellisestä pohjoisesta.*

Mittaus- ja kartoitustekniikan kannalta keskeisin suunta on suuntakulma. Se määritetään välillisesti mittaamalla koordinaateiltaan tunnetun lähtösivun ja määritettävän suunnan välinen kulma. Suuntakulma saadaan lisäämällä mitattu kulma lähtösivun suuntakulmaan. Maastossa kulkija ei yleensä tarvitse suuntakulmaa vaan neulalukua. Maastossa liikkumisen tarpeista katsoen neulaluku voidaan mitata helposti ja riittävän tarkasti magneettisen pohjoisen suhteen kompassin tai bussolin avulla (kuva 162).



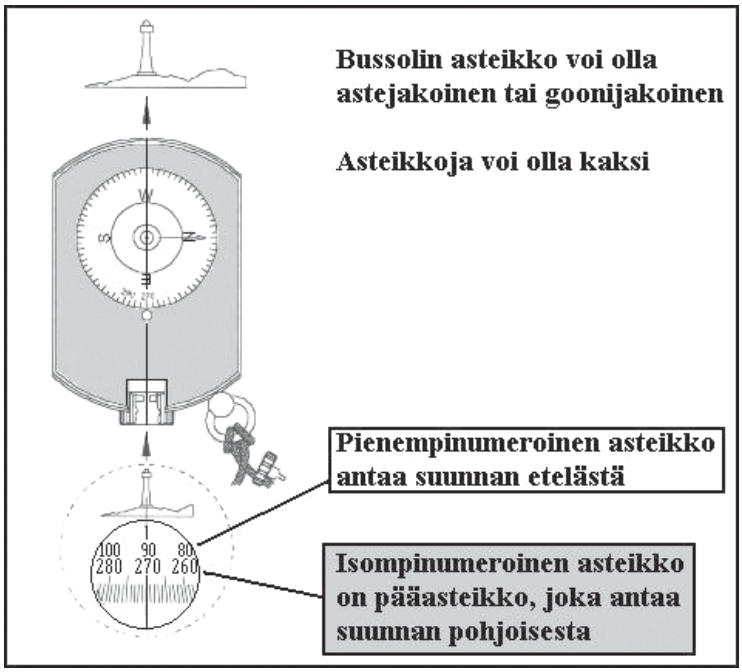

**KUVA 162** *Neulaluku mitataan kompassilla. Kuvassa on kaksi Suunnon valmistamaa kompassia: a) bussoli eli käsisuuntakehä, b) harrastajan suunnistuskompassi. Magneettinen suunnanmääritys on erilaisista suunnan mittaustavoista epäluotettavin. Epäluotettavuuden syinä ovat Maan magneettikentän epäsymmetrisyys, pitkä- ja lyhytaikaiset vaihtelut, paikalliset häiriöt ja mittauslaitteiden epätarkkuudet.*

Bussoli eli käsisuuntakehä on kompassi. Bussoli kuitenkin poikkeaa rakenteeltaan tavanomaisesta suunnistuskompassista, koska bussolilla voidaan tähdätä ja ottaa lukema tarkemmin kuin tavallisella kompassilla. Suuntaa mitattaessa bussoli pidetään vaakasuorassa niin, että kompassiruusu on ylöspäin. Kohteeseen tähdätään kumpikin silmä auki. Lukema otetaan laitteen päässä olevan tähtäysikkunan indeksiviivan kohdalta. Bussolien asteikkojen kanssa tulee olla tarkkana, koska bussoleja valmistetaan aste-, gooni- ja piirujakoisina. Kompassikehään on usein piirretty kaksi asteikkoa, jotka kasvavat vastakkaisiin suuntiin. Toisen asteikon vertailusuunta on pohjoinen ja toisen etelä. (Kuva 163.)

Jos bussolilla mitattu neulaluku halutaan muuntaa suuntakulmaksi, mitattuun suuntaan tulee lisätä kokonaiskorjaus, joka on magneettisen deklinaation (neulaluvun korjauksen, Nek) ja meridiaanikonvergenssin (napaluvun korjauksen, Nak) summa. Kaavana

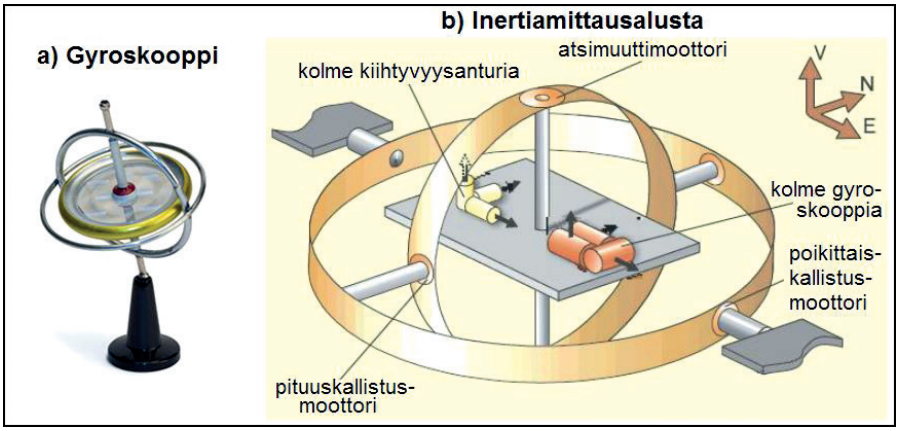
$$t = \alpha_m + \delta_m + c\,. \tag{124}$$

jossa $t$ on suuntakulma, $\alpha_m$ on neulaluku, $\delta_m$ on magneettinen deklinaatio ja $c$ on meridiaanikonvergenssi (kaava 123, s. 197).




**KUVA 163** *Suunnan mittaus bussolilla. Kohteeseen tähdätään kumpikin silmä auki. Lukema otetaan tähtäysikkunan indeksiviivan kohdalta. Kojeessa voi olla kaksi asteikkoa, joiden vertailu- ja kasvusuunnat eroavat toisistaan.*

Myös atsimuutti voidaan mitata. Se voidaan ensinnäkin määrittää havainnoimalla tähtien vaaka- ja korkeuskulmia sekä havaintohetken aikaa. Atsimuutin määritykseen liittyvät tähtitieteelliset mittaukset ovat melko työläitä ja hitaita. Toiseksi atsimuutti voidaan mitata myös nopeasti pyörivän hyrrän avulla eli gyroskooppisesti. Geodeettisista kojeista puhuttaessa gyroskooppi on usein teodoliitin eli kulmamittauskojeen osa tai lisälaite. Kojeyhdistelmää kutsutaan hyrräteodoliitiksi. Nykyaikaisten liikkuvien mittauslaitteiden ja -järjestelmien osana on inertiamittausalusta, joka mittaa mittauslaitteen sijainnin ja asennon muutoksia gyroskooppien ja kiihtyvyysantureiden avulla. Inertiamittaukseen liittyy englanninkielinen lyhenne IMU (Inertial Measuremen Unit). Muun muassa ilmalaserkeilaimet ja ilmakuvauskamerat ovat liikkuvia kaukokartoituksen mittauslaitteita. Nykyisin käytetään myös autoihin ja veneisiin rakennettuja liikkuvia kartoitusjärjestelmiä. (Kuva 164.)




**KUVA 164** *a) Nopeasti pyörivä hyrrä säilyttää suuntansa avaruudessa. Ulkoinen voima suuntaa hyrrää. Likimain pohjoiseen suunnattu hyrrä asettuu maan pyörimisakselin suuntaiseksi Maan pyörimisliikkeeseen liittyvän näennäisen Coriolisvoiman vaikutuksesta. b) Inertiamittausalusta on esimerkiksi ilmalaserkeilainten ja ilmakuvauskameroiden alusta. Se mittaa mittauslaitteen paikan ja sijainnin muutoksia gyroskooppien ja kiihtyvyysantureiden avulla. Inertiamittausalustan gyroskoopit eivät ole mekaanisia laitteita, vaan valoa ja optiikka hyödyntäviä hyvinkin pienikokoisia laitteita.*

Atsimuutti voidaan mitata hyvinkin luotettavasti. Mittaustarkkuus on samaa suuruusluokkaa kuin kiintopisteiden avulla tehtävän suuntakulman määrityksen tarkkuus. Tarvittaessa tähtitieteellisesti tai gyroskooppisesti mitattu atsimuutti voidaan muuntaa suuntakulmaksi kaavalla

$$t = \alpha + c\,. \qquad (125)$$

jossa $t$ on suuntakulma, $\alpha$ on atsimuutti ja $c$ on meridiaanikonvergenssi (kaava 123, s. 197).

## 5.4.5 Tehtäviä

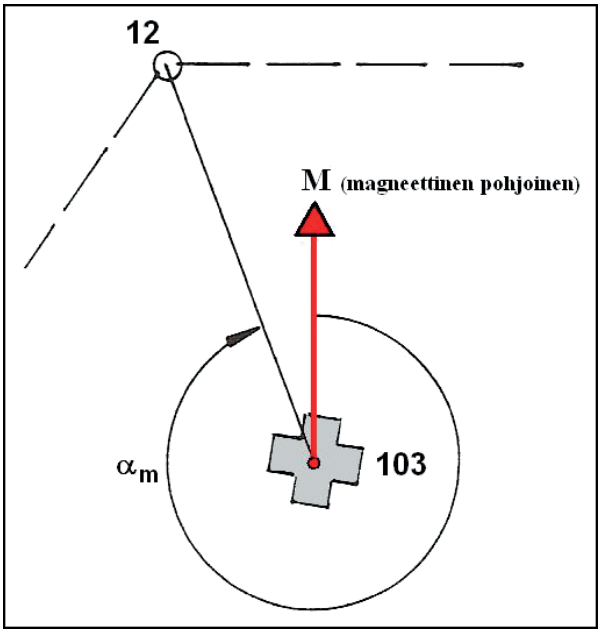
**144.** Mitkä ovat pääilmansuuntien arvot gooneina ilmaistuna?

**145.** Miten Pohjantähden voi löytää Otavan tähtikuvion avulla?

**146.** Neulaluku paikasta A paikkaan B on 107°. Mikä on neulaluku paikasta B paikkaan A?

**147.** Lähdet liikkeelle Rovaniemeltä, niin että kulkusuunnan atsimuutti on koko matkan ajan 45°. Reitti, jota kuljet, on loksodromi. a) Piirrä reitti likimäärin stereografiseen projektioon (vrt. tehtävä 120 ja kuva 124, s. 152). Mihin reitti johtaa? b) Miten reitti kulkee perusasentoisessa Mercatorin projektiossa?

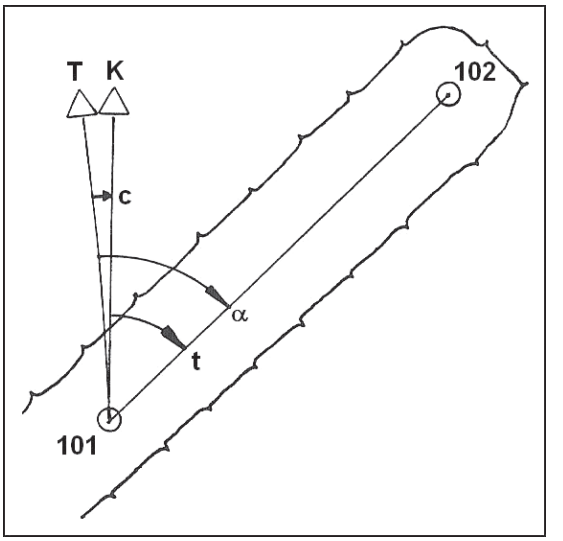
**148.** Katveessa oleva rajamerkki (12) jouduttiin merkitsemään ilmakuvauksessa apusignaalilla (103). Apusignaalilta käsin mitattiin rajamerkkiin bussolilla neulaluku $\alpha_m$ = 375.5 gon ja mittanauhalla etäisyys $s$ = 45.65 m. Aikanaan apusignaalille mitattiin ilmakuvilta koordinaatit $X$ = 6812431.40 m ja $Y$ = 2489596.11 m. Laske rajamerkin koordinaatit, kun mittauspaikan leveyskulma on $\phi$ = 61°30'P, pituuskulma on $\lambda$ = 23°40'I, keskimeridiaani on 24°I ja magneettinen deklinaatio on $\delta_m$ = 6.0 gon. (Kuva 165.)




**KUVA 165** *Tehtävä 148.*

**149.** Paikalla, joka sijaitsee keskimeridiaanilla, mitattiin bussolilla sivun neulaluvuksi $\alpha_m$ = 129.6°. Laske sivun suuntakulma gooneina, kun mittaus tapahtui kesällä 1994, magneettinen deklinaatio oli vuoden 1980 alussa +69$^v$ ja sen vuotuinen muutos oli +2$^v$.

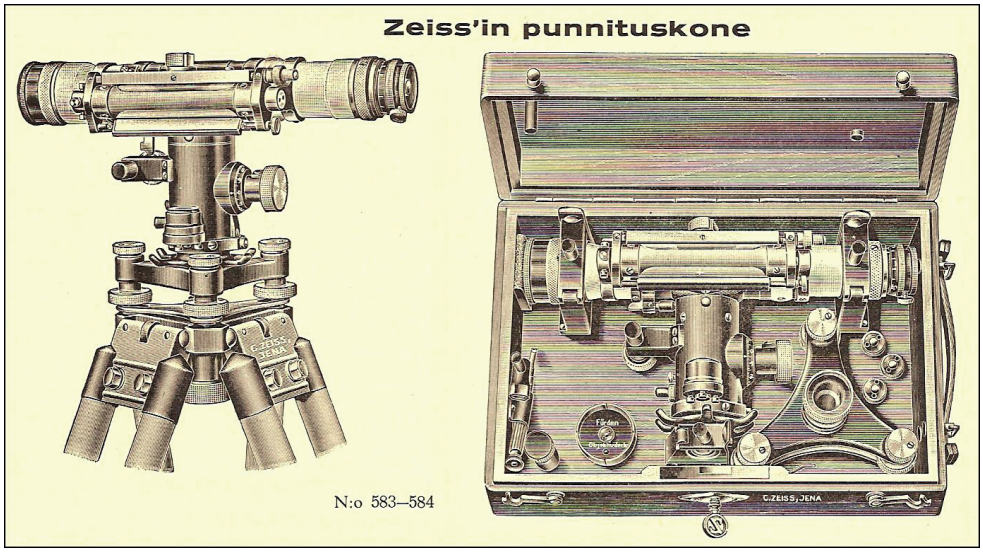
**150.** Tunnelin suunta tarkistettiin hyrräteodoliitilla pisteestä 101 pisteeseen 102, jolloin sivun atsimuutiksi saatiin 51.4530 gon. Kuinka paljon tunnelin suunta poikkeaa rakentamissuunnitelmassa määrätystä suuntakulmasta 50.0000 gon, kun paikan maantieteelliset koordinaatit ovat $\phi = 63°25'15''$ ja $\lambda = 25°15'20''$ ja suunnittelussa käytetyn suorakulmaisen koordinaatiston keskimeridiaani on 24°I? (Kuva 166.)




**KUVA 166** *Tehtävä 150.*

# 6 VAAITUS

Vaaitus on perinteinen ja melko yksinkertainen korkeudenmittausmenetelmä, jota on käytetty mittauksissa satoja vuosia. Perinteisyys näkyy mittausvälineissä ja siinä, että vaaituksen havainnot kirjataan vieläkin usein käsin havaintokirjaan ja lasketaan päässä tai taskulaskimella, kun muissa mittauksissa on jo siirrytty havaintojen automaattiseen tallennukseen ja tietokoneavusteiseen laskentaan. Nykyisin korkeuksia mitataan vaaituksen lisäksi muun muassa takymetrillä trigonometrisesti ja satelliittimittauksin. Tarkimmat korkeudenmittaukset tehdään kuitenkin edelleen vaaitsemalla. Erilaiset vaaituskojeet ovat käytön yksinkertaisuuden vuoksi erittäin käyttökelpoisia monissa rakentamiseen liittyvissä mittauksissa. Mittaus- ja kartoitustekniikan opiskelun näkökulmasta on tärkeää opiskella vaaituskojeen käyttö hyvin, koska sen käytön oppimisen jälkeen on helpompi omaksua monimutkaisempien kojeiden käyttö. (Kuva 167.)

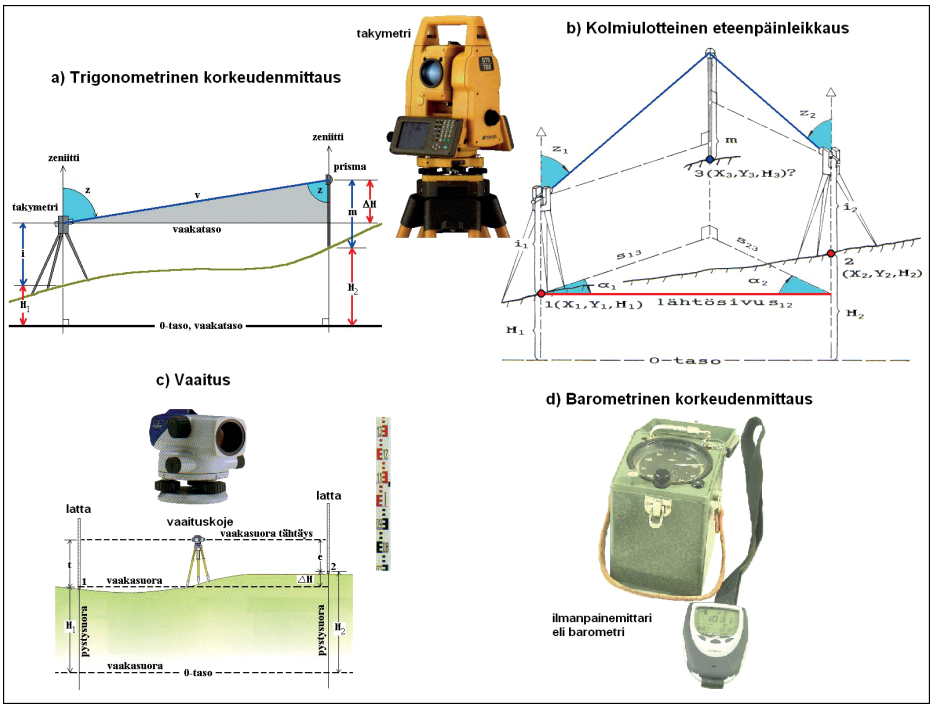



**KUVA 167** *Nykyiset vaaituskojeet ovat hyvin samanlaisia kuin sata vuota sitten käytössä olleet kojeet. Todennäköisesti nykyisetkin mittaajat osaisivat käyttää ongelmitta tällaista kojetta. (Th. Wulff Osakeyhtiön myyntiesite 1920-luvulta, s. 30.)*

## 6.1 Korkeuserojen mittaustavat

Kohteen korkeussijainti esitetään korkeuden avulla. Korkeus on kohteen kohtisuora etäisyys sovitusta vertailupinnasta. Vertailupinnan sijasta puhutaan yleensä vertailutasosta tai nollatasosta, mutta kyseessä ei ole matemaattinen taso. Yleensä vertailupintana on merenpinnan taso ja sen ajateltu jatke mantereiden alla. Näin määriteltyä vertailupintaa kutsutaan geoidiksi ja sen suhteen mitatut korkeudet ovat ortometrisia korkeuksia. Usein ”ortometrinen” sana jätetään pois ja puhutaan vain korkeudesta, kun ajatellaan merenpinnan suhteen mitattuja korkeuksia.

Korkeuksia ei mitata suoraan, vaan ne määritetään välillisesti korkeuseroja mittaamalla. Kun mittausalueella on korkeuslähtöpisteitä, saadaan muiden pisteiden korkeudet lisäämällä mitatut korkeuserot tunnettuihin korkeuksiin. Korkeuseroja voidaan mitata takymetrin avulla trigonometrisesti (kuva 168 a ja b, s. 205). Trigonometrisessa korkeudenmittauksessa havaitaan pystykulmia ja vinoetäisyyksiä. Kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus on trigonometrisen korkeudenmittauksen sovellus, joka perustuu vain kulmanmittaukseen (luku 2.8, s. 72). Havaintoina ovat vaaka- ja pystykulmat. Vaaitus on pelkästään korkeudenmittaukseen tarkoitettu mittausmenetelmä (kuva 168 c, s. 205). Vaaituskojeella muodostetaan vaakasuora tähtäystaso, jonka suhteen korkeuserot mitataan lataksi kutsuttua mittaasteikkoa käyttäen. Tunnetusti ilmanpaine riippuu paikan korkeudesta. Tätä riippuvuutta käytetään hyväksi barometrisessa korkeudenmittauksessa (kuva 168 b, s. 205). Ilmanpainemittarin eli barometrin avulla mitataan kohteiden ilmanpaine-eroja. Menetelmä on muihin korkeudenmittausmenetelmiin verrattuna erittäin epätarkka.




**KUVA 168** *Korkeuseroja voidaan mitata takymetrillä trigonometrisesti (a) tai kolmiulotteista eteenpäinleikkausta käyttäen (b). Vaaitus (c) on yksinomaan korkeuserojen mittaukseen tarkoitettu menetelmä. Barometrisessa korkeudenmittauksessa (b) mitataan ilmanpainetta ja sen eroja. Jos mittauksessa on mukana korkeudeltaan tunnettuja pisteitä, voidaan mitattujen korkeuserojen avulla määrittää muiden pisteiden korkeuksia.*

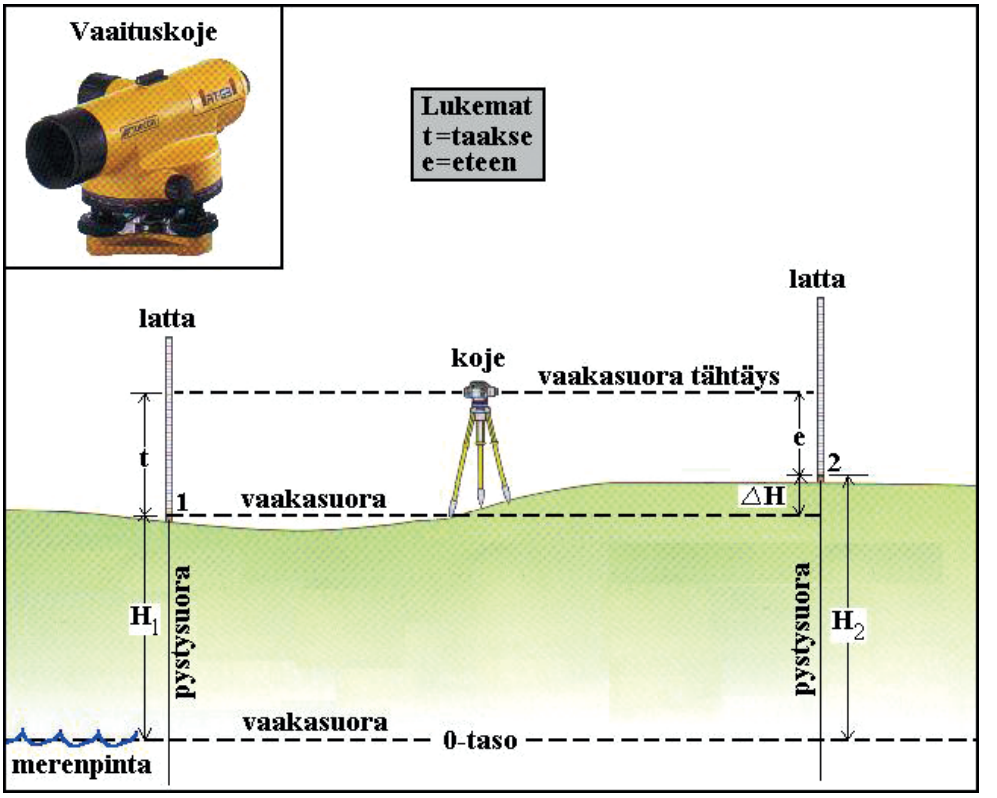
Korkeuksia voidaan mitata myös satelliittipaikannuksen keinoin.Satelliittipaikannuksen yhteydessä mitattava korkeus on ellipsoidinen korkeus, joka muunnetaan geoidimallin avulla ortometriseksi korkeudeksi (kuva 139, s. 175).

## 6.2 Vaaituksen periaate

Vaaittaessa kahden pisteen välinen korkeusero mitataan muodostamalla vaaituskojeella vaakasuora tähtäyslinja ja -taso. Vaaituskojeella tähtäämällä mitataan pisteille viedystä mitasta eli latasta tähtäystason ja pisteiden väliset pystysuorat etäisyydet, joista lasketaan pisteiden välinen korkeusero. Korkeusero lasketaan taakse- ja eteenlukemien erotuksena kaavalla

$$\Delta H_{12} = t - e \,, \tag{126}$$

jossa $\Delta H_{12}$ on pisteen 2 korkeusero pisteen 1 suhteen, $t$ on taakselukema pisteelle 1 ja $e$ eteenlukema pisteelle 2. Merkinnät vastaavat kuvan 169 (s. 206) merkintöjä.




**KUVA 169** *Vaaituksen periaate. Vaaituskojeen tähtäysakseli tasataan vaakasuoraan. Kojeella tähdätään lattaan, josta luetaan tähtäystason ja pisteen välinen korkeusero. Pisteiden (1 ja 2) välinen korkeusero saadaan taakse- ja eteenlukemien erotuksena.*

Pisteen korkeus on pystysuora etäisyys sovitusta vertailupinnasta, joka on yleensä tietyn ajankohdan merenpinnan keskivedenkorkeus. Kun korkeusero mitataan korkeudeltaan tunnetun korkeusrunkopisteen suhteen, voidaan uuden pisteen korkeus laskea runkopisteen määrittämästä o-tasosta kaavalla:

$$H_2 = H_1 + (t - e) = H_1 + \Delta H_{12}, \qquad (127)$$

jossa $H_1$ on korkeusrunkopisteen korkeus, $H_2$ on määritettävän pisteen korkeus, $\Delta H_{12}$ on pisteen 2 korkeusero pisteen 1 suhteen, $t$ on taakselukema pisteelle 1 ja $e$ eteenlukema pisteelle 2.

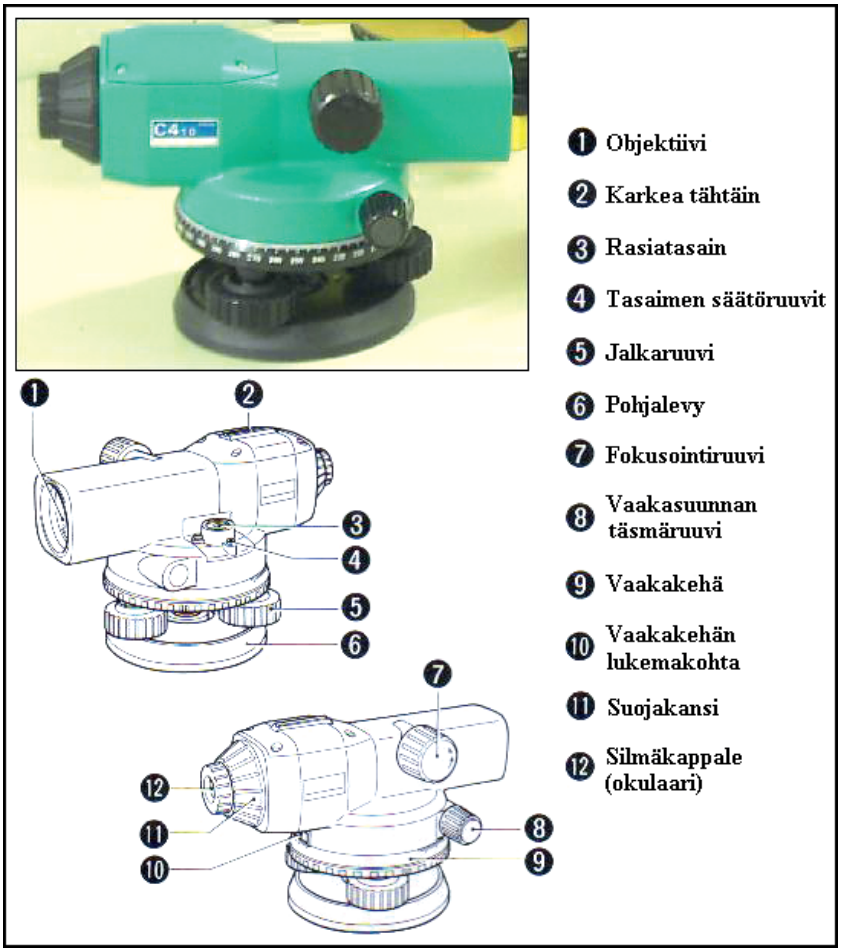
## 6.3 Vaaituskojeet

### 6.3.1 Itsetasaava vaaituskoje

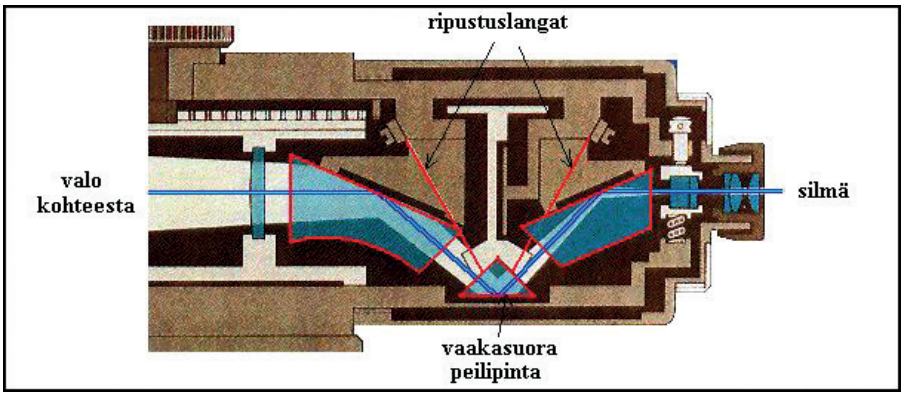
Vaaituksen tärkeimmät työvälineet ovat vaaituskoje ja latta. Yleisimmin vaaituksessa käytetään itsetasaavaa vaaituskojetta. Tasaus tarkoittaa kojeen tähtäysakselin asettamista vaakasuoraan. Tasaus tehdään kojeen tasainten (kuva 18, s. 21) ja jalkaruuvien avulla. Itsetasaavassa vaaituskojeessa on karkeaa tasausta varten rasiatasain, mutta kojeen tarkka tasaus tapahtuu automaattisesti toimivan tasaimen eli kompensaattorin avulla. Tämän ominaisuuden vuoksi puhutaan itsetasaavista vaaituskojeista.

Vaaituskoje on rakenteeltaan melko yksinkertainen optinen laite. Sen tärkein osa on vaakasuoraan asetettava mittauskaukoputki (kuva 19, s. 22). Kaukoputki on kiinnitetty runko-osaan, jossa ovat rasiatasain ja jalkaruuvit. Kaukoputkea voidaan kiertää vaakatasossa kojeen pystyakselin ympäri. Kaukoputkea kierrettäessä tähtäysakseli piirtää vaakasuoran tason. Runko-osassa on yleensä myös vaakakulmakehä. Sitä voidaan käyttää kulmien ja suuntien likimääräiseen mittaamiseen. Vaakakehällä varustetulla vaaituskojeella voidaan tehdä yksinkertaista säteittäistä mittausta. Etäisyydet mitataan joko mittanauhalla tai arvioidaan optisesti latasta. (Kuva 170, s. 208 ja kuva 193, s. 231.)

Automaattinen tasain eli kompensaattori tekee vaaituskojeesta itsetasaavan kojeen. Kompensaattori sijaitsee kaukoputken sisällä. Kompensaattorin tehtävänä on ohjata latasta lähtevä tähtäyssäde vaakasuoraan viivaristikolle. Kompensaattoreita on rakenteeltaan erilaisia. Puhutaan heilurikompensaattoreista ja nestekompensaattoreista. Oleellista on, että kompensaattorissa on jokin heijastava pinta, joko peili- tai nestepinta, joka asettuu painovoiman vaikutuksesta vaakasuoraan. (Kuva 171, s. 208.)




**KUVA 170** *Itsetasaavan vaaituskojeen osat. Kuvan koje on Sokkia C410. (Geostar Oy:n esite.)*

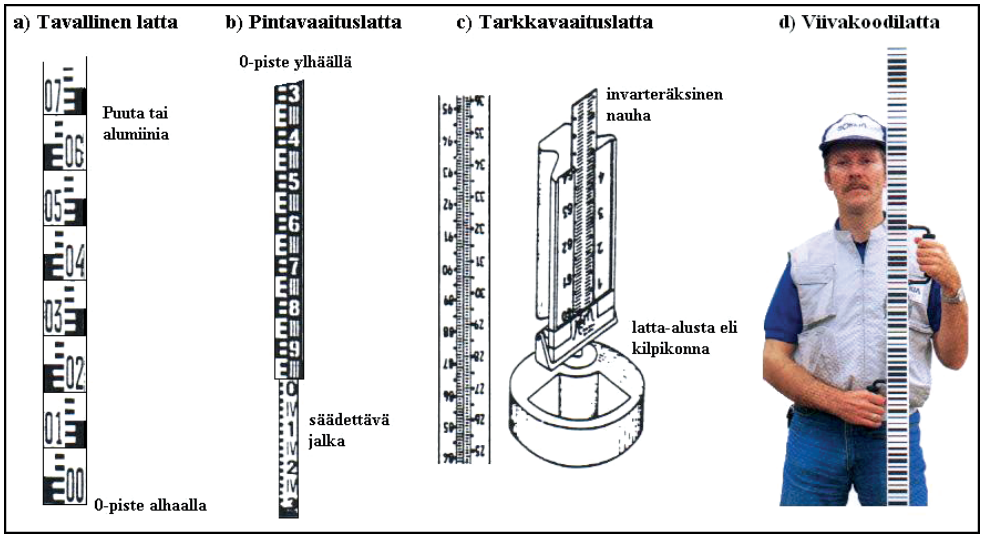



**KUVA 171** *Vaaituskojeen automaattisen tasaimen eli kompensaattorin eräs toteutustapa (heilurikompensaattori). Kompensaattori on prismayhdistelmä. Yhden prisman peilipinta asettuu painovoiman vaikutuksesta vaakasuoraan.*

## 6.3.2 Latat

Vaaituskojeen tähtäysakselin ja mittauspisteen välinen korkeusero luetaan latasta. Tavallinen vaaituslatta on puinen tai alumiininen mitta (kuva 172 a). Latta muodostuu kokoontaitettavista osista. Sen kokonaispituus on neljä metriä. Neljä metriä eli latan pituus on myös suurin korkeusero, joka yhdestä kojeasemasta voidaan mitata. Tavallisen latan toisella puolella on ruutujaotuksella varustettu asteikko ja toisella puolella millimetrijaotus. Normaalisti lattalukema otetaan ruutujaotuksella varustetusta asteikosta.

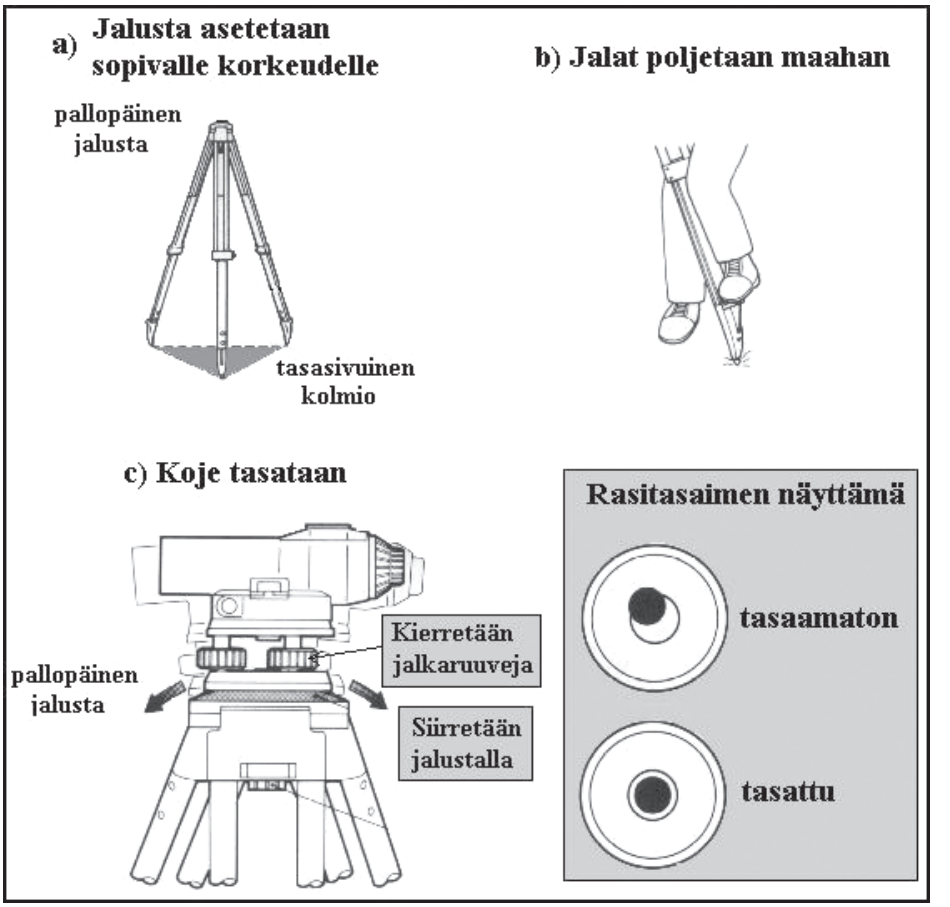
Tavallisen latan lisäksi vaatuksessa voidaan käyttää pintavaaituslattaa (kuva 172 b), tarkkavaaituslattaa (kuva 172 c) ja viivakoodilattaa (kuva 172 d). Pintavaaituslatan pituutta voi säätää ja sen asteikko kasvaa ylhäältä alas. Pintavaaituslattaa kutsutaan myös itselaskevaksi lataksi, koska sopivasti käytettynä latasta voidaan lukea suoraan vaaitun pisteen korkeus. Tarkkavaaituslatta on invarteräksestä valmistettu viivajaotuslatta. Latan runkokotelossa on aina kaksi asteikkoa. Nimensä mukaisesti tarkkavaaituslattaa käytetään kaikkein tarkimmissa korkeuden mittauksissa. Viivakoodilattaa käytetään digitaalisen vaaituskojeen kanssa. Koje osaa lukea lattalukeman automaattisesti viivakoodin avulla. Digitaalinen vaaituskoje osaa myös mitata etäisyyden lattaan viivakoodin perusteella.



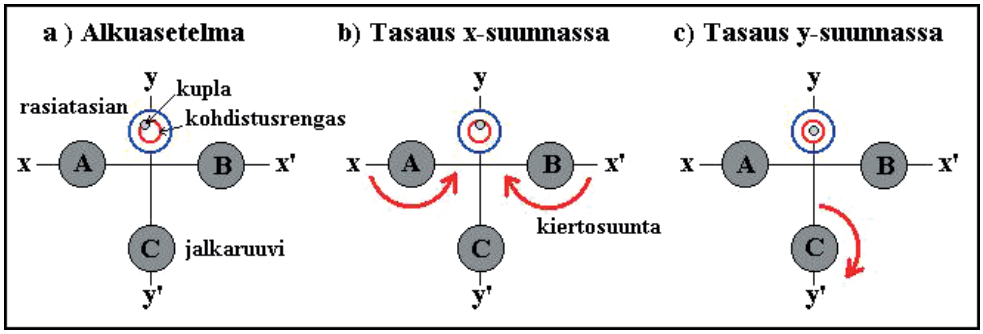

**KUVA 172** *Erilaisia vaaituslattoja. a) Tavallinen latta (pituus 4 m). b) Pituudeltaan säädettävä pintavaaituslatta (pituus 5 m). c) Tarkkavaaituslatta (pituus vaihtelee). Tarkkavaaituslatassa on invarteräksestä tehty viivajaotusasteikko. Asteikkoja on kaksi rinnakkain. Latan alla on kilpikonnaksi kutsuttu latta-alusta. Kuvan latan numerointi on ylösalaisin. Vanhoilla välineillä on usein näin, koska vaaituskojeiden kaukoputkissa ei ole aina käytetty kääntöprismaa, joka kääntäisi kuvan oikeinpäin. d) Digitaalisen vaaituskojeen kanssa käytettävä viivakoodilatta.*

### 6.3.3 Vaaituskojeen peruskäyttö

Mittausta varten vaaituskoje pystytetään kolmijalalle (kuva 173). Vaaituskojeen jalusta on kevyt puinen tai alumiininen kolmijalka (kuva 16, s. 19). Jalustapöytä on joko suora tai pallopäinen. Jos jalusta on pallopäinen, pitää varmistaa, että vaaituskojeen pohjalevy on vastaavasti pyöristetty. Koje kiinnitetään jalustaan ja tasataan likimäärin rasiatasaimen ja jalkaruuvien avulla. Likimääräisen tasauksen voi suorittaa kokeilemalla, mutta on hyödyllistä opetella järjestelmällisempi tapa tasata koje (kuva 174, s. 211), koska se helpottaa vaativampien mittauskojeiden (teodoliitti ja takymetri) käytön opettelua ja antaa vaikutelman ammattitaidosta.

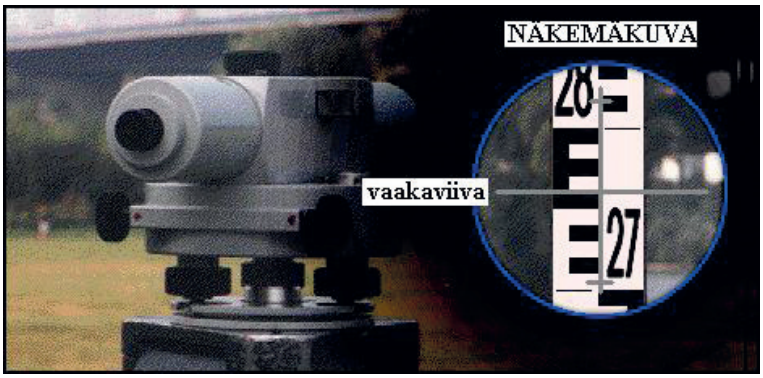



**KUVA 173** *Itsetasaavan vaaituskojeen pystyttäminen. a) Jalusta asetetaan sopivalle havaintokorkeudelle. b) Jalat poljetaan maahan ja koje kiinnitetään jalustaan. c) Koje tasataan likimäärin rasiatasaimen ja jalkaruuvien avulla. Pallopäisellä jalustalla varustettua kolmijalkaa käytettäessä likimääräinen tasaus voidaan tehdä siirtämällä kojetta jalustapöydällä. Suoralla pöytälevyllä varustettua kolmijalkaa käytettäessä tasaus voidaan tehdä vain jalkaruuvien avulla. (Geostar Oy:n esite.)*




**KUVA 174** *Likimääräinen tasaus rasiatasaimen ja jalkaruuvien avulla. a) Koje asetetaan niin, että kaukoputki osoittaa y-suuntaan. b) Tasaus x-suunnassa tehdään kahden jalkaruuvin (A ja B) avulla. c) Tasaus y-suunnassa tehdään kolmannen jalkaruuvin avulla (C). Kahdella jalkaruuvilla tasattaessa (b) kumpaakin ruuvia kierretään vastakkaisiin suuntiin yhtä paljon. Näin tehtäessä kojeen keskikohdan korkeus ei muutu ja x-suunnan tasaus ei vaikuta y-suunnan tasaukseen.*

Ennen mittausten suorittamista mittauskaukoputki säädetään havaitsijan silmälle sopivaksi poistamalla kaukoputken parallaksi (kuva 20, s. 23). Kaukoputki suunnataan karkean tähtäimen avulla ja kojetta kädellä kiertäen mittauspisteellä olevaan lattaan. Kun latta näkyy kaukoputkessa, siirretään tähtäys keskelle lattaa täsmäruuvia kiertämällä. Normaalisti lukema latasta otetaan niin, että pienin mittayksikkö on millimetri. Ruutujakoista latta-asteikkoa (senttimetrijaotusta) käytettäessä pienin lukemayksikkö arvioidaan latasta. (Kuva 175.)




**KUVA 175** *Tähtäysakselin korkeus luetaan latasta vaakaviivan kohdalta. Näkemäkuvassa oleva lukema on 2.760 m. (Scherer 1999.)*

### 6.3.4 Vaaituksen tarkkuus

Vaaituskojeita ja lattoja valmistetaan erilaisiin käyttötarkoituksiin, joiden tarkkuusvaatimukset vaihtelevat. Vaaitsemalla mitatun korkeuseron tarkkuus esitetään yleensä muodossa

$$\sigma_{\Delta H} = \sigma_{km} \sqrt{L}\,, \tag{128}$$

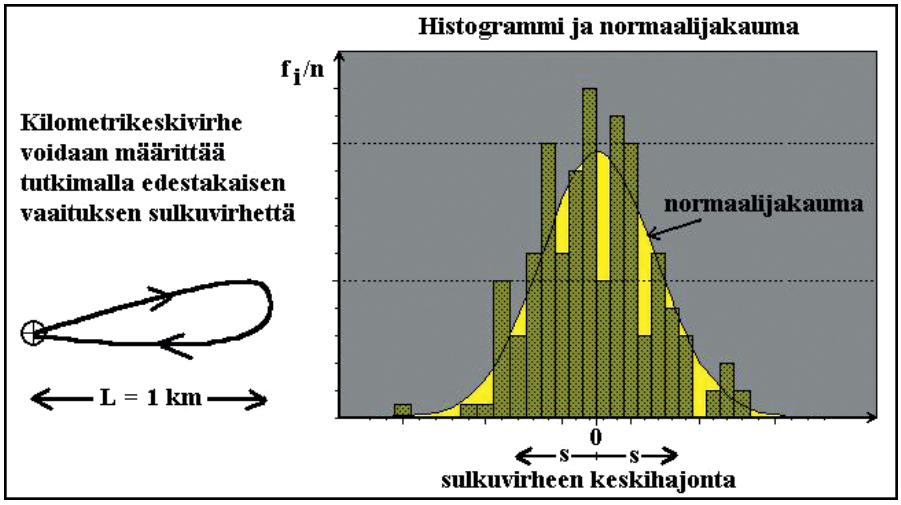
jossa $\sigma_{\Delta H}$ on mitatun korkeuseron keskihajonta, $\sigma_{km}$ on kilometrikeskivirhe ja $L$ on vaaittu matka kilometreinä. Keskihajonta ilmoittaa tarkkuuden eli mittauksen satunnaisten virheiden arvioidun suuruuden 68 %:n todennäköisyydellä.

Kaavassa (128) esiintyvän kilometrikeskivirheen (kilometrikeskihajonnan) yleisimmin käytetty mittayksikkö on $\frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}$. Kilometrikeskivirhe kuvaa yhden kilometrin vaaituksen keskihajontaa. Kilometrikeskivirheen suuruuteen vaikuttavat kojeen vaaitustasaimen tai kompensaattorin tarkkuus, kaukoputken suurennus, latta ja tähtäysmatka. Kaukoputken suurennus, latta ja tähtäysmatkat määrittävät sen, kuinka tarkasti lukema voidaan latasta ottaa. Yleisenä sääntönä voidaan sanoa, että vaaitus on sitä tarkempaa mitä lyhyempiä tähtäysmatkoja käytetään.

Laitevalmistajat ilmoittavat yleensä kojeiden tarkkuuden kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajontana ($s$). Tällä tavoin ilmoitetusta tarkkuudesta saadaan kilometrikeskivirhe ($\sigma_{km}$) kaavalla

$$\sigma_{km} = \frac{s}{\sqrt{2}} \tag{129}$$

jossa $\sigma_{km}$ on kilometrikeskivirhe ja $s$ kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajonta. Kun tehdään kilometrin edestakainen vaaitus, käydään kilometrin päässä lähtöpisteestä ja kuljetaan kahden kilometrin matka. (Kuva 176, s. 213.)



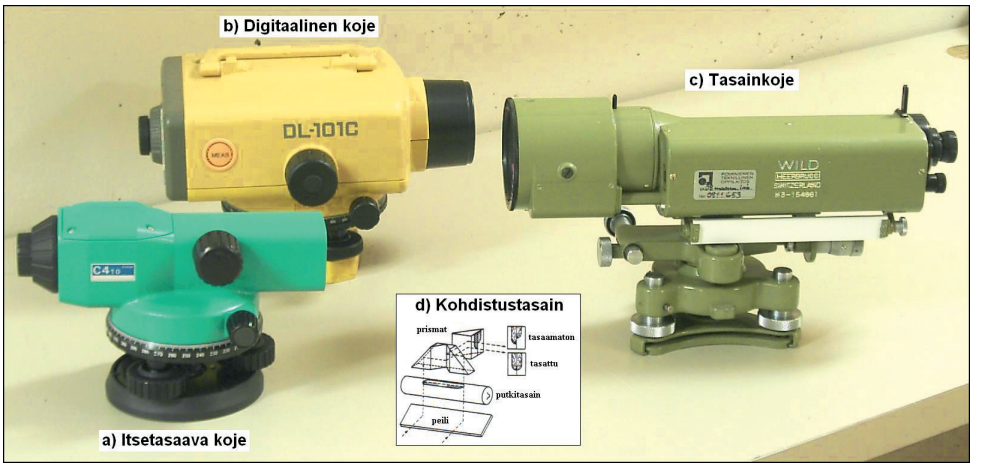

**KUVA 176** *Kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajonta ja kilometrikeskivirhe voidaan määrittää tutkimalla edestakaisen vaaituksen sulkuvirheiden hajontaa. Menettelyn taustalla on tarkkuuden standardoitu määritysmenetelmä ja todennäköisyyslaskennan periaatteet.*

## 6.3.5 Vaaituskojeiden ryhmittely

Vaaituskojeet voidaan jakaa toimintaperiaatteidensa perusteella neljään ryhmään:

- tasainkojeet
- itsetasaavat kojeet
- digitaaliset kojeet
- taso- ja linjauslaserit.

Tasainkojeissa on erityinen kaukoputken suuntainen vaaitustasain, jota kutsutaan kohdistustasaimeksi (kuva 177 c ja d, s. 214). Tarkkavaaitus-kojeet ovat usein vieläkin tasainkojeita, vaikka digitaaliset kojeet ovat ne osittain syrjäyttäneet. Yleisimmin käytettävät vaaituskojeet ovat itsetasaavia kojeita, joissa tähtäyslinja asettuu vaakatasoon automaattisesti toimivan kompensaattorin avulla (kuva 177 a, s. 214). Itsetasaavia vaaituskojeita valmistetaan eri tarkkuusluokkiin. Mittaaja joutuu tarkistamaan, että koje on esimerkiksi riittävän tarkka korkeusrunkomittauksiin. Digitaaliset vaaituskojeet ovat itsetasaavia kojeita, jotka lukevat latan automaattisesti ja tallentavat lukemat kojeen muistiin (kuva 177 b, s. 214). Eri tarkkuusluokkiin valmistettuja digitaalisia vaaituskojeita on ollut markkinoilla 1990-luvun alkupuolelta alkaen. Erityisesti rakentamiseen liittyvissä tehtävissä käytetään myös taso- ja linjauslasereita.




**KUVA 177** *a) Itsetasaava vaaituskoje Sokkia C410. b) Digitaalinen vaaituskoje Topcon DL-101C. c) Kohdistustasaimella varustettu tarkkavaaituskoje Wild N3. d) Kohdistustasaimen rakenne (vrt. kuva 18, s. 21). Eri laitevalmistajien kojeilla on perinteisesti ollut omat värinsä. Nykyisin värikoodia ei ehkä noudateta niin tarkasti kuin joitakin vuosikymmeniä sitten.*

Vaaituskojeet voidaan ryhmitellä käyttötarkoituksensa ja tarkkuutensa perustella seuraavasti. Ryhmittelyn tarkoitus on antaa yleispiirteinen kuva eri tarkkuusluokan kojeiden käytöstä. Ryhmittely on jossain määrin vanhanaikainen, mutta kuitenkin edelleen käyttökelpoinen.

1) Rakennusvaaituskojeet
- kaukoputken suurennus on noin 20-kertainen
- kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajonta on 5 ... 15 mm
- käytetään lähinnä maarakennustöiden vaaituksiin

2) Yleisvaaituskojeet
- kaukoputken suurennus on noin 25...30-kertainen
- kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajonta on 1 ... 2 mm.
- käytetään tavanomaisiin korkeusrunkomittauksiin ja rakennusmittauksiin

3) Tarkkavaaituskojeet
- Kaukoputken suurennus on noin 30...40-kertainen
- kilometrin edestakaisen vaaituksen keskihajonta on alle 0.5 mm
- käytetään korkeusrunkomittauksiin sekä rakentamisen ja teollisuuden erikoismittauksiin

Vaaituskojeen tarkentuessa, kaukoputken suurennus kasvaa. Tämä näkyy kaukoputken koon kasvuna. Tarkka koje on selvästi kookkaampi kuin epätarkempi koje. (Kuva 177)

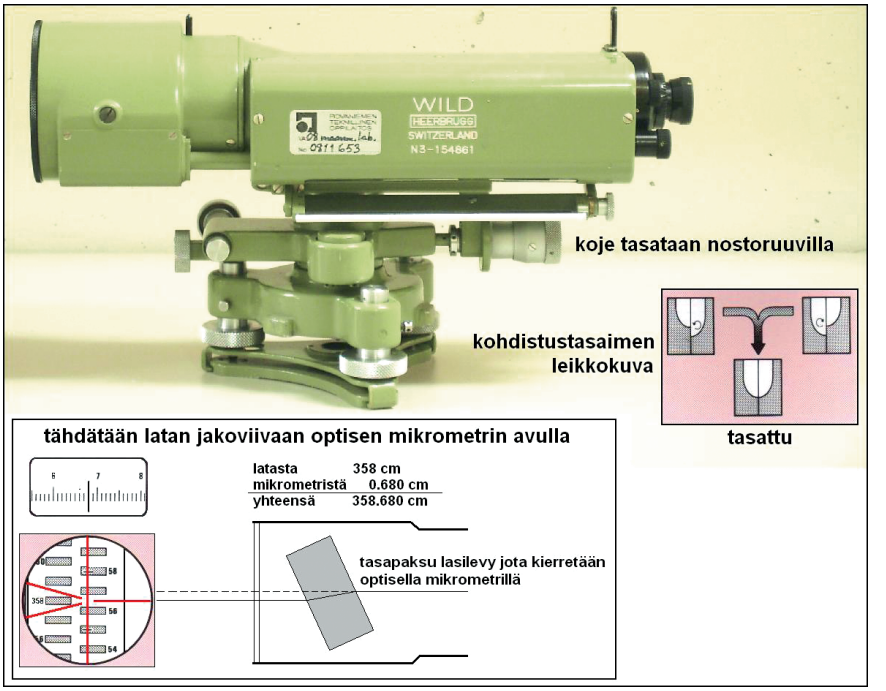
### 6.3.6 Tarkkavaaituskojeet

Tarkkavaaituksesta puhutaan, kun vaaituksessa on mahdollista päästä alle 0.5 mm keskihajontaan yhden kilometrin edestakaisessa vaaituksessa. Jotta tähän päästään, tarvitaan erikoislaitteita. Tarkkavaaitus eroaakin tavanomaisesta vaaituksesta vaaituskojeiden ja lattojen rakenteen sekä havaintomenetelmien perusteella.

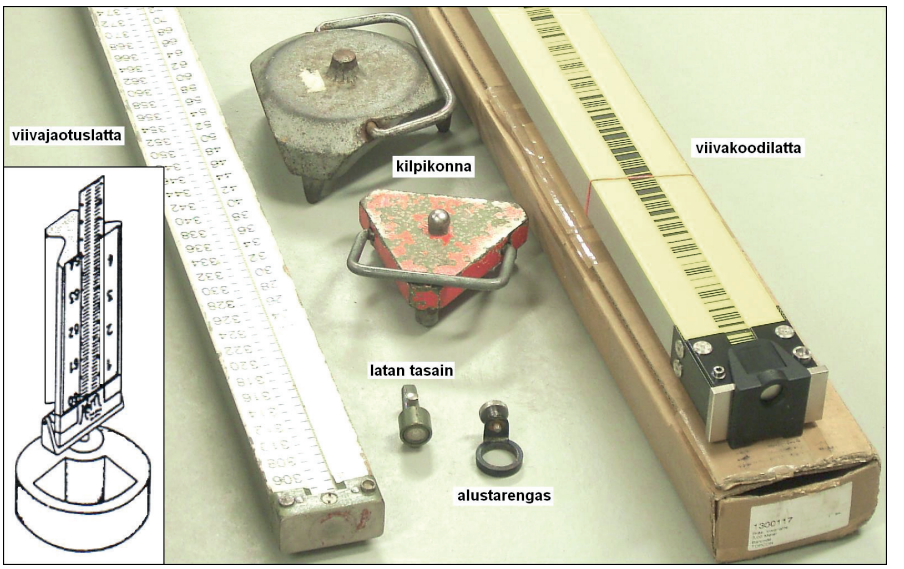
Tasainvaaituskojeen periaatteella toimivien tarkkavaaituskojeiden keskeinen osa on optinen mikrometri. Sen toiminta perustuu kaukoputken eteen asennetun tasapaksun lasilevyn avulla tehtävään tähtäysakselin yhdensuuntaissiirtoon (kuva 178, s. 208). Lasilevyyn kytkettyä mikrometriruuvia kiertämällä saadaan latan jakoviivan kuva kohdistumaan viivaristikon vaakaviivaan. Tehdyn siirron pituus luetaan mikrometriruuvin asteikolta.

Tarkkavaaituskojeen viivaristikon vaakaviiva ei ole suora viiva, vaan sen toinen puoli on kiilamainen (kuva 178, s. 208). Kun vaakaviiva kohdistetaan latan jakoviivaan, asetetaan jakoviiva kiilan sisälle. Kiilan avulla tehtävä kohdistus on todettu tarkemmaksi kuin vaakaviivalla tehtävä kohdistus.

Tarkkavaaituslatat ovat viivajaotuslattoja, joissa jakoviivat on merkitty invarteräksiseen nauhaan. Invarterästä käytetään, koska sen lämpölaajenemiskerroin on hyvin pieni. Teräsnauha on kiinnitetty puu- tai kevytmetallikehykseen siten, että teräsjousi jännittää nauhan vakiovoimalla. Latassa on kaksi vierekkäistä asteikkoa, joiden lukemat eroavat toisistaan lattavakion verran. (Kuva 179, s. 208.)



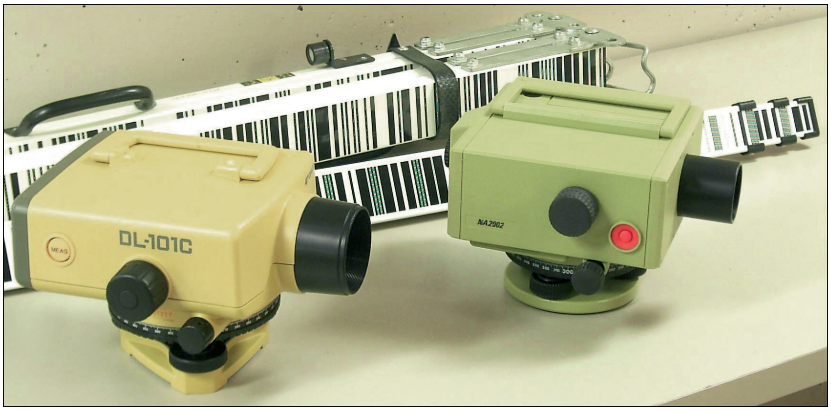

**KUVA 178** *Kohdistustasaimella ja optisella mikrometrillä varustettu tarkka-aaituskoje Wild N3. Tähtäysakseli tasataan vaakasuoraan nostoruuvia kiertämällä. Tasaimen kuva nähdään okulaarissa leikkokuvana. Lattaan tähdätään viivaristikon kiilamaisella osalla. Kiila kohdistetaan latan jakoviivaan. Lukema muodostuu latasta luettavasta kokonaisluvusta ja mikrometrin asteikolta luettavasta desimaaliosasta.*




**KUVA 179** *Kaksi tarkkavaaituslattaa. Vasemmalla on perinteinen viivajaotuslatta ja oikealla viivakoodilattaa.*

### 6.3.7 Digitaaliset vaaituskojeet

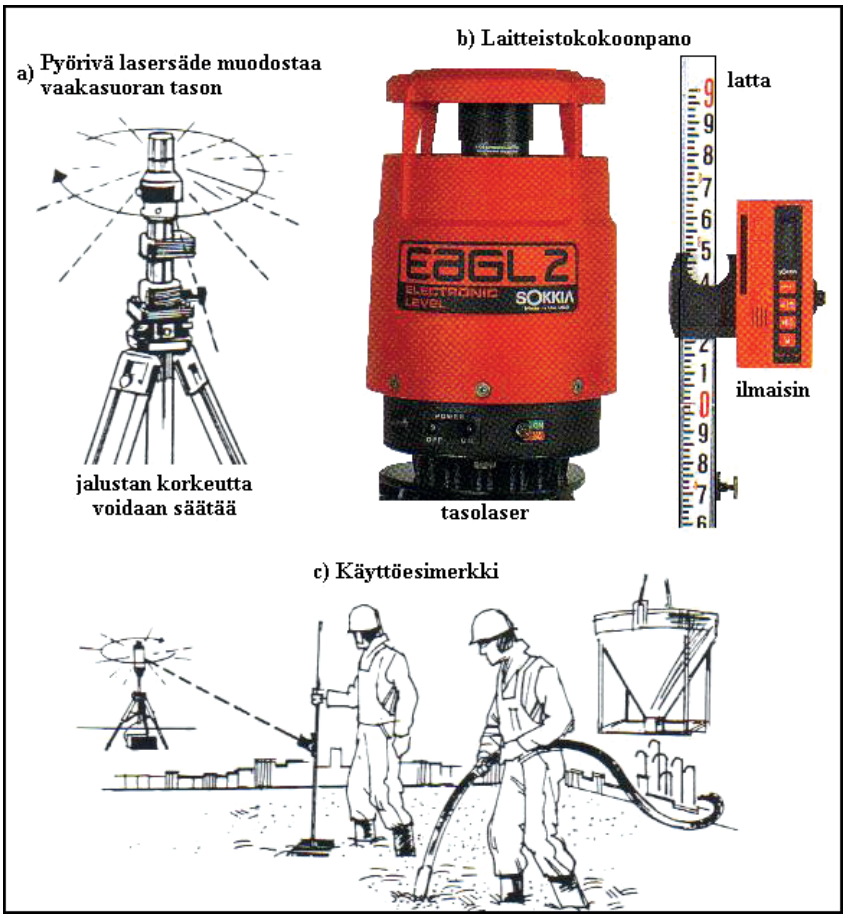
Tasain- ja itsetasaavia vaaituskojeilta käytettäessä havainnot kirjataan käsin havaintokirjaan, mutta digitaaliset kojeet tallentavat havainnot automaattisesti. Ne ovat toimintaperiaatteeltaan itsetasaavia kojeita. Mittauksessa tarvitaan automaattisesti luettavia lattoja. Ne ovat viivakoodilattoja. Vaikka eri tarkkuusluokkiin valmistettuja digitaalisia vaaituskojeita on ollut markkinoilla jo 1990-luvun alkupuolelta alkaen ja ne ovat miellyttäviä ja nopeita käyttää, niiden käyttö on alkanut yleistyä vasta viime vuosina. Syynä digitaalisten kojeiden hitaaseen yleistymiseen saattaa olla kojeiden korkea hinta verrattuna tavanomaisiin vaaituskojeisiin. Syynä hitaaseen yleistymiseen voi myös olla vaaituksen käytön väheneminen mittauksissa. (Kuva 180.)



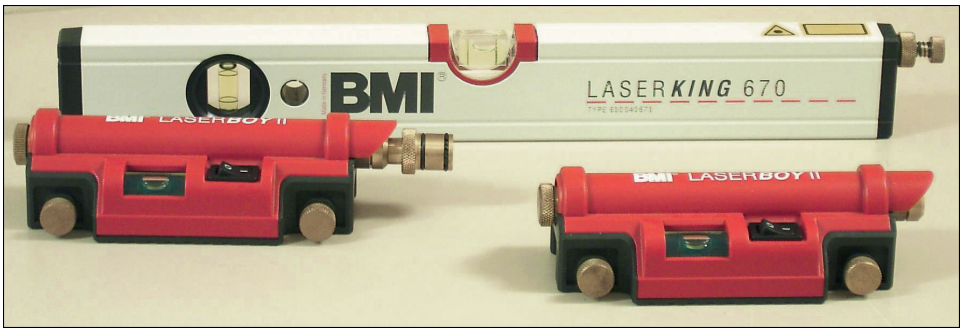

**KUVA 180** *Kaksi digitaalista vaaituskojetta. Vasemmalla on Topcon DL-101C ja oikealla WILD NA2002. Taustalla on kaksi lasikuituista viivakoodilattaa. Takimmainen on taitettava latta ja lähempänä oleva on teleskooppilatta. Digitaalinen vaaituskoje lukee viivakoodilatan automaattisesti. Koje mittaa myös etäisyyden lattaan. Kun käytetään invarlattaa, on DL-101C tarkka-vaaituskoje. NA2002 on hieman epätarkempi koje.*

### 6.3.8 Tasolaserit ja muut laserkojeet

Vaaituskojetta ja lattaa käytettäessä tarvitaan kaksi mittaajaa. Sen sijaan tasolaserin avulla mittaukset voi suorittaa yksi mittaaja (kuva 181, s. 218). Tasolaser tuottaa vaakasuoran (tai myös pystysuoran) valonsäteen joka pyöriessään muodostaa tason. Laserin tuottama valo voi olla joko näkyvää valoa tai ihmisen silmälle näkymätöntä infrapunaista valoa. Tason korkeusasema havaitaan lattaan kiinnitettävän ilmaisimen avulla. Näkyvää valoa tuottavassa laserissa taso on nähtävissä ilman ilmaisintakin. Tasolaserit ovat erityisen käyttökelpoisia rakennustyömaiden mittauksissa. Niitä käytetään myös työkoneohjauksessa. Tasolasereiden lisäksi on tarjolla muitakin laserkojeita, joiden avulla voidaan muun muassa osoittaa rakennuslinjoja ja asentaa erilaisia putkia (kuva 182, s. 218).




**KUVA 181** *a) Tasolaserin pyörivä säde muodostaa vaakasuoran tason. b) Tasolaser Sokkia Eagl 2. Lasersäde havaitaan erityisen ilmaisimen avulla. c) Rakennustyömaa on tyypillinen tasolaserin käyttöympäristö. (Kuvat a ja c, van den Berg – Lindberg 1983, s. 22.)*

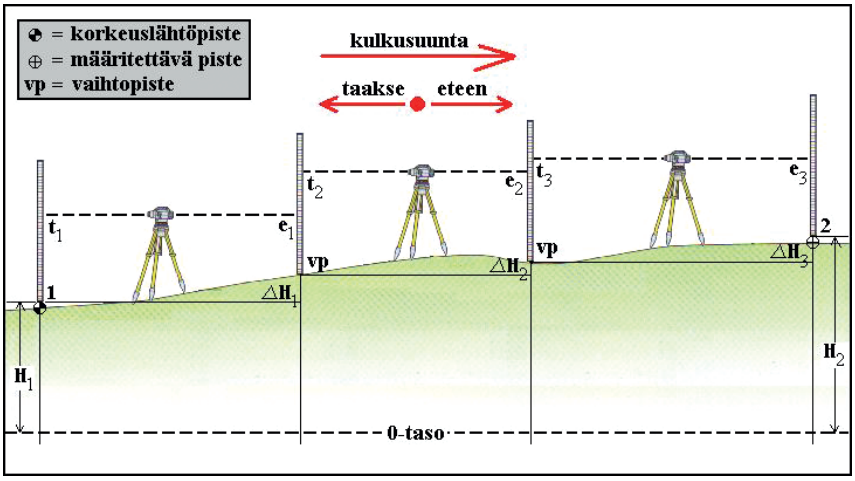



**KUVA 182** *Kolme linjojen osoittamiseen tarkoitettua laseria. Kojeet voidaan asettaa vaakatasoon tasainten avulla.*

## 6.4 Jonovaaitus

### 6.4.1 Jonovaaituksen periaate

Kun mittauspisteiden välimatka kasvaa tai alueella on suuria korkeuseroja tai näkemäesteitä, pisteiden välisiä korkeuseroja ei voi mitata yhdestä kojeasemasta. Tällöin korkeuserojen mittaus suoritetaan jonovaaituksella. Mitattaessa toistetaan vaaituksen periaatetta siirtämällä lattaa ja vaaituskojetta vuorotellen eteenpäin. Kuvassa 183 mittaus aloitetaan korkeusrunkopisteeltä 1, johon tehdään taaksetähtäys. Seuraavaksi latta siirretään vaihtopisteelle, johon tehdään eteentähtäys. Sitten siirretään kojetta latan pysyessä vaihtopisteellä. Uudesta kojeasemasta tehdään taaksetähtäys vaihtopisteelle ja eteentähtäys uudelle vaihtopisteelle. Toisen kojeaseman vaihdon jälkeen tehdään ensin taaksetähtäys vaihtopisteelle ja lopuksi mittaus päätetään määritettävälle pisteelle 2 eteentähtäyksellä.




**KUVA 183** *Jonovaaituksen periaate. Jonovaaituksessa puhutaan taakse- ja eteenlukemista, koska vaaituksella on määrätty kulkusuunta. Havainnot tehdään vuorotellen kulkusuuntaan nähden taakse- ja eteenpäin. Mittaus aloitetaan taaksetähtäyksellä ja päätetään eteentähtäykseen.*

Määritettävän pisteen (2) korkeus saadaan laskettua, kun lähtökorkeuteen lisätään mitatut korkeuserot:

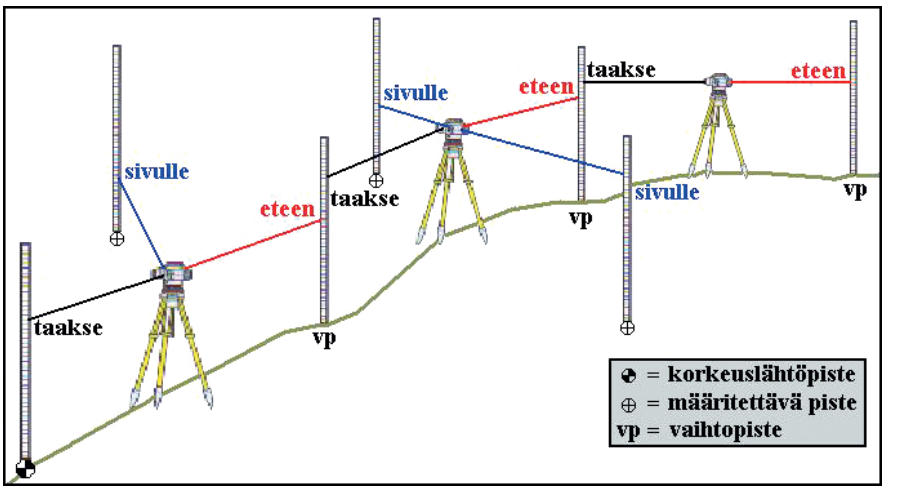
$$H_2 = H_1 + (t_1 - e_1) + (t_2 - e_2) + (t_3 - e_3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad , \qquad (130)$$

$$H_2 = H_1 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - e_i)$$

jossa $H_1$ on lähtöpisteen korkeus, $H_2$ on määritettävän pisteen korkeus, $t_i$ on taakselukema ja $e_i$ on eteenlukema kojeasemasta $i$.

Jonovaaituksessa mittausta viedään eteenpäin vaihtopisteiden kautta. Ne ovat maaston pisteitä, joille ei määritetä korkeutta, mutta niitä tarvitaan latta-alustoina, jotta korkeutta voidaan siirtää eteenpäin. Jonovaaituksen yhteydessä voidaan eteen- ja taaksetähtäysten lisäksi tehdä myös sivulletähtäyksiä. Kaikilla kojeasemasta tehdyillä sivulletähtäyksillä on sama taaksetähtäys. Sivulletähtäys eroaa eteentähtäyksestä siinä, että sivulletähtäyksellä ei viedä korkeutta eteenpäin, vaan sillä määritetään vain jonkin pisteen korkeus. (Kuva 184.)

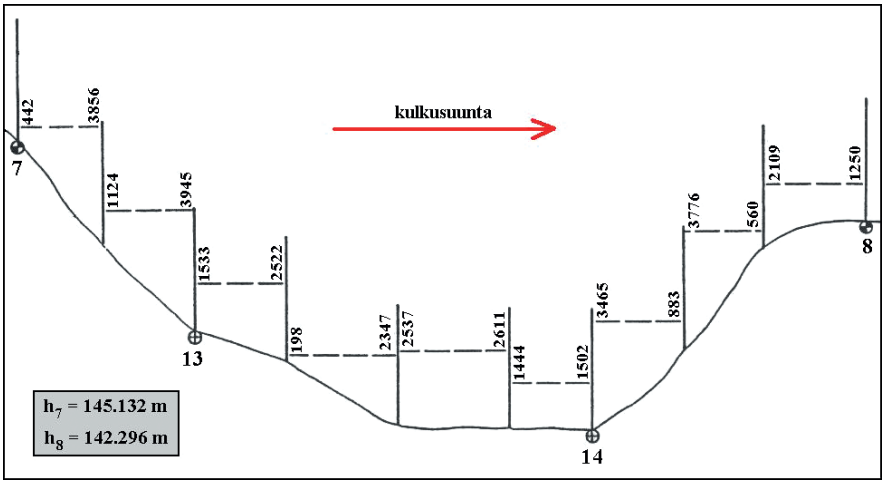



**KUVA 184** *Jonovaaituksessa voidaan tehdä taakse-, eteen- ja sivulletähtäyksiä. Korkeutta siirretään jonossa taakse- ja eteentähtäyksillä, mutta sivulletähtäyksillä määritetään vain yksittäisten pisteiden korkeuksia.*

## 6.4.2 Havaintojen kirjaaminen

Vaaituksen havainnot kirjataan usein nykyäänkin käsin havaintokirjaan. Tässä suhteessa vaaitus poikkeaa esim. takymetrimittauksesta, jossa on siirrytty jo vuosia sitten havaintojen automaattiseen tallennukseen. Tosin nykyisin on käytössä digitaalisiakin vaaituskojeita, joilla vaaittaessa havaintojen tallennus tapahtuu automaattisesti.

Seuraavaksi esitellään kaksi vaaitushavaintojen kirjaamistapaa. Lähtökohtana on kuvan 185 (s. 221) jonovaaitus, joka esittää korkeusrunkomittausta varten mitatun jonon. Ensimmäisessä kirjaamistavassa (taulukko 7, s. 221) kojeaseman taakse- ja eteenhavainnot kirjataan omalle rivilleen. Korkeusero merkitään samalle riville kuin eteenlukema. Kirjaamisesimerkissä on laskettu jokaisen lattavälin korkeusero, vaikka pelkästään numeroitujen mittauspisteiden (7, 13, 14 ja 8) välisten korkeuserojen merkitseminen olisi riittävää. Vaihtopisteet on merkitty havaintokirjaan, mutta nämä kohdat voitaisiin jättää tyhjiksi. Havaintokirjaan on varattu oma sarake myös sivulletähtäyksiä varten.




**KUVA 185** *Jonovaaituksen havaintojen kirjaamiseen liittyvä esimerkki.*

**TAULUKKO 7** *Kuvaan 185 perustuva havaintojen kirjaamisesimerkki.*

| Piste | Taakse (t) | Sivulle (s) | Eteen (e) | Korkeus-ero (t-e) | Korkeus | Huom! |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | **0.442** | | | | 145.132 | |
| vp | 1.124 | | **3.856** | **–3.414** | | |
| 13 | 1.533 | | 3.945 | –2.821 | 138.897 | |
| vp | 0.198 | | 2.522 | –0.989 | | |
| vp | 2.537 | | 2.347 | –2.149 | | |
| vp | 1.444 | | 2.611 | –0.074 | | |
| 14 | 3.465 | | 1.502 | –0.058 | 135.627 | |
| vp | 3.776 | | 0.883 | +2.582 | | |
| vp | 2.109 | | 0.560 | +3.216 | | |
| 8 | | | 1.250 | +0.859 | 142.284 | |

## 6.4.3 Jonovaaituksen perinteinen havaintokirjanpito

Kuvan 185 jonovaaitus liittyy korkeusrunkomittaukseen ja toinen esiteltävä havaintojen kirjaamistapa on perinteinen Suomessa käytetty tapa tällaisissa mittauksissa. Havaintolomake (taulukko 8, s. 222) eroaa edellisestä kirjaamistavasta siinä, että jokaisen kojeaseman taakse- ja eteenhavainnot kirjataan samalle riville ja havaintorivit on siirretty pisterivien puoliväliin. Havainnot ja niistä laskettavat kor-

keuserot ovat näin omilla riveillään ja pistenumerot ja korkeudet omilla riveillään. Kirjaamisesimerkissä vaaittaville pisteille (13, 14 ja 8) tehdyt eteenhavainnot on selvyyden vuoksi alleviivattu ja korkeuserot on merkitty vain vaaittaville pisteväleille. Havaintolomakkeelle on varattu tilaa myös mittauksen tasoittamista varten.

**TAULUKKO 8** *Kuvaan 185 (s. 221) perustuva perinteinen jonovaaituksen havaintojen kirjaamistapa.*

| Piste | Taakse (t) | Eteen (e) | Korkeus-ero (t-e) | Havaittu korkeus | Korjaus | Tasoitettu korkeus |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | 145.132 |
| | 0.442 | 3.856 | | | | |
| | 1.124 | 3.945 | **–6.235** | | | |
| 13 | | | | 138.897 | | |
| | 1.533 | 2.522 | | | | |
| | | | | | | |
| | 0.198 | 2.347 | | | | |
| | | | | | | |
| | 2.537 | 2.611 | | | | |
| | | | | | | |
| | 1.444 | 1.502 | **–3.270** | | | |
| 14 | | | | 135.627 | | |
| | 3.465 | 0.883 | | | | |
| | | | | | | |
| | 3.776 | 0.560 | | | | |
| | | | | | | |
| | 2.109 | 1.250 | **+6.657** | | | |
| 8 | | | | 142.284 | | 142.296 |
| | | | | **havaittu** | | **tunnettu** |

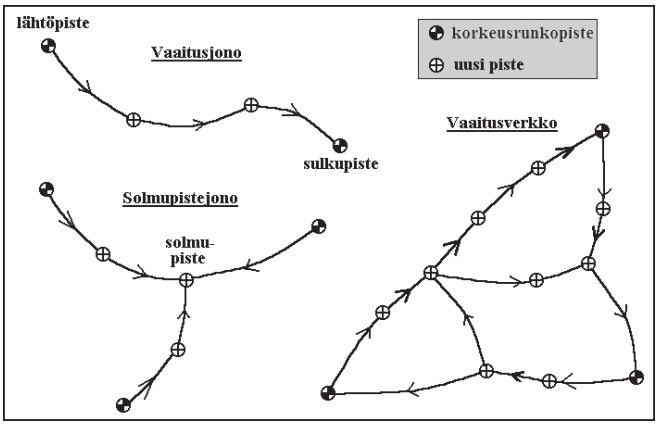
Edellä tarkastellussa esimerkissä mittaus päätetään tunnetulle korkeusrunkopisteelle (8). Sille on tiedossa mittauksen lopussa kaksi korkeutta: havaittu korkeus ja oikeana pidetty tunnettu korkeus. Sanotaan, että piste 8 on sulkupiste ja, että mittaus on suljettu. Tällainen menettely liittyy erityisesti korkeusrunkomittauksiin. Sulkeminen mahdollistaa mittauksen tarkkuuden arvioinnin.

## 6.5 Jonovaaitus korkeusrunkomittausmenetelmänä

### 6.5.1 Korkeusrunkomittaukset

Korkeusrunkomittausten avulla mittauspaikalle muodostetaan tai tuodaan halutun korkeusjärjestelmän mukainen korkeustaso. Vaaitus on pääasiallinen korkeusrunkomittausmenetelmä. Valtakunnalliset korkeusrunkomittaukset tehdään tarkkavaaituksella. Myös kunnan korkeuskiintopisteet on syytä mitata tarkkavaaituksella. Korkeuskäyttöpisteitä voidaan mitata jonovaaituksella, takymetrillä ja satelliittipaikannuksen menetelmin.

Vaaitsemalla tehdyt korkeusrunkomittaukset ovat rakenteeltaan yksittäisiä jonoja, solmupistejonoja tai vaaitusverkkoja (kuva 186). Vaaitusverkkona suoritettu korkeusrunkomittaus on kaikkein luotettavin näistä mittauksista. Mittaukset tasoitetaan pienimmän neliösumman menetelmällä. Yksittäinen jono voidaan laskea yksinkertaisena taulukkolaskentana jonovaaituslomakkeella. Myös solmupistejono voidaan laskea käsin laskennan keinoin. Sen sijaan vaaitusverkko on laskennan näkökulmasta niin vaativa, että se tasoitetaan sopivan laskentaohjelman avulla. Myös yksinkertaisemmat vaaitukset kannattaa laskea tietokoneella, koska tietokonelaskenta antaa monipuolisempia virhe- ja tarkkuusarvioita kuin käsin laskenta.




**KUVA 186** *Vaaitusjono, solmupistejono ja vaaitusverkko ovat korkeusrunkomittausten rakenteellisia muotoja.*

Jonovaaituksena suoritettava korkeusrunkomittaus on niin yleinen mittausmenetelmä, että sen periaatteet ja laskennat kuuluvat mittaus- ja kartoitustekniikan perusteisiin.

## 6.5.2 Jonovaaituksen suoritus

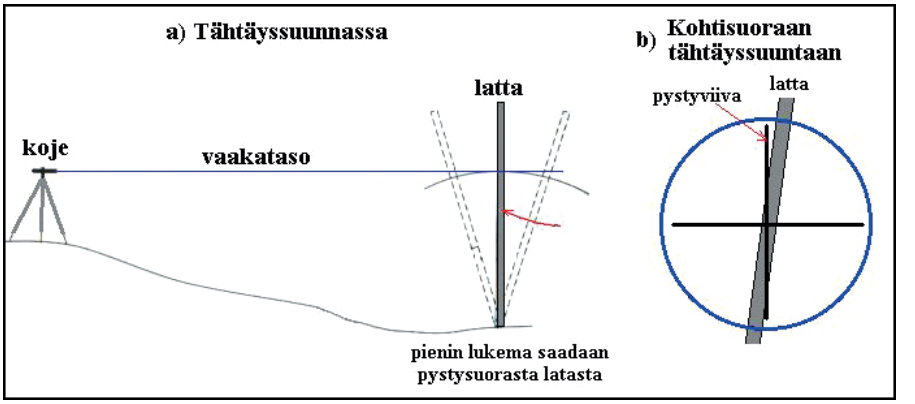
Jonovaaituksella määritetään uusien pisteiden korkeuksia lähtien tunnetulta korkeuskiintopisteeltä. Vaaitus etenee jonomaisesti niin, että jokaisesta kojeasemasta tehdään yksi taakse- ja yksi eteentähtäys. Korkeusrunkomittaus on aina suljettava eli mittaus aloitetaan kiintopisteeltä ja päätetään kiintopisteelle. Lähtö- ja sulkupisteet ovat mielellään eri pisteitä, mutta jono voidaan sulkea myös lähtöpisteelle.

Korkeuskiintopisteitä vaaittaessa vaaituskojeen pitää olla vähintään yleisvaaituskojeen tasoinen vaaituskoje. Lattana käytetään puista millimetri- tai senttimetrijakoista lattaa. Puinen latta on vähemmän herkkä lämpötilan vaikutuksille kuin alumiininen latta. Aina yleisvaaituskojeen tarkkuus ei kuitenkaan riitä. Tällöin käytetään tarkkavaaituskojetta ja -menetelmiä. Mittauksissa käytettävät kojeet pitää kalibroida säännöllisesti.

Vaaituksen reitti valitaan mahdollisimman helpoksi ja tukevalle maapohjalle. Vaihtopisteillä käytetään latta-alustaa (kuva 187). Kojeasemat pyritään valitsemaan niin, että etäisyydet taakse ja eteen ovat mahdollisimman samanpituiset. Pitkiä yli 50 metrin tähtäyksiä on syytä välttää. Lattaa ei pysty lukemaan riittävän tarkasti pitkillä tähtäyksillä.

**KUVA 187** *Jonovaaituksen lisävarusteita. Rasiatasaimen avulla pidetään latta pystysuorassa. Kaukoputkeen kiinnitettävän erillisen optisen mikrometrin avulla parannetaan latan lukematarkkuutta. Vaihtopisteillä, erityisesti pehmeällä alustalla, käytetään latta-alustaa eli kilpikonnaa.*

Latan pystysuoruus on kontrolloitava. Lattaan voidaan asentaa rasiatasain, jonka näyttämän perusteella lattamies pitää latan pystysuorassa (kuva 187). Tähtäystä vastaan kohtisuorassa suunnassa havaitsija voi tarkistaa latan pystysuoruuden viivaristikon pystyviivan avulla (kuva 188 b). Tähtäyssuunnassa tarkistuksen voi tehdä lattaa heiluttamalla. Lattamies heiluttaa lattaa tähtäyssuunnassa. Pienin lattalukema vastaa pystysuoraa asentoa (kuva 188 a).




**KUVA 188** *Latan pystysuoruuden varmistaminen. a) Tähtäyssuunnassa lattaa voidaan heiluttaa. b) Kohtisuoraan tähtäyssuuntaan nähden pystysuoruus varmistetaan viivaristikon pystyviivalla.*

### 6.5.3 Sulkuvirhe ja suhteellinen tarkkuus

Runkomittauksissa kiinnitetään erityistä huomiota mittauksen virheiden hallintaan ja lopputuloksen tarkkuuden arviointiin. Tätä varten mittaus järjestetään niin, että lopputulos voidaan jotenkin tarkistaa. Jonovaaitus tarkistetaan sulkemalla mittaus. Jono aloitetaan korkeuskiintopisteeltä ja päätetään toiselle korkeuskiintopisteelle, jota kutsutaan sulkupisteeksi. Sulkupisteen havaitun ja tunnetun korkeuden erotus on jonon korkeussulkuvirhe:

$$w_H = H_{havaittu} - H_{tunnettu}\,, \tag{131}$$

jossa $w_H$ on korkeussulkuvirhe, $H_{havaittu}$ on sulkupisteen havaittu korkeus ja $H_{tunnettu}$ on sulkupisteen tunnettu ja oikeana pidetty arvo. Edellä tarkastellun esimerkin sulkuvirhe on $w_H$ = 142.284 – 142.296 = –0.012 m (taulukko 8, s. 222).

Jotta sulkuvirheen perusteella voidaan arvioida mittauksen laatua, tulee sulkuvirheelle löytyä ohjearvoja, joiden perusteella johtopäätökset tehdään. Suomessa noudatetaan tavanomaisissa korkeusrunkomittauksissa yleensä kaavoitusmittausohjeita (2003). Kaavoitusmittausohjeissa annetut tarkkuuden raja-arvot perustuvat suhteelliseen tarkkuuteen:

$$\text{suhteellinen tarkkuus} = \frac{\text{arvioitu virhe}}{\text{pistevälin pituus}} \tag{132}$$

Suhteellinen tarkkuus on pieni laaduton suhdeluku, jonka ”yksikkö” on ppm (parts per million, 1 ppm = $10^{-6}$). Suhdeluku kertoo kuinka monta miljoonasosaa matkasta arvioitu virhe on. Jos esimerkiksi virhe on 1 mm kilometrin matkalla, suhteellinen tarkkuus on 1 ppm, sillä 1 km on 1 000 000 mm.

Sulkuvirhettä vastaava suhteellinen tarkkuus lasketaan seuraavasti:

$$r = \frac{w_H}{L}\,, \tag{133}$$

jossa $r$ on suhteellinen tarkkuus, $w_H$ on korkeussulkuvirhe ja $L$ on vaaitusjonon pituus.

Kaavoitusmittausohjeiden (2003) mukaan vaaituksen suhteellisen tarkkuuden tulee olla:

- korkeusperuspisteiden osalta 5 ppm tai parempi
- mittausluokkien 1 ja 2 käyttöpisteiden osalta alle 50 ppm
- mittausluokan 3 käyttöpisteiden osalta alle 80 ppm.

Korkeusperuspisteet ovat varsinaisia kunnallisia korkeuskiintopisteitä. Ne on syytä mitata aina vaaitsemalla. Viiden miljoonasosan suhteellinen tarkkuusvaatimus on niin tiukka, että korkeusperuspisteiden mittauksessa on lähes välttämätöntä käyttää tarkkavaaituksen laitteita ja menetelmiä.

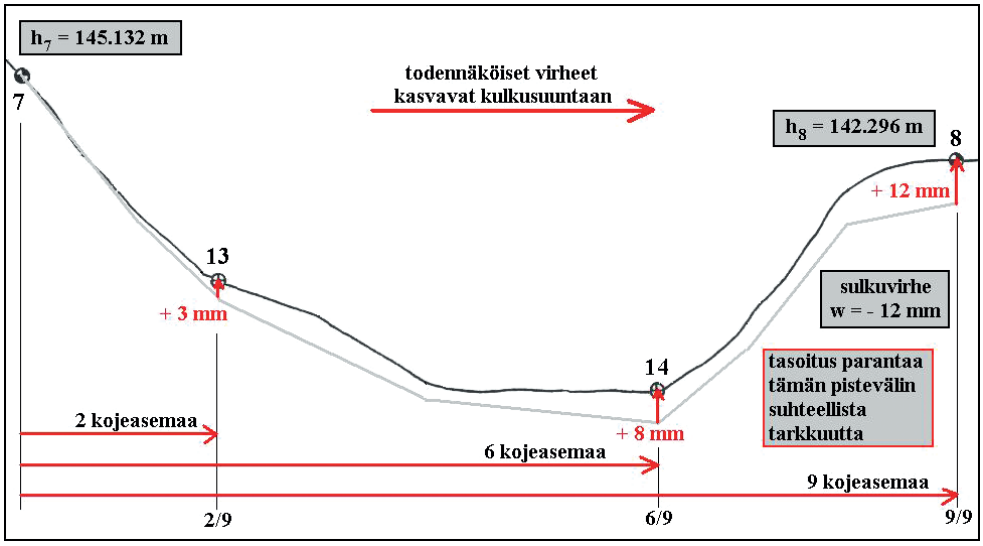
Jos edellä tarkastellun esimerkkijonon pituus on $L$ = 600 m, mittauksen suhteellinen tarkkuus on $r$ = 0.012 m / 600 m = 20.0 x $10^{-6}$ = 20 ppm. Mittaus ei näin ollen täytä kaavoitusmittausohjeiden peruskiintopisteiden tarkkuusrajaa, mutta korkeuskäyttöpisteiden tarkkuusrajat alittuvat selvästi.

### 6.5.4 Jonovaaituksen tasoittaminen

Mittauksen sulkemisen seurauksena jonon sulkupisteelle on käytettävissä kaksi arvoa, havainnoista laskettu arvo ja tunnettu arvo. Jos uusille korkeuspisteille käytettäisiin pelkästään havainnoista suoraan laskettuja korkeuksia, erityisesti viimeistä pisteväliä rasittaisivat kaikki mittauksen aikana kasautuneet virheet. Ne saattaisivat aiheuttaa ongelmia, kun vanhoja ja uusia pisteitä käytettäisiin sekaisin muiden mittausten lähtöpisteinä. Tämän vuoksi havaittuja korkeuksia pyritään korjaamaan tasoittamalla virheitä.

Tasoituslaskennassa huomioon mittaukseen liittyvät havainnot mahdollisimman tasapuolisesti lopputulosta määritettäessä. Tasapuolisuuteen pyritään arvioimalla havaintojen tarkkuutta ja niiden virheiden luonnetta. Vaaituksessa oletetaan, että jonon lähtö- ja sulkupisteiden korkeudet ovat virheettömiä. Lisäksi oletetaan, että vaaituksen virheet ovat verrannollisia vaaitun matkan pituuteen (kaava 128, s. 212) ja sulkuvirhe on koko matkan aikana kasautunut virhe.

Voidaan ajatella, että havainnoista laskettuja korkeuksia voidaan korjata jakamalla sulkuvirhe vaaittujen matkojen suhteessa korjauksina mittauspisteille. Tavanomaisessa jonovaaituksessa matkoja ei mitata, vaan vaaittujen matkojen pituuksien oletetaan olevan suoraan verrannollisia kojeasemien lukumääriin. Vaaitusjono tasoitetaan niin, että sulkuvirhe jaetaan kojeasemien lukumäärien suhteessa korjauksina mittatuille pisteille. Tämä tasoitusperiaate voidaan johtaa pienimmän neliösumman laskentaperiaatteella, mutta sen johtoon ei tässä yhteydessä voida perehtyä. (Kuva 189, s. 226.)




**KUVA 189** *Jonovaaituksen tasoittaminen. Sulkuvirhe ($w_H$ = –12 mm) jaetaan kojeasemien lukumäärien suhteessa vaaituille pisteille. Sulkupisteellä korjaus on +12 mm, pisteen 13 korjaus on (2/9) x 12 mm = +3 mm ja pisteen 14 korjaus on (6/9) x 12 mm = +8 mm.*

Mittauksen virheitä koskevat oletukset (virheettömät lähtöpisteet, vaaituksen virhe kasautuu verrannollisena kuljettuun matkaan) eivät ole välttämättä oikeita, mutta kuitenkin tarkoituksenmukaisia. Niiden perusteella tasoittamalla saavutetaan parempi yhteensopivuus eriaikaisten mittausten kesken kuin ilman tasoitusta. Vaikka tasoituslaskennassa sanotaan korjattavan havaintoja, niin korjaaminen ei poista mittauksen virheitä. Virheet vain jaetaan uudella tavalla eli tasataan. Tämän vuoksi on perusteltua puhua laskentamenetelmän yhteydessä tasoituslaskennasta.

Taulukossa 9 (s. 228) on esitetty kuvan 185 (s. 221) jonovaaituksen tasoittaminen ja lopputulokset. Taulukossa on esitetty myös havaintokirjanpitoon liittyvä laskujen tarkastusmahdollisuus. Tarkastusta varten on laskettu koko jonon korkeusero sekä taakse- ja eteenlukemien summien erotuksena (16.628 – 19.476 = –2.848 m) että korkeuserojen summana (–2.848 m). Kun nämä summat ovat yhtä suuret, korkeuserot on laskettu oikein taakse- ja eteenlukemista.

**TAULUKKO 9** *Jonovaaituksen tasoittaminen.*

| Piste | Taakse (t) | Eteen (e) | Korkeus-ero (t-e) | Havaittu korkeus | Korjaus | Tasoitettu korkeus |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | 145.132 |
| | 0.442 | 3.856 | | | | |
| | 1.124 | 3.945 | −6.235 | | | |
| 13 | | | | 138.897 | **+0.003** | 138.900 |
| | 1.533 | 2.522 | | | | |
| | 0.198 | 2.347 | | | | |
| | 2.537 | 2.611 | | | | |
| | 1.444 | 1.502 | −3.270 | | | |
| 14 | | | | 135.627 | **+0.008** | 135.635 |
| | 3.465 | 0.883 | | | | |
| | 3.776 | 0.560 | | | | |
| | 2.109 | 1.250 | +6.657 | | | |
| 8 | | | | 142.284 | **+0.012** | 142.296 |
| | | | | | | |
| | **16.628** | **19.476** | | | | |
| | | **−2.848** | **−2.848** | | | |

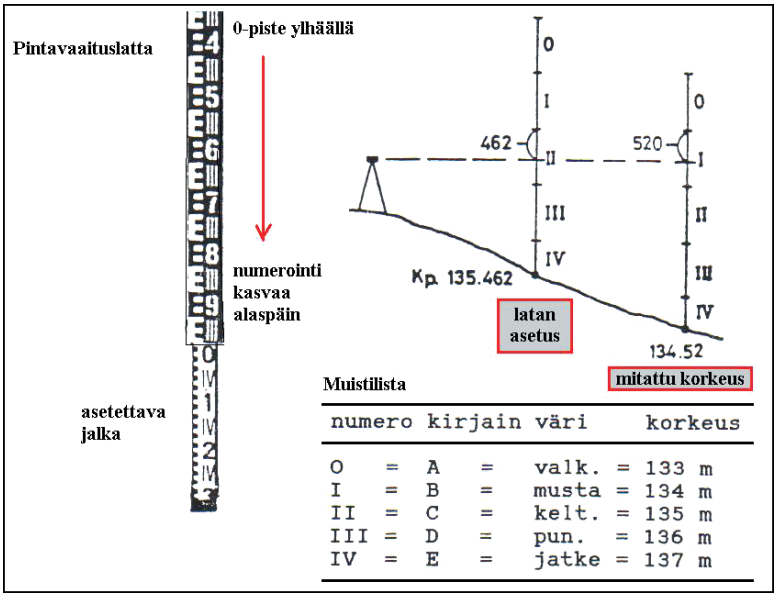
Vaaitusjonoa ei ole syytä tasoittaa, jos sulkuvirhe on suurempi kuin ohjeiden sallima arvo. Kun sulkuvirhe on liian suuri, ensiksi pitää tarkistaa omat laskut ja käytettyjen runkopisteiden korkeudet. Jos niissä ei ole virheitä, mittaus pitää uusia.

## 6.6 Pintavaaitus

### 6.6.1 Pintavaaituksen suoritus

Pintavaaituksella tarkoitetaan maanpinnan tai rakenteen alueellisten korkeusvaihteluiden mittaamista. Sitä voidaan käyttää kartoitusmittauksissa, pintojen ja rakenteiden tasaisuuden mittauksissa, pintojen kaltevuuksien määrityksessä sekä painumien ja tilavuuksien määrityksessä. Pintavaaituksen käyttö on vähentynyt, kun takymetri- ja satelliittimittaukset ovat yleistyneet. Kuitenkin pintavaaitus on edelleenkin käyttökelpoinen mittausmenetelmä pienissä mittauksissa. Itse mittausperiaate ja siihen liittyvät erilaiset määrittelyt on hyvä tuntea.

Mittauspaikalla tehtävien laskentojen helpottamiseksi pintavaaituksessa käytetään erityistä pintavaaituslattaa, jota kutsutaan myös itselaskevaksi lataksi. Sen asteikko kasvaa ylhäältä alaspäin ja siinä on säädettävä jalka. (Kuva 190, s. 229.)



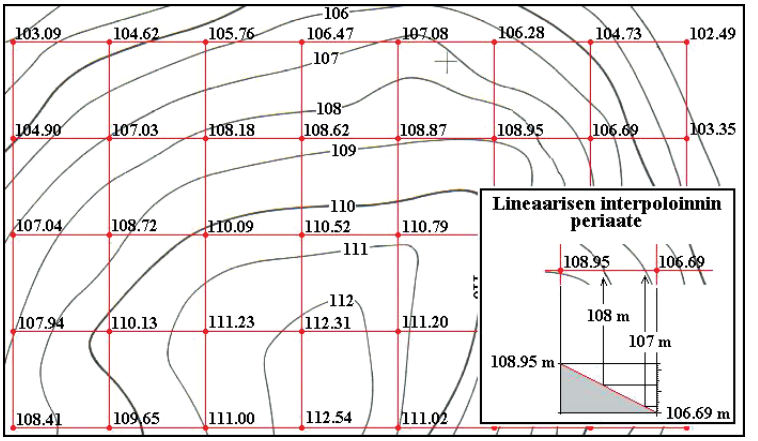

**KUVA 190** *Pintavaaituslatan käytön periaate. Lattaan asetetaan korkeuslähtöpisteen korkeuden senttimetri- tai millimetrilukema ja tehdään vastaavuustaulukko, josta selviävät tasametrit.*

Mittauspisteiden korkeudet saadaan suoraan latasta lukemalla seuraavan menettelyn mukaisesti (kuva 190):

1. Latta viedään tunnetulle pisteelle (kuvassa sen *H* = 135.462 m). Latan jalka lukitaan sellaiseen asentoon, että latasta saadaan pisteen korkeutta vastaava senttimetri- tai millimetrilukema (462 mm). Asetuksen jälkeen pisteen korkeuden ja lattalukeman ero on aina tasametrilukema. Kuvan esimerkissä ero on 135.462 – II.462 = 133 m.
2. Mittausta varten tehdään muistilista, josta ilmenee, mitä metrilukemaa kukin lattaan maalattu numero (tai kirjain tai väri) vastaa.
3. Kun latta viedään mitattavalle pisteelle, lattalukema antaa suoraan pisteen korkeuden: kuvassa I.52 (+133) = 134.52 m.

Pintavaaitus voidaan suorittaa joko ruutumenetelmällä tai hajapistemenetelmällä. Ruutumenetelmässä mitattava alue jaetaan suorakulmaisiin ruutuihin, yleensä neliöihin. Ruutujen sivujen pituus voi vaihdella tehtävästä riippuen välillä 1 … 50 m (kuva 191, s. 230). Ruutujako tehdään perinteisin välinein niin, että joltakin kartoituslinjalta prismataan tasavälein kohtisuorat linjat ja mittanauhan avulla merkitään ruutujen nurkat mittatikuilla. Tämän jälkeen merkityt pisteet vaaitaan.

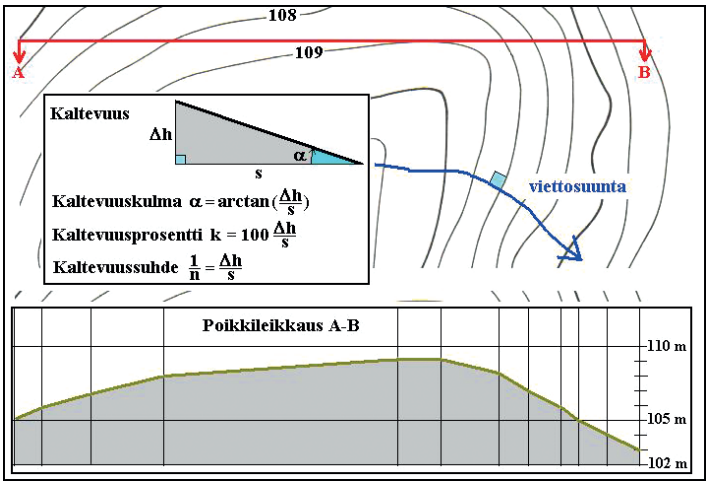
Hajapistemenetelmässä pisteet valitaan kohteen erityispiirteiden mukaisesti niin, että ne kuvaavat mahdollisimman hyvin kohteen korkeusvaihteluita. Menetelmää käytettäessä joudutaan mittaamaan myös pisteiden tasosijainti. Se mitataan esimerkiksi säteittäisellä mittauksella vaaituskojeen vaakakulmakehää ja mittanauhaa käyttäen.




**KUVA 191** *Ruutumenetelmällä tehdyn pintavaaituksen tulokset ja niiden perusteella piirretyt korkeuskäyrät. Käyriä piirrettäessä oletetaan, että maanpinnan korkeus muuttuu ruutupisteiden välillä lineaarisesti.*

## 6.6.2 Korkeuskäyrät

Pintavaaituksen tulokset esitetään usein korkeuskäyrinä. Ne esittävät havainnollisesti alueelliset korkeusvaihtelut. Korkeuskäyrää pitkin kuljettaessa korkeus on vakio. Korkeuskäyrät interpoloidaan vaaittujen ruutupisteiden välille tilanteeseen sopivaa käyräväliä käyttäen (kuva 191). Korkeussuhteita voidaan myös kuvata yksittäisinä lukuina kaltevuuskulman, kaltevuusprosentin ja kaltevuussuhteen muodossa sekä pystysuorien poikkileikkausten eli korkeusprofiilien avulla (kuva 192). Poikkileikkaukset ovat muun muassa erilaisille rakennussuunnitelmille tyypillisiä esitystapoja.

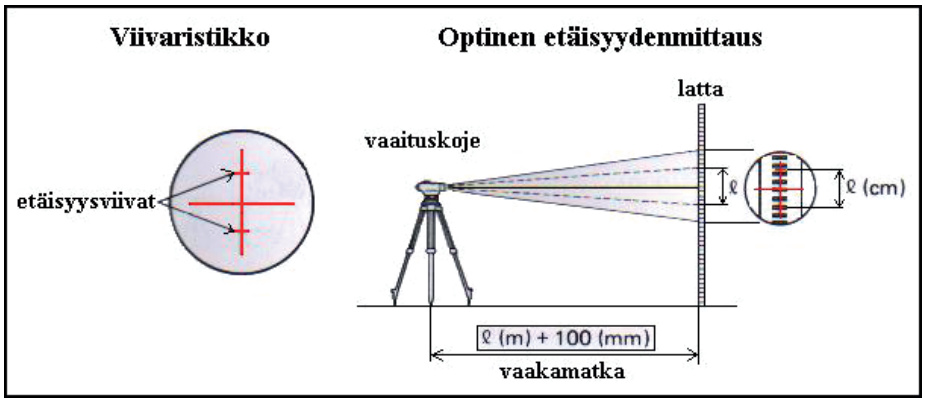



**KUVA 192** *Korkeussuhteita kuvaavia käsitteitä. Pinnan viettosuunta on kohtisuoraan korkeuskäyriin nähden. Esim. vesi virtaa pinnalla viettosuuntaan. Pinnan kaltevuus voidaan puolestaan sanoa kaltevuuskulman, kaltevuusprosentin tai kaltevuussuhteen avulla. Korkeussuhteet voidaan esittää myös pystysuorien poikkileikkausten muodossa.*

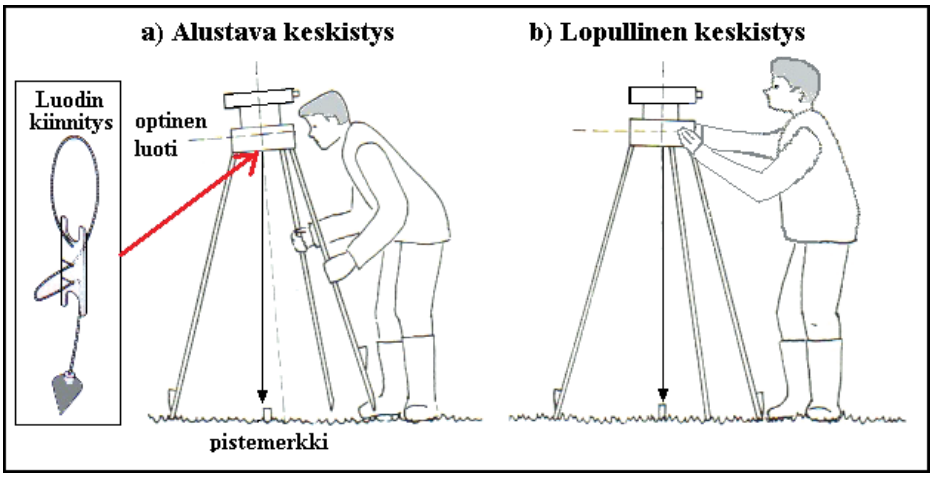
## 6.7 Optinen etäisyydenmittaus

Vaaituskojeella ja latalla voidaan mitata myös etäisyyksiä. Tällöin puhutaan optisesta etäisyydenmittauksesta. Mittausperiaate on melko yksinkertainen. Latasta luetaan, kuinka pitkä osa lattaa jää viivaristikon etäisyysviivojen muodostamaan avauskulmaan (kuva 193). Vaaituskojeiden mittauskaukoputket on yleensä rakennettu niin, että latasta luettu matka senttimetreinä on tähtäysmatka metreinä. Latasta luettu matka kerrotaan siis sadalla. Tulokseen voidaan joutua lisäämään jokin vakiokorjaus. Tavallisella optisella vaaituskojeella ja latalla voidaan mitata muutamien kymmenien metrien matkoja desimetrien tarkkuudella. Myös digitaalisilla vaaituskojeilla voidaan mitata etäisyyksiä. Tällöin mittaus tapahtuu automaattisesti, kuitenkin optisen etäisyydenmittauksen periaatteella.

Koska vaaituskojeella voidaan etäisyyksien lisäksi yleensä mitata myös vaakakulmia, voidaan vaaituskojeella tehdä yksinkertaista säteittäistä mittausta esimerkiksi pintavaaitukseen yhteydessä. Jos näin tehdään, tulee vaaituskoje tasauksen lisäksi keskistää tasorunkopisteelle. Keskistys tarkoittaa, että koje asetetaan maanpinnalla olevan pisteen kautta kulkevalle pystysuoralle. Kulmanmittauskojeita (teodoliittia ja takymetriä) käytettäessä keskistys on normaali mittauksen valmisteluun liittyvä toimenpide. Näissä kojeissa on keskistystä varten erityinen laite, optinen luoti. Sen sijaan vaaituskojeissa optista luotia ei ole, vaan vaaituskoje keskistetään tarvittaessa riippuluodin avulla (kuva 194, s. 232).




**KUVA 193** *Vaaituskojeella tehtävän optisen etäisyydenmittauksen periaate.*



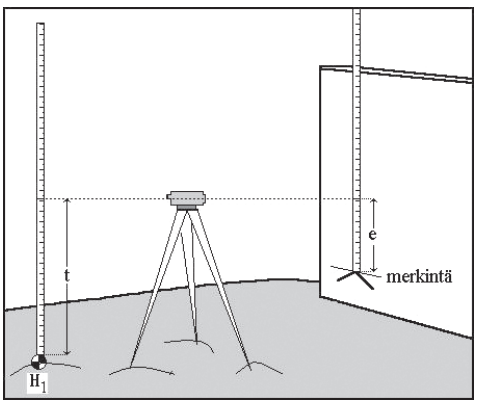

**KUVA 194** *Keskistys riippuluodin avulla. a) Alustava keskistys pisteelle tehdään jalustan kahta jalkaa siirtämällä. b) Lopullinen keskistys tehdään siirtämällä kojetta jalustapöydällä ja tasaamalla se. Pallopäinen vaaituskojeen jalusta ei sovi keskistykseen. (Mukaillen Ternryd – Lundin 1970, s. 23.)*

Vaaituskojeet ovat ensisijaisesti korkeuserojen mittauskojeita, mutta niiden avulla voidaan siis suorittaa myös etäisyyden- ja kulmanmittausta ja myös muita erikoisempia mittauksia. Melko yksinkertaisesta rakenteestaan huolimatta vaaituskojeet ovat hyvin monipuolisia mittauskojeita.

## 6.8 Tehtäviä

**151.** Selvitä kuvan 177 (s. 206) kojeiden tekniset ominaisuudet: kaukoputken suurennus, tasauksen tarkkuus ja kilometrikeskivirhe.

**152**. Muottiin tulee merkitä korkeus 142.000 m. Taaksetähtäys $t$ = 2.769 m tehtiin pisteelle, jonka korkeus on $H_1$ = 140.356 m. Mikä on eteentähtäyksen lukema, jotta merkintä voidaan tehdä vaaditulle korkeudelle? (Kuva 195.)

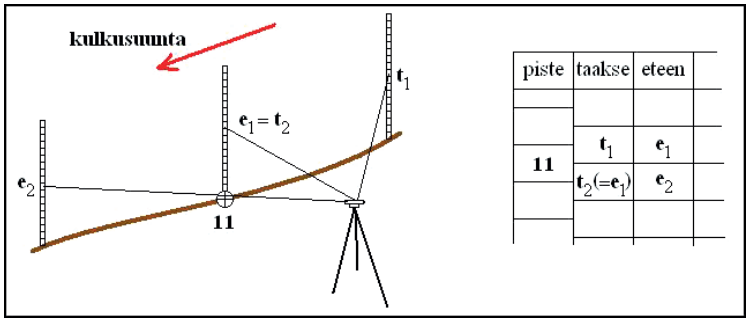



**KUVA 195** *Tehtävä 59.*

**153.** Jos vaaituksen sulkuvirhe on 8 mm ja jonon pituus on 900 m, mikä on mittauksen suhteellinen tarkkuus?

**154.** Miten korkeusrunkomittauksessa tulisi menetellä, jos sulkuvirhe on suurempi kuin mittausohjeiden sallima arvo?

**155.** Vaaitusjonoa mitattaessa pisteen 11 kohdalla vaaitsija ei viitsinyt siirtää eteentähtäyksen ($e_1$) jälkeen kojetta, vaan käski lattamiestä siirtymään jonossa eteenpäin. Siirtymisen jälkeen vaaitsija otti uuden eteentähtäyksen ($e_2$) ja kirjasi edellisen eteentähtäyksen havaintokirjaan myös taaksetähtäykseksi ($t_2$). Vaaitsijalle sattui kuitenkin lukemavirhe, kun latta oli pisteellä 11. Hän luki latan 10 cm liian pitkäksi. Miten lukemavirhe vaikutti pisteen 11 korkeuteen ja jonon sulkuvirheeseen? (Kuva 196.)




**KUVA 196** *Tehtävä 155: virhe jonovaaituksessa.*

**156.** Laske vaaituksen sulkuvirhe sekä vaaituskojeen vaaka-akselin korkeus kojeasemassa 4. Mittaus suljetaan lähtöpisteeseen, jonka korkeus on 102.530 m. Havainnot ovat:

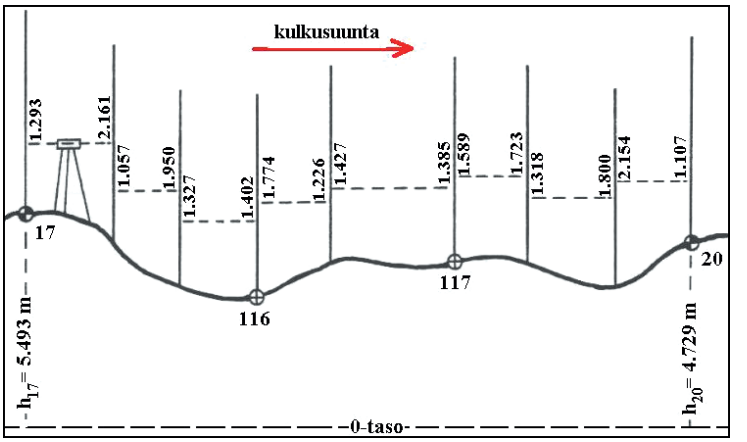
| Kojeasema | Taakse (t) | Vaaka-akselin korkeus | Eteen (e) | Korkeus-ero (t-e) | Korkeus |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3.052 | | 2.913 | | |
| **2** | 3.972 | | 2.561 | | |
| **3** | 1.432 | | 2.853 | | |
| **4** | 2.715 | | 2.203 | | |
| **5** | 2.153 | | 3.399 | | |
| **6** | 2.719 | | 2.108 | | |

**157.** Rataosan painuman selvittämiseksi tehtiin seuraava vaaitus:

| Piste | Taakse (t) | Sivulle (s) | Eteen (e) | Korkeus-ero (t-e) | Korkeus | Paaluluku |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **P000** | 3.094 | | | | 105.632 | 0+000 m |
| **P020** | | 2.694 | | | | 0+020 m |
| **P040** | 2.310 | | 2.344 | | | 0+040 m |
| **P060** | | 2.027 | | | | 0+060 m |
| **P080** | 1.283 | | 1.676 | | | 0+080 m |
| **P100** | | 0.829 | | | | 0+100 m |
| **vp** | 2.502 | | 1.692 | | | |
| **P120** | | 1.146 | | | | 0+120 m |
| **P140** | | 0.725 | | | | 0+140 m |
| **P160** | | | 0.332 | | | 0+160 m |

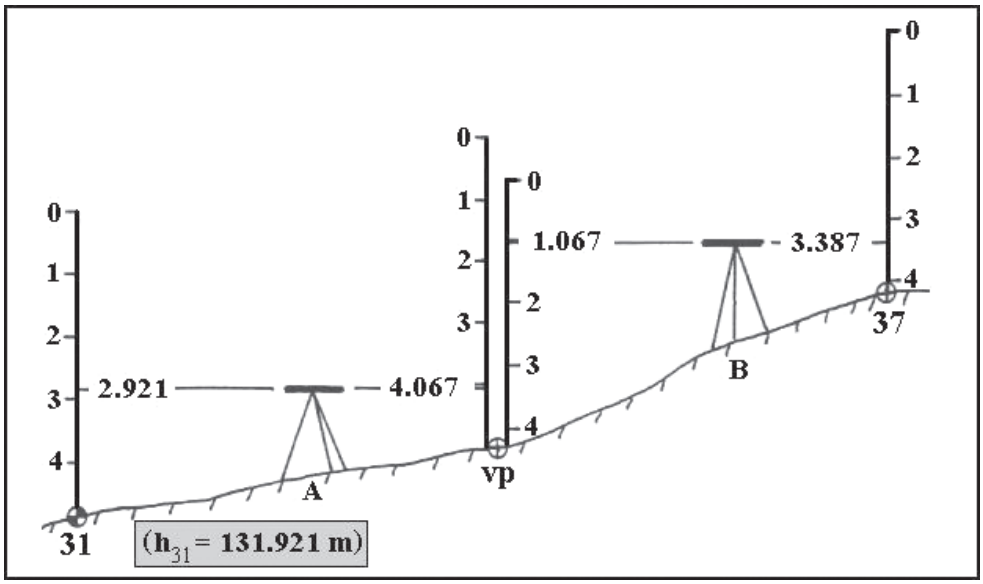
a) Määritä raiteen alkuperäinen kaltevuus, kun rataosuus on rakennettu vakiokaltevuuteen ja paalut P000 ja P160 ovat alkuperäisessä korkeudessaan. b) Määritä raiteen painuma alkuperäiseen korkeuteen nähden jokaisessa mittauspisteessä. Esitä painuma myös graafisesti. c) Määritä suurin painuman jälkeinen kaltevuus ja paaluväli, jolle suurin kaltevuus osuu. Paaluluku on vaakaetäisyys 0-paalusta P000.

**158.** Laske seuraavan kuvan jonovaaitus. Jonon pituus on 480 m. Täyttääkö mittaus kaavoitusmittausohjeiden (2003) mittausluokkien 1 ja 2 käyttöpisteiden suhteellisen tarkkuusrajan? (Kuva 197.)



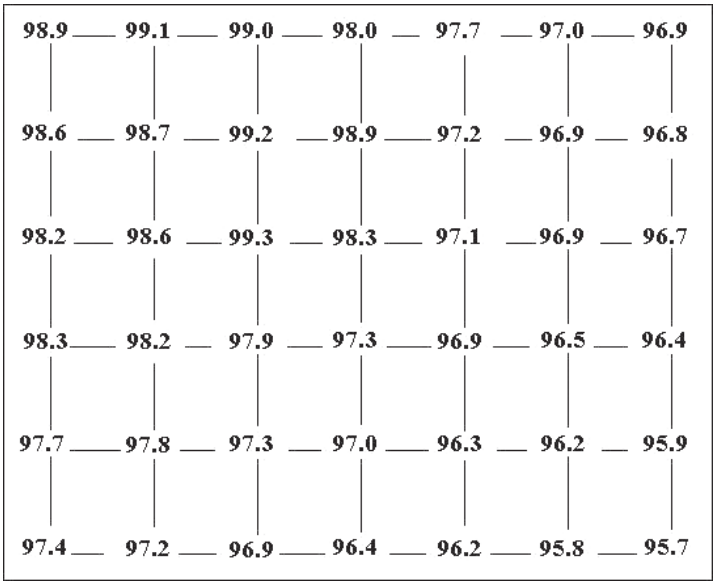

**KUVA 197** *Tehtävä 158: jonovaaitus. Jonon pituus on 480 m.*

**159.** Laske pisteen 37 korkeus, kun sen määrittämiseksi on tehty pintavaaituslatalla kuvan esittämät havainnot (kuva 198).



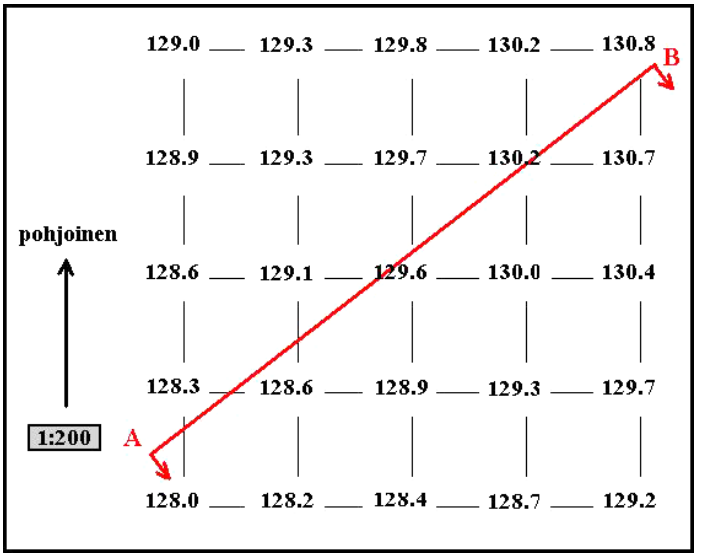

**KUVA 198** *Tehtävä 159: korkeuden siirtäminen pintavaaituslatalla.*

**160.** Piirrä kuvaan korkeuskäyrät yhden metrin välein (kuva 199).



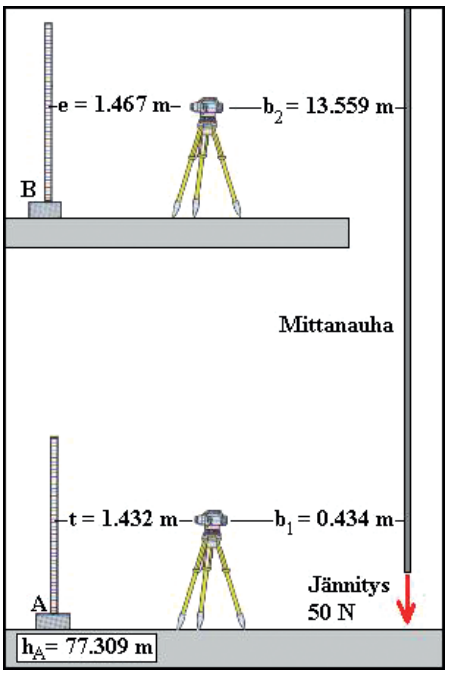

**KUVA 199** *Tehtävä 160: korkeuskäyrien piirtäminen.*

**161.** Arvioi seuraavan kuvan perusteella maanpinnan suurin kaltevuus ja sen suunta. Piirrä poikkileikkauksen A-B korkeusprofiili. (Kuva 200)




**KUVA 200** *Tehtävä 161: maanpinnan kaltevuus ja korkeusprofiili.*

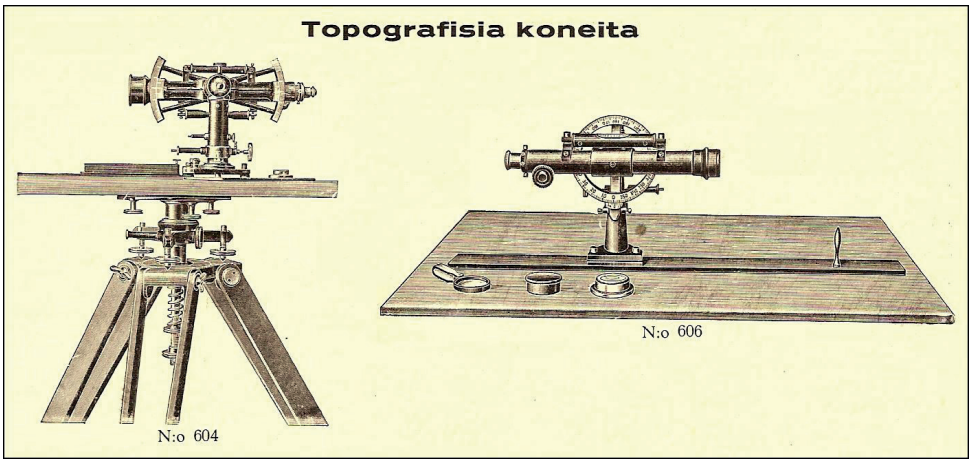
**162.** Talonrakennustyömaalla siirrettiin pohjakerroksessa olevalta korkeustihennyspisteeltä (A) korkeus ylempiin kerroksiin rakennettuun uuteen tihennyspisteeseen (B) viereisen kuvan esittämällä tavalla. Laske pisteen B korkeus. (Kuva 201.)




**KUVA 201** *Tehtävä 162.*

# 7 TAKYMETRIMITTAUS

Takymetri on ensisijaisesti kulman- ja etäisyydenmittauskoje, mutta tietoteknisenä laitteena sillä voidaan tehdä erittäin monipuolisia mittauksia. Se on satelliittimittauksen kojeiden ohella tärkein mittaus- ja kartoitustekniikassa nykyisin käytettävistä kojeista. Takymetri on mittaajan yleistyökalu. Nykyaikaiset takymetrit syntyivät yhdistämällä teodoliitti ja elektro-optinen etäisyysmittari. Takymetrit yleistyivät 1980-luvun aikana. Vuosien myötä kojeet ovat kehittyneet pitkälle automatisoiduiksi mittausroboteiksi. Kehittyneimmillä takymetreillä voidaan mitata kulmia ja etäisyyksiä sekä skannata (keilata) ja valokuvata mittauskohdetta. Aikanaan takymetrimittaus on ollut kahden mittaajan työtä, mutta nykyaikaisilla kojeilla yksi mittaaja voi tehdä useimmat työt. Viime vuosina takymetrin rinnalla on alettu käyttää laserkeilainta, joka mittaa automaattisesti ja nopeasti suuntia ja etäisyyksiä mittauskohteisiin. (Kuva 202.)




**KUVA 202** *Vanhoihin kojeisiin verrattaessa nykyaikainen takymetri vastaa käyttötarkoituksen osalta ehkä parhaiten mittapöydälle asetettavaa kipreegeliä (takymetrikipreegeli, kiikariviivoitin), joka on kartoitusmittauksiin suunniteltu koje. Sana ”takymetri” viittaa mittauskojeiden yhteydessä mahdollisuuteen mitata etäisyyksiä. (Th. Wulff Osakeyhtiön myyntiesite 1920-luvulta, s. 35.)*

## 7.1 Takymetri

### 7.1.1 Kulmanmittauskojeet

Takymetri on kulman- ja etäisyydenmittauskoje, jolla mitataan pysty- ja vaakakulmia sekä etäisyyksiä. Näistä havainnoista voidaan laskea koordinaatteja, korkeuksia ja muita suureita. Mittaustulokset tallennetaan sähköisesti. Perinteinen kulmanmittauskoje on nimeltään teodoliitti (kuva 203 a). Se on optismekaaninen koje, jonka vuoksi puhutaan optisesta teodoliitista. Teodoliitilla mitataan vain pysty- ja vaakakulmia eli siitä puuttuu etäisyysmittari. Nykyisin on käytössä myös elektronisia teodoliitteja. Mittaus- ja kartoitustekniikan tehtävissä teodoliitteja käytetään vähän, koska takymetri monipuolisempana mittauskojeena sopii teodoliittia paremmin yleisiin mittaus- ja kartoitustöihin. (Kuva 203.)

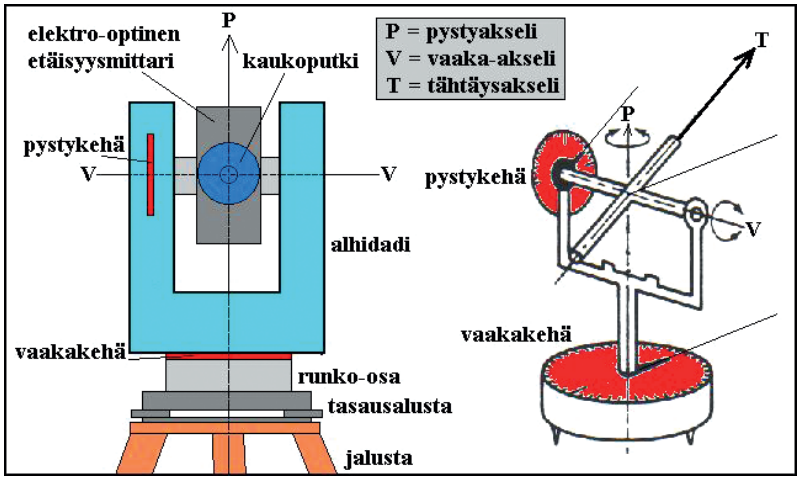
Sana takymetri on peräisin kreikankielestä ja viittaa etäisyydenmittaukseen. Myös perinteisellä teodoliitilla voidaan mitata etäisyyksiä optisen etäisyydenmittauksen periaatteella (kuva 193, s. 231). Näin myös teodoliitin yhteydessä voidaan käyttää takymetrinimitystä, kuten vanhojen kojeiden yhteydessä nimet takymetriteodoliitti, reduktiotakymetri tai takymetrikipreegeli osoittavat (kuva 202, s. 237).

**KUVA 203** *Teodoliitti ja kolme takymetriä. a) Optinen teodoliitti Wild T2 on ollut aikanaan tunnettu ja arvostettu kulmanmittauskoje. b) Sokkishan takymetri SET2C on 1980-luvun lopun tuote. Nykyisiin kojeisiin verrattuna sen automaatioaste on alhainen. c) Geodimeter 610C on servomoottoreilla varustettu takymetri 1990-luvulta. Kojemalli on mahdollista modernisoida yhden mittaajan kojeeksi eli etäkäyttöön sopivaksi robottitakymetriksi. d) Topconin takymetri GPT9003A on etäkäyttöön suunniteltu servotakymetri. Kojetta voidaan kutsua myös robottitakymetriksi tai mittausrobotiksi. Kaikki kuvan kojeet ovat perusrakenteeltaan ja ulkonäöltään samanlaisia mittauskojeita.*

### 7.1.2 Takymetrin pääosat

Takymetrin rakenteelliset pääosat ovat tasausalusta, runko-osa, alhidadi, mittauskaukoputki ja elektro-optinen etäisyysmittari (kuva 204). Takymetrissä on myös

- erilaisia tasaimia, kuten rasiatasain, putkitasain ja elektroniset tasaimet eli kompensaattorit
- jalkaruuvit, joiden avulla koje asetetaan vaakasuoraan
- optinen luoti kojeen keskistystä varten
- liikeruuvit kojeen suuntaamista varten.

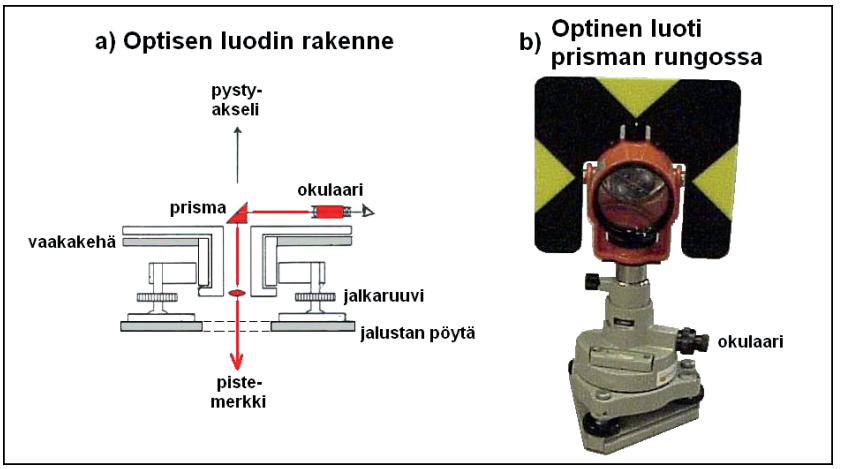



**KUVA 204** *Takymetrin pääosat ja akselit. Pääosia ovat tasausalusta, runko-osa, alhidadi, kaukoputki ja elektro-optinen etäisyysmittari. Kojeen akselit ovat pysty-, vaaka- ja tähtäysakselit. Etäisyysmittarin elektroniset ja optiset osat sijaitsevat mittauskaukoputken ympärillä ja sisällä.*

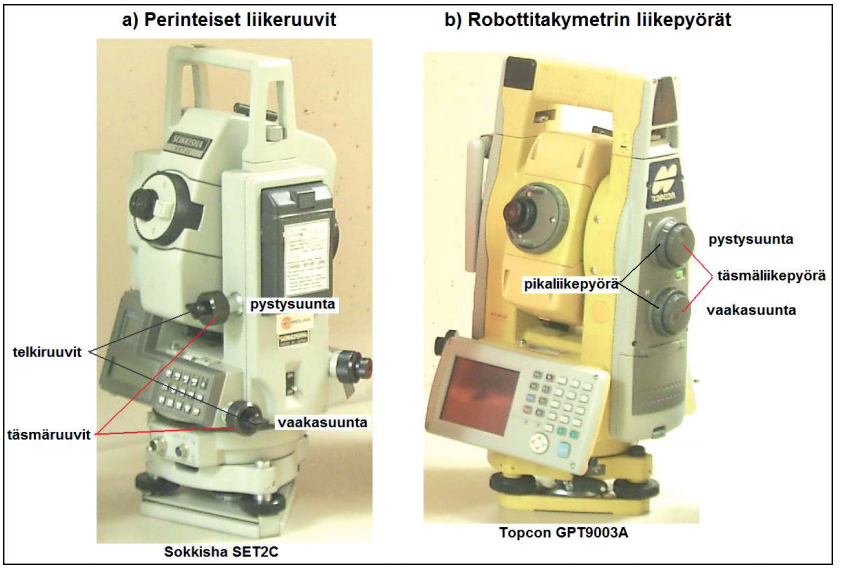
Tasausalusta on muusta kojeesta erillinen osa, jonka välityksellä koje kiinnitetään jalustaan. Tasausalustassa on kolme jalkaruuvia, joiden avulla takymetrin asentoa voidaan muuttaa. Usein tasausalustassa on myös optinen luoti. Runko-osa kiinnittyy tasausalustaan. Runko-osassa on tähtäyssuunnan ja vaakakulman mittaukseen tarkoitettu vaakakehä. Se asetetaan kojeen tasauksen yhteydessä vaakatasoon. Alhidadi kannattaa mittauskaukoputkea. Alhidadi pyörii runko-osan suhteen kojeen pystyakselin ympäri. Mittauskaukoputki kiinnittyy alhidadiin ja pyörii kojeen vaaka-akselin ympäri. Vaaka-akselin päässä, alhidadin sisällä on pystykulmanmittaukseen tarkoitettu pystykehä. Elektro-optisen etäisyysmittarin rakenteelliset osat sijaitsevat mittauskaukoputkessa ja sen ympärillä. (Kuva 204.)

Tasainten, jalkaruuvien ja optisen luodin avulla takymetri asetetaan vaakasuoraan ja maanpinnalla olevan pistemerkin kautta kulkevalle pystysuoralle. Toimenpidettä kutsutaan kojeen keskistykseksi ja tasaukseksi. Optisella luodilla katsotaan kojeen alapuolelle. Optinen luoti sijaitsee alhidadissa. Se voi olla myös tasausalustassa. Tästä

on hyötyä, kun joissakin mittauksissa myös tähykset ja prismat keskistetään ja tasataan mittauspisteille jalustalle asennettuina. Tähyksen ja prisman yhdistelmään ei nimittäin aina kuulu omaa optista luotia, jolloin keskistykseen käytetään tasausalustan luotia. (Kuva 205, kuva 207, s. 241, kuva 208, s. 242 ja kuva 210 b, s. 244.)



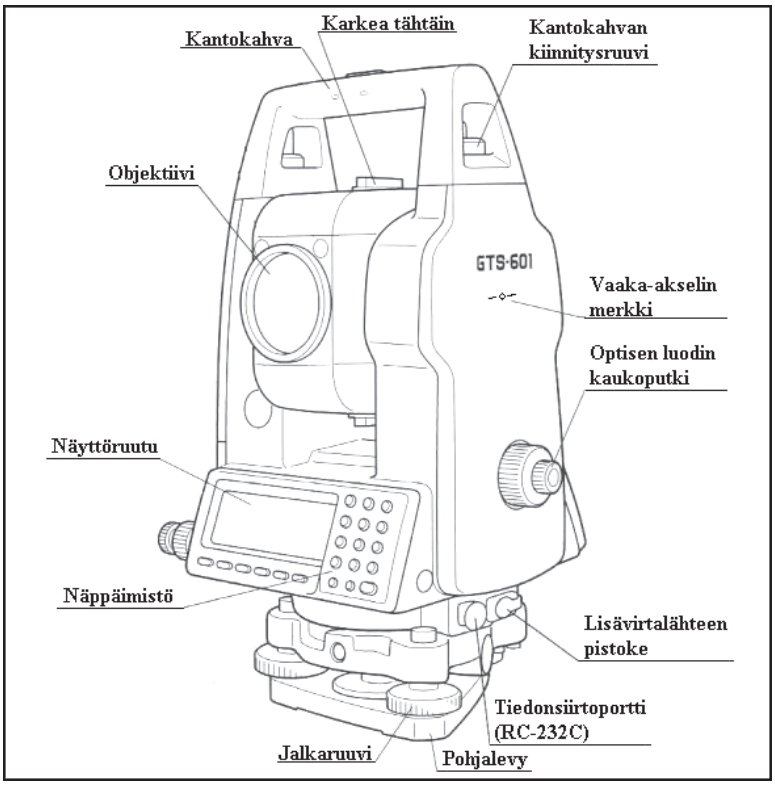

**KUVA 205** *a) Optisen luodin rakenne. Optisella luodilla katsotaan kojeen ala-puolelle sen pystyakselia pitkin. Sitä käytetään kojeen keskistämiseen. Keskistettäessä koje tasataan ja asetetaan maanpinnalla olevan pistemerkin kautta kulkevalle pystysuoralle. b) Optisen luodin okulaari prisman rungossa. Prisma on elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa käytettävä heijastin.*




**KUVA 206** *a) Telki- ja täsmäruuvit ovat perinteisen takymetrin liikeruuveja. b) Servomoottorein varustettu takymetri suunnataan liikepyörien avulla, joita voi olla kaksi, kuten kuvassa, tai yksi kummallekin liikesuunnalle.*

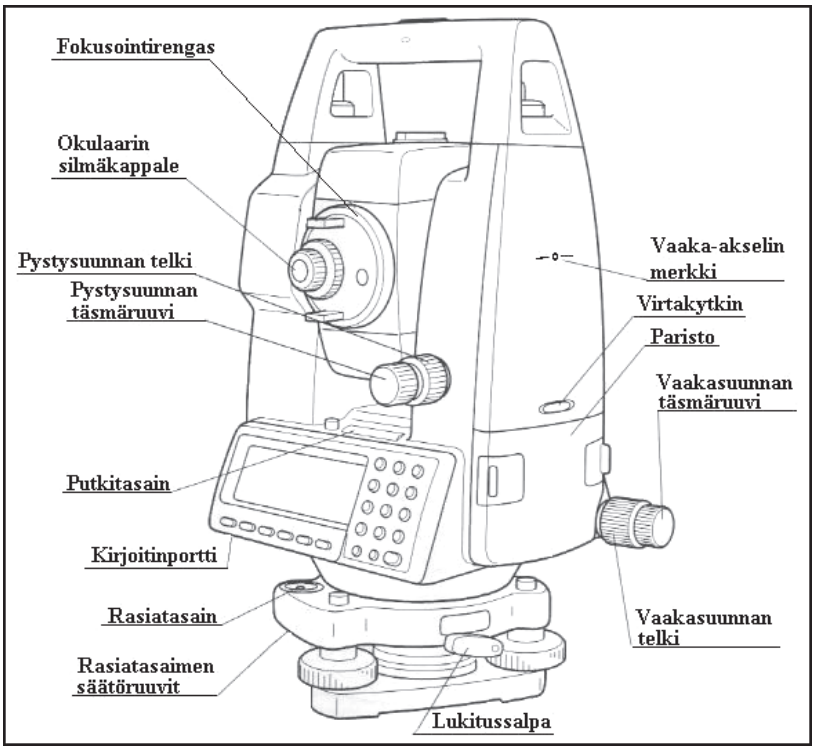
Liikeruuvien avulla takymetri suunnataan mittauskohteeseen. Liikeruuveja on kahdenlaisia, telki- ja täsmäruuveja. Koska mittauskaukoputkea voi kiertää sekä kojeen pysty- että vaaka-akselin ympäri, kummallekin liikesuunnalle on omat liikeruuvinsa. Telkiruuvien tarkoituksena on lukita kaukoputki haluttuun asentoon. Täsmäruuvien avulla kaukoputkea voidaan siirtää hitaasti, kun telkiruuvit ovat lukittuina. Täsmäruuvien avulla suoritetaan kaukoputken tarkka tähtäys mittauskohteeseen. Nykyaikaisissa servomoottoriohjauksella varustetuissa takymetreissä ei ole telkiruuveja, vaan niissä on erityiset liikepyörät kaukoputken suuntausta varten. (Kuva 206, s. 240 ja kuva 214, s. 247.)

Telkiruuvien kanssa tulee toimia varovaisesti. Jos telkiruuvit on lukittu, kojetta ja kaukoputkea ei saa kääntää väkisin, koska telkiruuvien rakenteet saattavat löystyä ja jopa vaurioitua. Vaurioiduttuaan telkiruuvit eivät enää lukitse kojetta. Telkiruuvit lukittuina kojetta saa kääntää vain täsmäruuveista.




**KUVA 207** *Takymetri (Topcon GTS-601) objektiivin puolelta nähtynä. Kuvassa näkyvät muun muassa optisen luodin okulaari ja karkea tähtäin eli diopteritähtäin. Karkean tähtäimen avulla kaukoputki suunnataan likimäärin mittauskohteeseen. Vaaka-akselin merkki osoittaa kohdan, johon kojekorkeus mitataan takymetrin orientoinnin yhteydessä. (Topgeo Oy:n esite.)*

Takymetrin mittauskaukoputken säädöt ovat periaatteessa samanlaiset kuin vaaituskojeessa, mutta säätöruuvien sijoittelussa on eroja. Vaaituskojeissa kohteen fokusointi tapahtuu kaukoputken sivussa olevan säätöruuvin avulla (kuva 170, s. 208). Sen sijaan takymetri fokusoidaan okulaarin ympäri kiertyvän fokusointirenkaan avulla (kuva 208,). Viivaristikko tarkennetaan kuten vaaituskojeessa, okulaarin silmäkappaletta kiertäen.



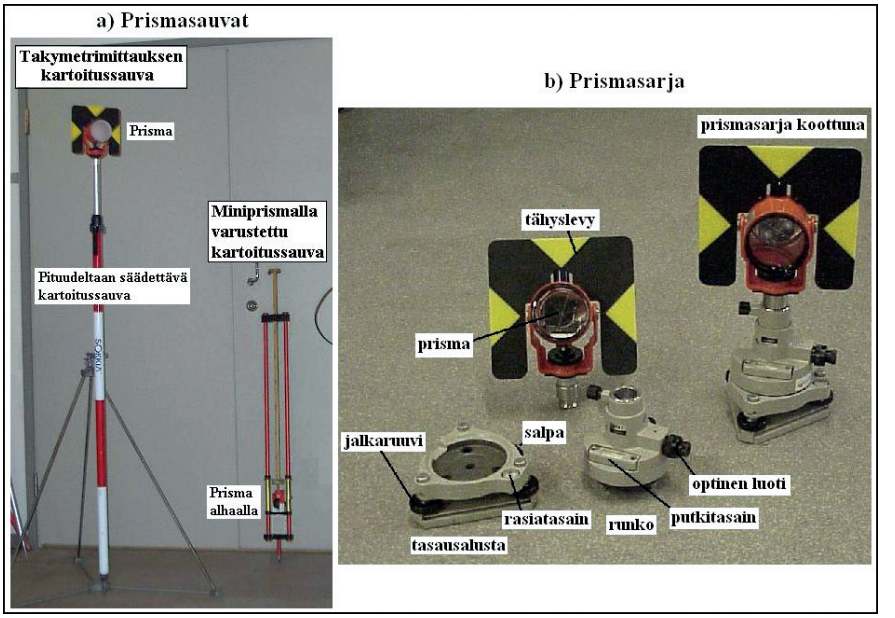

**KUVA 208** *Takymetri (Topcon GTS-601) okulaarin puolelta nähtynä. Kuvassa näkyvät mm. tasaimet ja liikeruuvit. Telkiruuveille kaukoputki lukitaan vaaka- ja pystysuunnassa. Tällöin kaukoputkea voidaan liikuttaa hitaasti täsmäruuveilla. Niiden avulla suoritetaan kojeen tarkka tähtäys mittauskohteeseen. (Topgeo Oy:n esite.)*

### 7.1.3 Kojejalustat, prismat ja prismasauvat

Takymetrimittauksissa tarvitaan takymetrin lisäksi muun muassa kolmijalkoja kojeiden ja tähysten jalustoiksi, prismoja ja tähyksiä etäisyyksien ja kulmien mittaukseen ja kartoitussauvoja. Takymetrin jalustan on kojeen painon vuoksi hyvä olla raskaampi ja tukevampi kuin vaaituskojeen jalustan. Puinen jalusta on takymetrille parempi kuin alumiininen jalusta, koska puinen jalusta pitää paremmin mittansa lämpötilan vaihdellessa. Haittapuolena on, että puinen jalusta vaatii enemmän huoltoa kuin alumiininen jalusta. Takymetrin jalustan pöytälevyn tulee aina olla suora. Sen sijaan vaaituskojeen jalustassa voi olla myös pyöristetty pää. (Kuva 243.)

**KUVA 209** *Vaaituskojeen ja takymetrin jalustoja.*

Kartoitus- ja merkintämittauksissa käytetään kartoitussauvaan kiinnitettyä prismaa. Prisman ympärillä on yleensä tähyslevy tarkkaa kohdistusta varten. Miniprismalla varustettu kartoitussauva on suunniteltu erityisesti rakennusmittauksia varten. Prismasarjaksi sanottua yhdistelmää käytetään tähyksenä muun muassa runkomittauksissa. Prismasarja asennetaan kolmijalalle kuten takymetri. Prismasarja koostuu tasausalustasta, runko-osasta, prismasta ja tähyslevystä. Runko-osassa on optinen luoti, mutta optinen luoti voi olla myös tasausalustan osana. (Kuva 210, s. 244.)




**KUVA 210** *a) Prismasauvat. b) Prismasarja (Sokkia ASP 131).*

### 7.1.4 Maastotallennin

Maastotallennin on maastokelpoinen, säänkestävä tietokone. Maastotallennin sisältää mittausohjelmistot. Laitteeseen tallennetaan lähtötiedot, mittaushavainnot ja muut mittauksessa tarvittavat tiedot. Tallentimen avulla tehdään myös mittauksiin liittyvät tiedonsiirrot. Ne voidaan tehdä kaapelilla, muistikortilla, langattomasti bluetoothtekniikalla ja nykyisin myös langattomasti Internetin kautta. Bluetooth on avoin standardi lähietäisyydellä olevien laitteiden langattomaan kommunikointiin. Aina erillistä maastotallenninta ei tarvita, koska tallentimen toiminnot voivat löytyä myös takymetristä. (Kuvat 211 ja 212, s. 245.)

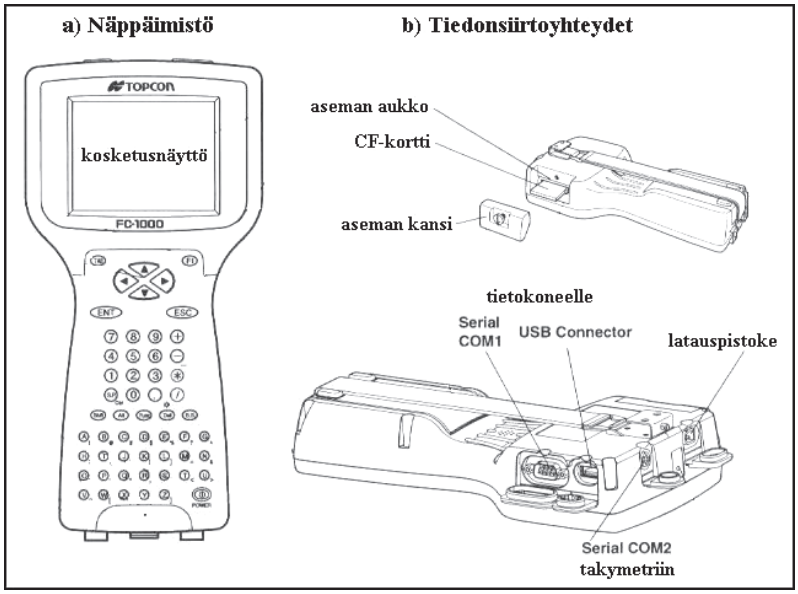
## 7.2 Kulman- ja etäisyydenmittaus

### 7.2.1 Kojeasennot

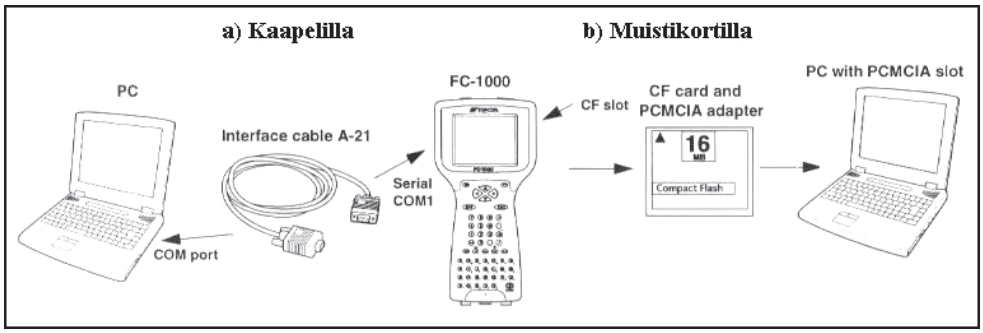
Koska takymetri ja teodoliiti pyörivät sekä pysty- että vaaka-akselin ympäri, niillä voidaan tähdätä mittauskohteeseen kahdessa asennossa. Vaihtoehtoisia tähtäys asentoja kutsutaan kojeasennoiksi. Ne määritellään kulmakehien lukemien perusteella. Takymetrin sanotaan olevan I-asennossa, kun vaakasuoran tähtäyksen pystykehälukema on 100 gon ja II-asennossa, kun vaakasuoran tähtäyksen pystykehälukema on 300 gon. Kojeasentojen määrittely perustuu siis pystykulmaan. Kuitenkin kojeasento vaikuttaa myös vaakakehältä havaittaviin suuntiin. Virheettömässä mit-

tauksessa I- ja II-asentojen tähtäyssuunnat samaan pisteeseen eroavat toisistaan oikokulman eli 200 gon. Samaan pisteeseen mitattujen I- ja II-asentojen pystykulmien summaksi puolestaan tulee täysi kulma eli 400 gon. (Kuva 213, s. 246.)

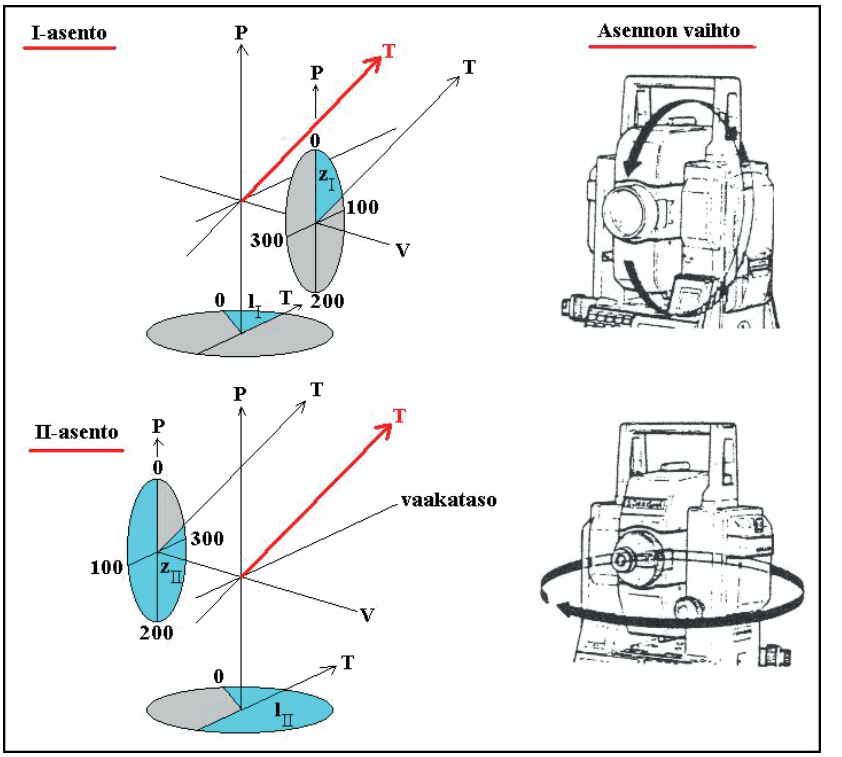
Takymetrin normaali mittausasento on I-asento. Vaativissa mittauksissa kulmahavainnot tehdään kuitenkin molemmissa kojeasennoissa. Näin parannetaan mittausten tarkkuutta. Tarkkuuden paraneminen perustuu satunnaisten virheiden käyttäytymiseen toistossa ja siihen, että mittausmenettelyssä eliminoituvat keskeisimmät kulmanmittaukseen vaikuttavat kojevirheet.




**KUVA 211** *a) Maastotallentimen näppäimistö (Topcon FC-1000). Tallentimen toimintoja voi ohjata näppäimistön ohella myös kosketusnäytön välityksellä. b) Tallentimessa on erilaisia tiedonsiirtomahdollisuuksia tietokoneeseen ja mittauskojeisiin (takymetriin tai satelliittipaikantimeen). (Topgeo Oy:n esite.)*




**KUVA 212** *Tallentimen (Topcon FC-1000) ja tietokoneen väliset tiedonsiirrot tehdään esim. a) kaapelilla tai b) muistikortilla. Tietotekniikan kehittyessä käyttöön on tullut myös langaton tiedonsiirto. (Topgeo Oy:n esite.)*




**KUVA 213** *Kulmakehät kummassakin kojeasennossa ja kojeasennon vaihtaminen. Kojeasentoa vaihdettaessa lukemakohta siirtyy vaakakehällä oikokulman verran ja pystykehä siirtyy kojeen oikealta puolelta vasemmalle puolelle tai vasemmalta oikealle. Koeasento näkyy yleensä kojeesta. Alhidadiin on voitu merkitä kojeasentoa kuvaava symboli (esimerkiksi I tai II). Jos kojeessa on vain yksi paneeli (näppäimistö ja näyttö), se on sijoitettu niin, että I-asennossa tähdättäessä paneeli on havaitsijaan päin.*

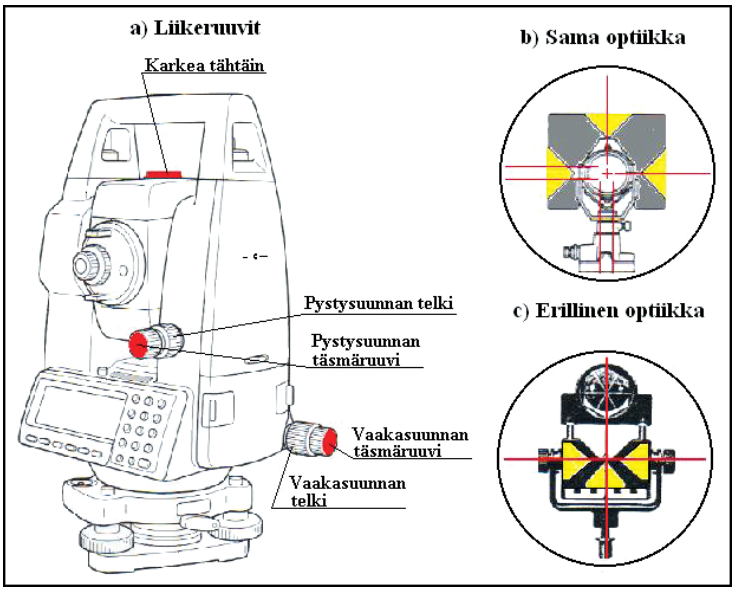
### 7.2.2 Tähtäys kohteeseen

Takymetrillä mitattaessa kojeen mittauskaukoputki suunnataan mittauskohteessa olevaan prismaan ja kulmatähykseen. Yleensä kaukoputken viivaristikon keskipiste tähdätään keskelle prisman ja tähyksen yhdistelmää. Keskikohdan määrittävät kulmatähyksen kolmiot ja näkyvä prismakeskus. Joskus, erityisesti vanhemmissa kojeissa tai erillisiä etäisyysmittareita käytettäessä, voi elektro-optisella etäisyysmittarilla olla eri optiikka kuin mittauskaukoputkella. Tällöin mittauskaukoputki kohdistetaan kulmatähyksen perusteella. (Kuva 214, s. 247.)

Ennen mittausten aloitusta mittauskaukoputki säädetään havaitsijan silmälle sopivaksi poistamalla mahdollinen kaukoputken parallaksi. Tähtäys kohteeseen tehdään rauhallisesti viivaristikon keskikohdalla kojeen telki- ja täsmäruuveja apuna käyttäen:

– Vaaka- ja pystyteljet avataan ja kaukoputki tähdätään karkealla tähtäimellä eli diopteritähtäimellä likimäärin mittauspisteeseen.
– Kaukoputki tarkennetaan tähtäysetäisyydelle. Kun tähys on näkökentässä, kiristetään telkiruuvit.
– Viivaristikon keskipiste kohdistetaan täsmällisesti tähykseen vaaka- ja pystysuunnan täsmäruuvien avulla.

Nykyaikaisissa servomoottoriohjatuissa ja liikepyörillä varustetuissa takymetreissä voidaan tähtäyksessä hyödyntää mittausautomatiikkaa.



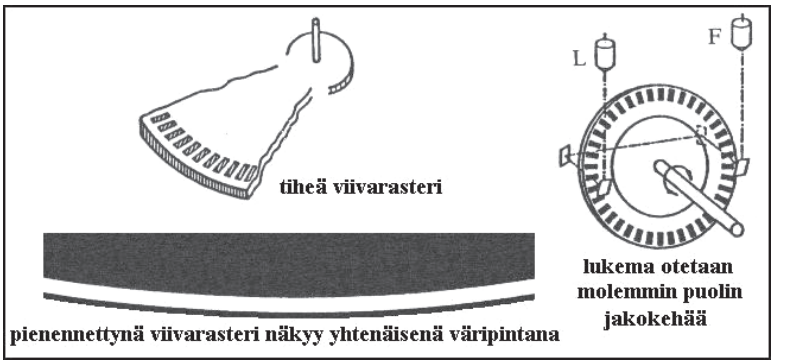

**KUVA 214** *a) Kohteeseen tähdätään karkeaa tähtäintä, kaukoputkea ja liikeruuveja apuna käyttäen. Tähtäys suoritetaan mahdollisimman nopeasti, mutta täsmällisesti. b) Yleensä prismaan tähdätään keskelle. Tämä tarkoittaa, että tähtäysakseli ja elektro-optinen etäisyysmittari käyttävät samaa optiikkaa. c) Vanhemmissa takymetreissä elektro-optisella etäisyysmittarilla saattoi olla oma optiikkansa, jolloin kulmatähys ja prisma piti sijoittaa erilleen. Nykyään eri optiikalla varustetut kojeet ovat harvinaisia.*

### 7.2.3 Sähköinen kulmanluku

Kulmahavainnot tehdään takymetrin pysty- ja vaakakulmakehiltä automatisoidusti. Tämän vuoksi kulmakehien tulee olla sähköisesti luettavia. Sähköisesti luettavat kulmakehät rakentuvat yleensä viivarasterista. Tällaisia kulmakehiä tai jakokehiä kutsutaan inkrementaalikehiksi. Kulmakehän jakoviivat ovat saman levyisiä ja vuoron perään valoa läpäiseviä ja ei-läpäiseviä. Jakoviivat voivat olla myös magneettisia tai galvaanisia juovia. Kun takymetriä kierretään pysty- tai vaaka-akselin ympäri, laskee kehään liittyvä anturi lukemakohdan ohittaneiden viivojen lukumäärän.

Anturia sanotaan pulssilaskimeksi. Anturin ohittaneiden viivojen lukumäärä muunnetaan kulmalukemaksi. Yleensä antureita on ainakin kaksi ja ne sijaitsevat kehän vastakkaisilla puolilla. (Kuva 215, s. 215.)

Tyypillisesti takymetrien kulmanlukulaitteiden erotuskyky on 0.0001 gon, mutta parhaimmillaan se voi olla jopa kymmenesosa tästä eli 0.00001 gon. Kun pienten kulmien yksikkönä käytetään usein milligoonia, on 0.0001 gon yhtä kuin 0.1 mgon. Takymetrien tyypillinen kulmanmittauksen erotuskyky on siis 0.1 mgon.



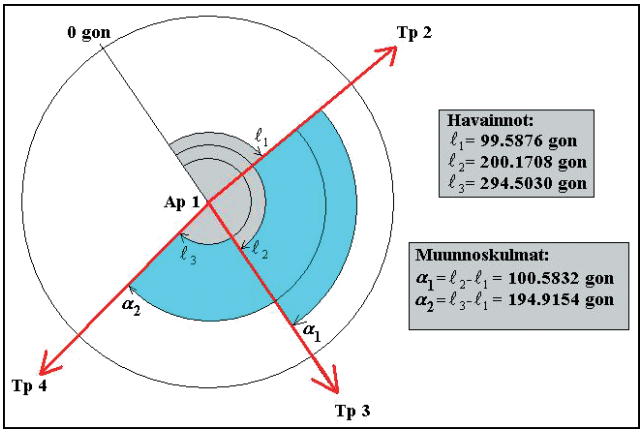

**KUVA 215** *Sähköisesti luettava inkrementaalikehä muodostuu viivarasterista. Kehällä on esimerkiksi 20000 viivaa. Lukema otetaan antureilla, jotka sijaitsevat molemmin puoli jakokehää tai useammassakin kohtaa kehällä. (Tikka 1992, s. 84.)*

### 7.2.4 Yksinkertainen kulmanmittaus

Takymetrillä ja teodoliitilla tehtävät kulmahavainnot ovat joko kojeen vaakakehältä luettavia tähtäyssuuntia tai pystykehältä luettavia pystykulmia. Vaakakehältä saatavien tähtäyssuuntien erotuksena voidaan laskea suuntien välisiä vaakakulmia, joita kutsutaan muunnoskulmiksi. Vaikka puhutaan kulmanmittauksesta, täsmällisempää on siis puhua tähtäyssuuntien mittaamisesta, koska kulmat ovat tähtäyssuuntien erotuksia. Kun tähtäyssuunnat tai pystykulmat havaitaan vain kojeen I-asennossa, voidaan puhua yksinkertaisesta kulmanmittauksesta.

Kuva 216 (s. 249) esittää asemapisteeltä 1 tähtäyspisteisiin 2, 3 ja 4 tehdyt vaakasuuntahavainnot. Havainnot voidaan kirjata seuraavasti kulmahavaintokirjaan (taulukko 10, s. 249):

- Valitaan vertailusuunta, esimerkissä sivun 1–2 suunta. Muunnoskulmat lasketaan valitun vertailusuunnan suhteen.
- Havaitaan piste 2 ja sen jälkeen myötäpäivään kiertäen pisteet 3 ja 4.
- Lasketaan muunnoskulmat ($\alpha_1$ ja $\alpha_2$) vertailusuunnan suhteen vähentämällä vertailusuunnan vaakakehälukema ( $\ell_1$ ) muiden suuntien vaakakehälukemista. Vertailusuunnan muunnoskulma on nolla ja muut muunnoskulmat ovat vertailusuunnan suhteen laskettuja myötäpäivään kasvavia kulmia.




**KUVA 216** *Kojeen I-asennossa vaakakehältä luetut tähtäyssuunnat ja niistä lasketut muunnoskulmat. Kuvan esittämät havainnot on kirjattu havaintokirjaan taulukossa 10. Suunta 1–2 on vertailusuunta.*

**TAULUKKO 10** *Kuvaan 216 perustuva havaintojen kirjaamisesimerkki. Ap tarkoittaa asemapistettä ja Tp tähtäyspistettä.*

| Ap | Tp | I-asento | II-asento | Keskiarvo | Muunnos-kulma | Sarja-keskiarvo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 99.5876 | = $\ell_1$ | | 0.0000 | |
| | 3 | 200.1708 | = $\ell_2$ | | 100.5832 | = $\alpha_1$ |
| | 4 | 294.5030 | = $\ell_3$ | | 194.9154 | = $\alpha_2$ |

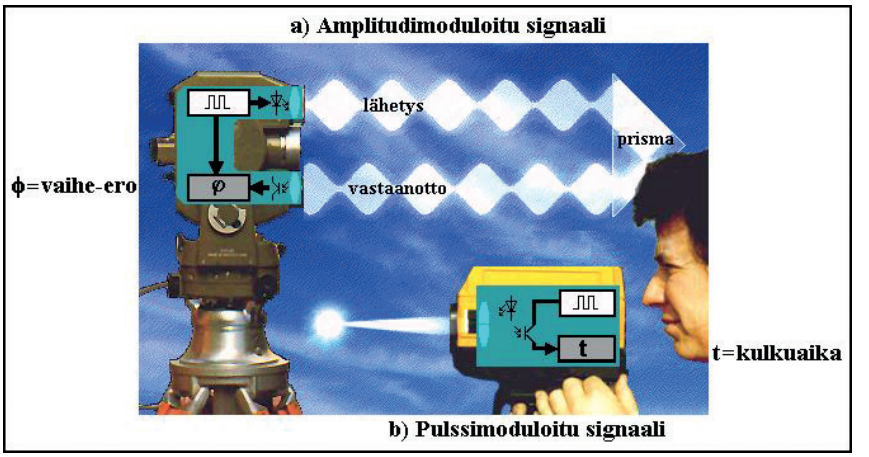
Edellä käytetty havaintojen taulukointitapa on perinteinen sarjahavaintojen kirjaamistapa. Sarjahavaintomenetelmään liittyen taulukossa esiintyy myös II-asennon havainnot ja erilaisia keskiarvolukemia. Vaikka nykyisin havaintoja ei juurikaan tallenneta käsin, on edelleen tärkeää tuntea havaintojen muodostumistapa ja niiden käsittelyyn liittyvät toimenpiteet. Vanhat havaintojen kirjaamistavat palvelevat tässä mielessä hyvin oppimista. Välttämättä ei kuitenkaan tarvitse pitäytyä vanhoissa havaintojen esitys- ja kirjaamistavoissa, koska erilaisten taulukoiden tekeminen ja laskeminen on nykyisin tietotekniikan tarjoamin keinoin melko yksinkertaista.

### 7.2.5 Elektro-optinen etäisyydenmittaus

Takymetrin etäisyydenmittaustapaa kutsutaan elektro-optiseksi etäisyydenmittaukseksi. Elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa etäisyys määritetään takymetrin lähettämän ja tähtäyspisteellä olevasta prismasta heijastuvan signaalin vertailun perusteella. Yleensä mittauksessa käytetään hyväksi kantoaallolle

amplitudimoduloitua mittausvärähtelyä. Kantoaallon muodostaa ihmissilmälle näkymätön infrapunainen valo. Sen aallonpituus on 900 nm (1 nm = $10^{-9}$ m). Joskus kantoaaltona käytetään myös näkyvää valoa, jonka aallonpituus on 550–630 nm. Kantoaaltoa moduloidaan pitkäaaltoisella mittausvärähtelyllä. Sen aallonpituus on esimerkiksi 6–20 m. Mittausvärähtelyn aallonpituuden puolikasta kutsutaan yksikköjanaksi. (Kuva 217 a ja kuva 218, s. 251.)

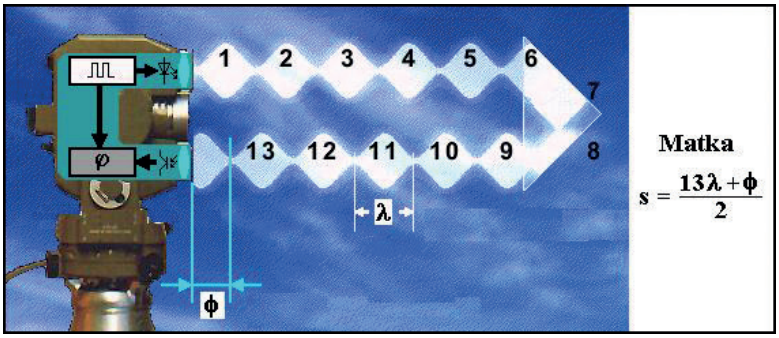
Etäisyys voidaan määrittää myös pulssimoduloidun signaalin avulla. Tällöin etäisyysmittari muodostaa hyvin lyhytkestoisen valopulssin, jonka kulkuaika mitataan. Pulssimodulointia käytetään ilman prismaa mittaavissa takymetreissä, vapaan käden etäisyysmittareissa ja laserkeilaimissa. Vapaan käden etäisyysmittarit ovat kojeita, joita ei pystytetä jalustalle. Niitä käytetään muun muassa erilaisissa sisätilamittauksissa. (Kuva 217 b.)




**KUVA 217** *Elektro-optinen etäisyydenmittaus perustuu joko a) amplitudimoduloituun tai b) tai pulssimoduloituun mittaussignaaliin, joka heijastuu mittauspisteellä olevasta prismasta tai suoraan kohteesta. (Scherer 1999.)*

Amplitudimoduloidusta signaalista mitattava matka saadaan vaihe-eromittauksella. Mittauksessa lasketaan signaalin edestakaisin kulkemaan matkaan sisältyvien kokonaisten aallonpituuksien lukumäärä ja osa-aallonpituus eli vaihe-ero. Osa-aallonpituus aiheutuu siitä, että matka ei yleensä ole aallonpituuden kokonaislukukerrannainen. Osa-aallonpituuden mittaus on yksinkertainen toimenpide. Se mitataan esimerkiksi pulssilaskimella. Kokonaisten aallonpituuksien määrittäminen on ongelmallisempaa. Määritys tehdään useimmissa kojeissa dekadisten taajuuksien avulla. Mittauksessa käytetyt taajuudet ja aallonpituudet ovat toisiinsa nähden kymmenkertaisia. Mittaus aloitetaan karkealla mittauksella, jossa käytetään niin pitkää yksikköjanaa, että osa-aallonpituus määrittää mitattavan matkan yksikäsitteisesti. Tämän jälkeen aallonpituutta lyhennetään vaiheittain. Lopullinen mittaus eli hienomittaus tehdään mahdollisimman lyhyellä yksikköjanalla. Vaihe-

eromittaus on kokonaisuutena melko monimutkainen asia ja sen suorittamiseen kuluu kojeelta aikaa jopa useita sekunteja. Lopputulos, jonka koje näyttää, on keskiarvo tuhansista mittauksista. (Kuva 218.)




**KUVA 218** *Vaihe-eromittauksessa määritetään mitattavaan matkaan sisältyvät kokonaiset mittausaallon aallonpituudet (λ) ja osa-aallonpituus eli vaihe-ero (φ). Alkuperäinen mittaus antaa matkan kaksinkertaisena, jonka vuoksi tulos jaetaan kahdella. Mittausaallon aallonpituuden puolikasta (λ/2) kutsutaan yksikköjanaksi. (Scherer 1999.)*

Pulssimoduloituun signaaliin perustuva etäisyydenmittaus on yksinkertaisempaa kuin vaihe-eromittaus. Siinä on kyse mittaussignaalin kulkuajan määrittämisestä. Koska mittaussignaali etenee valon nopeudella (c on noin 300000 km/s = $3 \times 10^8$ m/s), tarvitaan kulkuajan mittaukseen erittäin tarkkaa kellolaitetta.

Elektro-optisen etäisyydenmittauksen tarkkuus on tyypillisesti 1–3 mm. Laitevalmistajat antavat mittauksen tarkkuuden muodossa

***a*** mm + ***b*** ppm, esimerkiksi 3 mm + 3 ppm,

jossa $a$ on tarkkuuden matkasta riippumaton osa ja $b$ on tarkkuuden matkasta riippuva osa, jonka ”yksikkö” on ppm (1 ppm = $10^{-6}$).

Matkasta riippumattomat virheet ($a$) liittyvät vaihe-eromittaukseen ja kojeen ja prisman erilaisiin nollapistevirheisiin. Matkasta riippuvat virheet ($b$) liittyvät sääkorjaukseen ja mittaustaajuuden vaihteluihin. Tarkkuus ilmaisee todennäköisten virheiden arvioidun suuruuden. Kun oletetaan, että osavirheet kuvaavat satunnaisia virheitä, on etäisyyshavainnon arvioitu virhe satunnaisten virheiden yhdistämissäännön perusteella

$$\sigma_s = \sqrt{a^2 + (bL)^2}, \qquad (134)$$

jossa $\sigma_s$ on mitatun etäisyyden arvioitu keskihajonta, $a$ on tarkkuuden matkasta riippumaton osa, $b$ on tarkkuuden matkasta riippuva osa ja $L$ on mitattu matka.

### 7.2.6 Tehtäviä

**163.** Tunnista kulmayksikkö ja perustele ratkaisu, kun a) kolmion kulmat ovat 36.5668, 79.0054 ja 64.4278, b) suuntakulma on $t_{12}$ = 204.5702 ja käännetty suuntakulma on $t_{21}$ = 4.5702, c) sin 4.56899 = −0.989736, d) kojeen I-asennossa mitattu pystykulma on 103.4032 ja II-asennossa mitattu pystykulma on 296.5968, e) Kojeen I-asennossa mitattu vaakasuunta on 99.2345 ja II-asennon vaakasuunta on 279.2345.

**164.** Mitä etäisyydenmittaustapoja mittaus- ja kartoitustekniikassa käytetään?

**165.** Miksi yksikköjana on puolet mittausaallon aallonpituudesta?

**166.** Takymetrin etäisyysmittarin arvioitu keskihajonta on laitevalmistajan ilmoituksen mukaan 3 mm + 2 ppm. Jos tällä kojeella mitataan a) 200 m, b) 600 m ja c) 1200 m matkat, mitkä ovat mittaustulosten virheiden arvioidut keskihajonnat?

**167.** Jos edellisessä tehtävässä kukin matka mitataan kymmenen havainnon keskiarvona, mitkä ovat keskiarvojen arvioidut keskihajonnat (keskiarvon keskihajonnan kaava 10, s. 37). Millä ehdolla keskiarvon virheet käyttäytyvät keskiarvon keskihajonnan kaavan osoittamalla tavalla?

## 7.3 Takymetrin orientointi

### 7.3.1 Keskistys ja tasaus

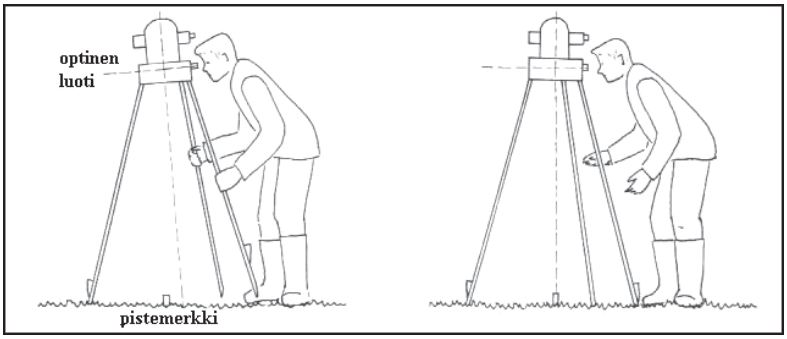
Takymetrillä tehtävien mittausten aloitustoimenpiteitä ovat kojeen ja tähysten keskistys ja tasaus mittauspisteille, koje- ja tähyskorkeuksien mittaaminen ja kojeen orientointi koordinaatistoon ja korkeusjärjestelmään. Näiden toimenpiteiden jälkeen takymetrillä voidaan tehdä kulmien ja etäisyyksien mittauksia ja erityisesti orientoinnin jälkeen sijaintimittauksia mittauspaikan koordinaatistossa ja korkeusjärjestelmässä. (Kuva 219, s. 253.)

**KUVA 219** *Kun takymetri keskistetään ja tasataan, sen vaakakulmakehä asetetaan vaakatasoon ja kojeen pystyakseli laitetaan kulkemaan maanpinnalla olevan pistemerkin kautta. Kuvan kojetta ei ole vielä keskistetty ja tasattu.*

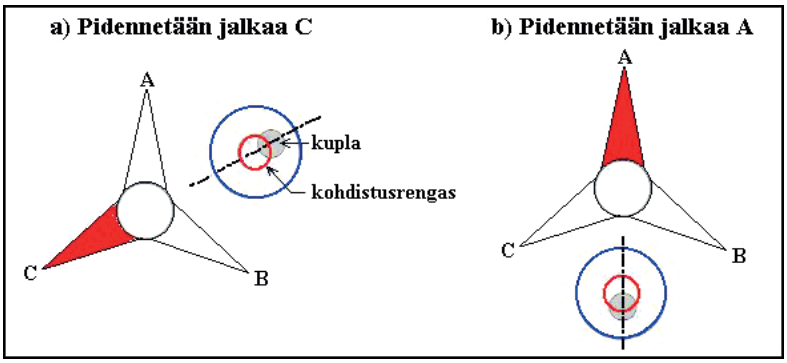
Ensiksi koje keskistetään ja tasataan. Tällöin takymetri tai tähys asetetaan niin, että koje tulee vaakasuoraan. Samalla kojeen pystyakseli tulee pystysuoraan ja kulkee maanpinnalla olevan pistemerkin kautta. Keskistys ja tasaus suoritetaan optista luotia ja tasaimia apuna käyttäen. Optisella luodilla seurataan kojeen asentoa pistemerkin ja tasaimilla vaakatason suhteen. Kojeen asentoa säädetään kolmijalan jalkojen ja tasausalustan jalkaruuvien avulla. Optisen luodin asemasta keskistys voidaan suorittaa myös riippuluodin avulla, mutta optinen luoti on riippuluotiin nähden tarkempi keskistyslaite (kuva 194, s. 232).

Kojeen tai tähyksen keskistys ja tasaus optista luotia käyttäen suoritetaan seuraavasti:

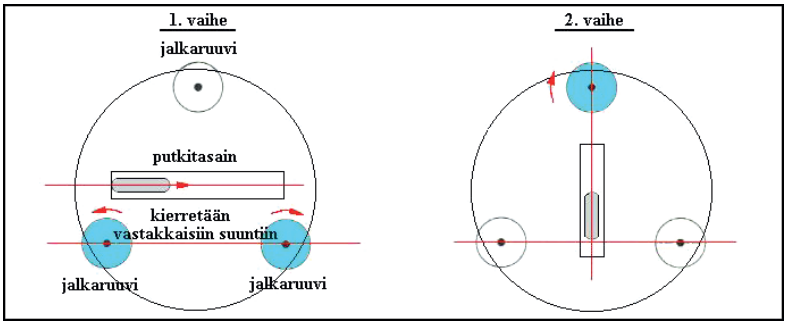
1. Keskistys ja tasaus aloitetaan asettamalla jalusta mahdollisimman tarkasti pisteen päälle. Jalat poljetaan tukevasti maahan. Jalustan pöytälevy asetetaan silmämääräisesti vaakasuoraan.
2. Koje kiinnitetään jalustaan. Optinen luoti ja sen kohdistusmerkki säädetään havaitsijan silmälle sopivaksi. Optisen luodin kaukoputkessa ovat samanlaiset säädöt kuin mittauskaukoputkessakin.
3. Jos pistemerkki ei ole luodin näkökentässä, jalustan kahta jalkaa siirretään, kunnes pistemerkki tulee esille (kuva 220, s. 255).
4. Tasausalustan jalkaruuveilla säädetään luodin kohdistusmerkki täsmälleen pistemerkin päälle.
5. Tasausalustassa oleva rasiatasain tasataan jalustan kahta jalkaa säätämällä. Tasaus aloitetaan jalalla, jonka suunnassa tasaimen kupla poikkeaa eniten keskiasennosta. (Kuva 221, s. 255.)
6. Vaikka kolmijalan jaloilla tehtävä tasaus ei vaikuta juurikaan kojeen keskistykseen, on kuitenkin hyvä tarkistaa keskistys tässä vaiheessa. Jos keskistys ei ole kunnossa, kojeen kiinnitysruuvi avataan, katsotaan optiseen luotiin ja siirretään kojetta pöytälevyllä kiertämättä sitä pöytälevyn suhteen, kunnes luodin kohdistusmerkki osuu taas pistemerkin päälle.
7. Seuraavaksi koje tasataan tarkasti putkitasaimen ja tasausalustan jalkaruuvien avulla. Putkitasain asetetaan kahden jalkaruuvin suuntaiseksi. Tasaimen kupla säädetään keskelle kiertämällä kumpaakin jalkaruuvia yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin. Tasainta käännetään ¼-kierrosta (90°), jolloin se osoittaa kolmannen jalkaruuvin suuntaan. Tasaimen kupla säädetään keskelle kolmatta jalkaruuvia vääntämällä. (Kuva 222, s. 255.)
8. Tarkastetaan vielä tasauksen säilyminen lähtöasennossa. Putkitasain kierretään taas kahden jalkaruuvin suuntaiseksi. Tasausta korjataan tarvittaessa, kunnes tasaimen kupla pysyy keskellä molemmissa tasausasennoissa.
9. Tasauksen jälkeen tarkastetaan kojeen keskistys optisen luodin avulla. Jos luoti on siirtynyt pistemerkin päältä, avataan kojeen kiinnitysruuvi ja siirretään kojetta pöytälevyllä, kunnes luodin kohdistusmerkki osuu täsmälleen pistemerkin päälle.
10. Lopuksi tarkistetaan kojeen tasaus. Samalla tarkastetaan putkitasaimen näytön oikeellisuus. Kun tasain on kahden jalkaruuvin suunnassa ja tasattu, sitä käännetään 180°. Jos se on edelleen tasattu, se on kunnossa, mutta jos tasaimen kupla poikkeaa keskiasennosta, sitä tulee säätää.




**KUVA 220** *Jos pistemerkki ei osu jalustan pystytyksen jälkeen optisen luodin näkökenttään, kojetta siirretään kolmijalan kahta jalkaa siirtämällä, kunnes pistemerkki näkyy luodin näkökentässä. (Ternryd – Lundin 1970, s. 23.)*




**KUVA 221** *Karkea tasaus tehdään kolmijalan jalkojen pituuksia muuttamalla. Kojeen asentoa vaakatason suhteen seurataan rasiatasaimesta. a) Tasaus aloitetaan jalalla, jonka suunnassa tasain poikkeaa eniten (kuvassa jalka C). Jalkaa säädetään kunnes kupla asettuu jonkin toisen jalan suuntaan. b) Tasaus viimeistellään toista jalkaa säätämällä.*



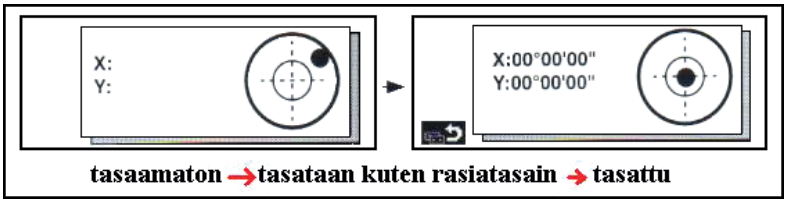

**KUVA 222** *Tarkka tasaus tehdään putkitasaimen ja jalkaruuvien avulla. 1. vaiheessa putkitasain tasataan kahden jalkaruuvin suunnassa kumpaakin jalkaruuvia vastakkaisiin suuntiin yhtä paljon kiertämällä. 2. vaiheessa putkitasain käännetään 90° kolmannen jalkaruuvin suuntaiseksi ja tasataan kolmannella jalkaruuvilla.*

Keskistys ja tasaus tehdään niin huolellisesti, että optisen luodin ja tasainten näyttämän perusteella ei ole säätötarvetta havaittavissa. Mittausten aikana seurataan kojeen asentoa silmävaraisesti ja/tai automatiikkaan hyväksikäyttäen. Tarvittaessa kojeen asentoa korjataan.

Vaikka keskistys ja tasaus on monivaiheinen ja kirjallisena kuvauksena pitkä toimenpidesarja, sen suorittaminen ei vie paljon aikaa. Keskistys ja tasaus ovat tarkan mittauksen perusedellytyksiä. Jos optinen luoti on kunnossa, keskistys pystytään suorittamaan noin 1 mm:n tarkkuudella eli keskistyksen keskihajonta optista luotia käytettäessä on noin 1 mm.

Kolmijalalle pystytettävä prisma (kuva 210 b, s. 244) joudutaan usein keskistämään ja tasaamaan pelkän rasiatasaimen avulla. Tällöin sen asentoa seurataan vain rasiatasaimen avulla, mutta muutoin menetellään edellä kuvatulla tavalla.

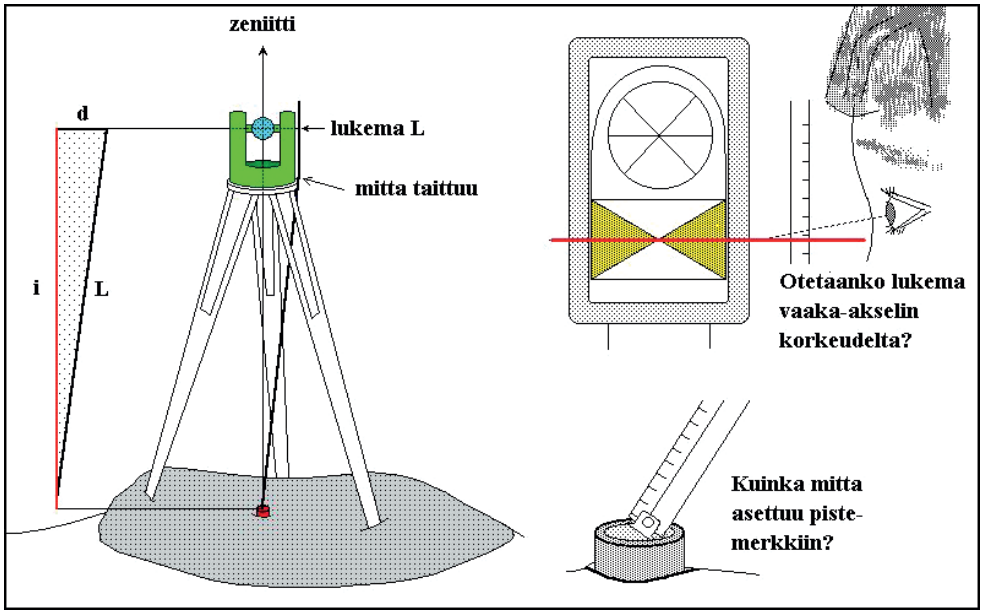
Nykyaikaisissa takymetreissä ei ole välttämättä putkitasainta, jos se on korvattu sähköisellä tasaimella. Ja vaikka takymetrissä olisikin putkitasain, siitä löytyy myös sähköinen tasain. Tällöin tarkka tasaus voidaan tehdä sähköisen tasaimen avulla. (Kuva 223.)




**KUVA 223** *Takymetrin sähköinen tasain voi näyttää kojeen näytössä esimerkiksi tällaiselta. Sähköisen tasaimen ja jalkaruuvien avulla tehdään kojeen tarkka tasaus. Periaate on sama kuin vaaituskojeen tasauksessa.*

### 7.3.2 Kojekorkeuden mittaus

Kun takymetrillä mitataan kohteiden korkeuksia, tulee tuntea kojeen ja tähysten korkeudet. Kojekorkeudet mitataan yleensä taskumitalla. Koje- ja tähyskorkeuksien mittaaminen on jossain määrin epämääräinen toimenpide, koska taskumitalla ei voida mitata suoraan kojeen vaaka-akselin ja pistemerkin välistä pystysuoraa etäisyyttä. Kuitenkin esimerkiksi runkomittauksissa kojekorkeudet tulisi mitata noin 1 mm:n tarkkuudella. Tämä edellyttää huolellista mittausta ja mitatun vinomitan korjaamista pystysuoraksi etäisyydeksi. (Kuva 224, s. 257.)

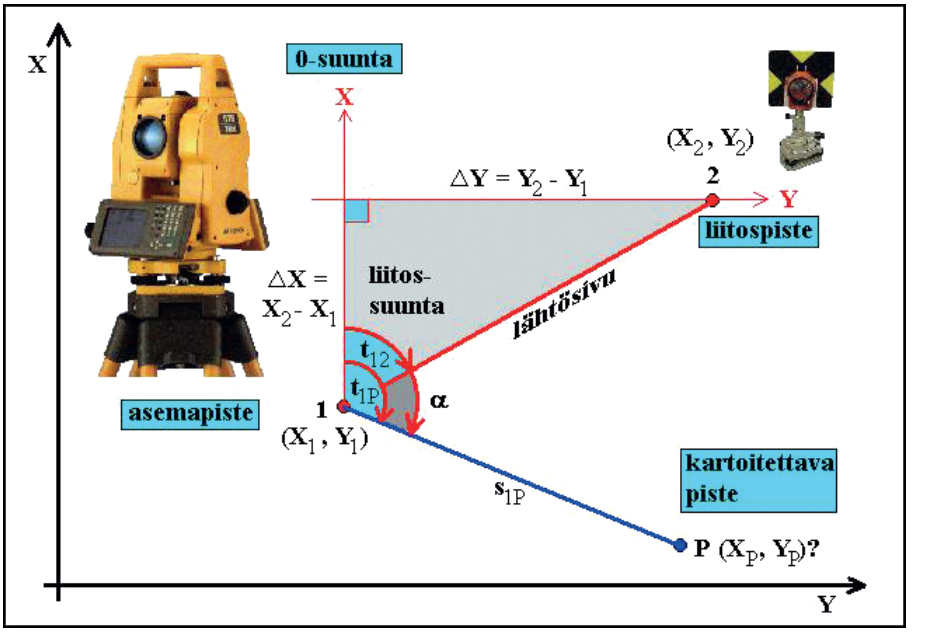



**KUVA 224** *Koje- tai tähyskorkeus on kojeen tai tähyksen vaaka-akselin pystysuora etäisyys (i) pistemerkistä. Se mitataan yleensä taskumitalla. Kojekorkeuden mittaus ei ole aivan yksinkertainen toimenpide. Sen suorittamiseen liittyy useita virhemahdollisuuksia.*

### 7.3.3 Orientointi tunnetulle pisteelle

Orientointi tarkoittaa mittauspaikan koordinaatiston ja korkeustason määrittelyä. Tämä on edellytys koordinaattimuotoisten mittausten tekemiselle. Koordinaatisto voidaan määritellä, jos mittauspaikalla on vähintään kaksi tasorunkopistettä. Orientointi voidaan suorittaa seuraavasti (kuva 225, s. 258):

1. Takymetri pystytetään tunnetulle pisteelle, jota kutsutaan asemapisteeksi.
2. Toiselle tunnetulle pisteelle, jota kutsutaan liitospisteeksi, viedään tähys.
3. Kaukoputki tähdätään liitospisteellä olevaan tähykseen.
4. Tähtäyksen vaakakehälukemaksi asetetaan koordinaateista laskettu suuntakulma.




**KUVA 225** *Takymetrin orientointi kahden tunnetun pisteen avulla. Pistettä, jolle takymetri pystytetään, kutsutaan asemapisteeksi. Toinen tunnettu piste on liitospiste, jolle pystytetään tähys. Orientoinnin jälkeen takymetrin vaakakehältä voidaan havaita tähtäyssuuntia, jotka ovat koordinaatiston pohjoissuunnasta mitattuja suuntakulmia. Suuntakulmia ja etäisyyksiä mittaamalla voi edelleen määrittää kartoitettavien pisteiden sijainti.*

Orientoinnissa keskeinen toimenpide on liitossuunnan määrittäminen. Liitossuunta on suuntakulma asemapisteeltä liitospisteelle. Matematiikan näkökulmasta kysymys on suuntakulman laskemisesta eli geodeettisesta käänteistehtävästä. Liitossuunta lasketaan seuraavasti:

$$\begin{cases} \Delta X = X_2 - X_1 \\ \Delta Y = Y_2 - Y_1 \end{cases} \tag{135}$$

$$t_{12} = \arctan\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right) = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right). \tag{136}$$

Kaavoissa $t_{12}$ on liitossuunta pisteeltä 1 pisteelle 2, $X_1$ ja $Y_1$ ovat asemapisteen koordinaatit, $X_2$ ja $Y_2$ ovat liitospisteen koordinaatit, $\Delta X$ on X-koordinaattien erotus ja $\Delta Y$ on Y-koordinaattien erotus.

Mittauspaikan korkeustason määrittelyyn riittää, että tunnetaan asemapisteen korkeus ja kojekorkeus. Jos asemapisteen korkeutta ei tunneta, voidaan korkeus siirtää kojeeseen joltakin lähistöllä olevalta korkeuspisteeltä.

Orientointi suoritetaan takymetrissä tai maastotallentimessa olevien mittausohjelmien avustuksella. Eri kojemalleissa on hieman toisistaan poikkeavia ohjelmarutiineja orientointia varten. Orientoinnin yhteydessä määritetään mittaushavaintoihin tehtävät säätilaan ja karttaprojektioon liittyvät korjaukset.

Koska orientointi vaikuttaa sen jälkeen tehtävien mittausten luotettavuuteen ja tarkkuuteen, on orientointi syytä tarkistaa kartoittamalla heti orientoinnin jälkeen jokin tunnettu piste. Jos muita tunnettuja pisteitä ei ole lähettyvillä, voidaan kartoittaa orientoinnin liitospiste. Jos mitatut koordinaatit ovat riittävän täsmällisesti samat kuin tunnetut koordinaatit, voidaan orientointi hyväksyä. Orientoinnin luotettavuutta voidaan parantaa käyttämällä mittauksissa useampaa kuin kahta runkopistettä.

Kun takymetri on orientoitu, voidaan sillä mitata kohteiden koordinaatteja säteittäisellä mittauksella. Matematiikan näkökulmasta kyseessä on geodeettinen päätehtävä, joka voidaan esittää seuraavasti:

$$\begin{cases} X_P = X_1 + s_{1P}\cos t_{1P} \\ Y_P = Y_1 + s_{1P}\sin t_{1P} \end{cases}, \tag{137}$$

jossa $X_1$ ja $X_2$ ovat asemapisteen koordinaatit, $X_\mathrm{P}$ ja $Y_\mathrm{P}$ ovat määritettävän pisteen koordinaatit, $s_{1\mathrm{P}}$ on määritettävälle pisteelle mitattu vaakamatka ja $t_{1\mathrm{P}}$ on määritettävälle pisteelle mitattu suuntakulma.

Kohteen korkeuden mittauksessa on kyse trigonometrisesta korkeudenmittauksesta. Mittauksen lopputulos voidaan esittää kaavalla

$$H_2 = H_1 + v\cos z + i - m, \tag{138}$$

jossa $H_1$ on asemapisteen korkeus, $H_2$ on määritettävän pisteen korkeus, $v$ on vinoetäisyys määritettävälle pisteelle, $z$ on pystykulma määritettävälle pisteelle, $i$ on kojekorkeus ja $m$ on tähyskorkeus.

Säteittäinen mittaus ja trigonometrinen korkeudenmittaus ovat takymetrimittauksen perusmenetelmiä kartoitus-, maastomalli- ja merkintämittauksissa. Säteittäisellä mittauksella määritetään kohteen tasokoordinaatit ($X$, $Y$) ja trigonometrisella korkeudenmittauksella kohteen korkeus ($H$).

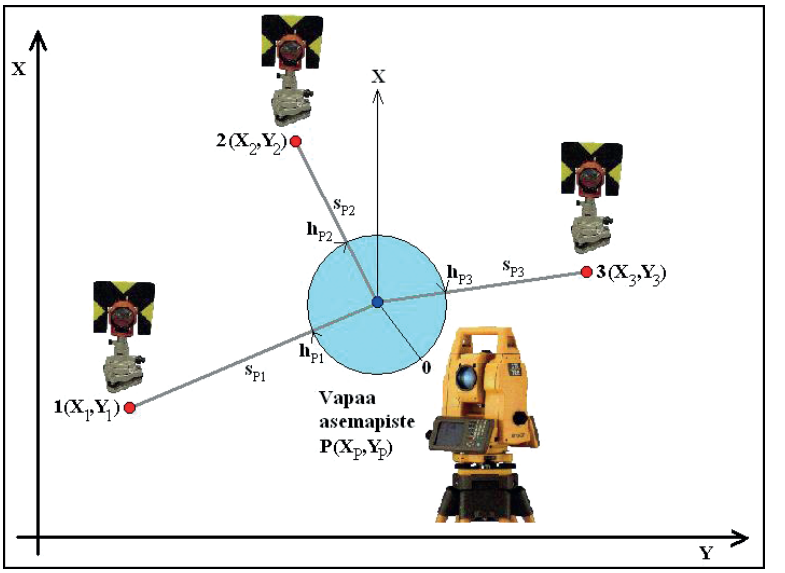
### 7.3.4 Orientointi vapaalle asemapisteelle

Vapaan asemapisteen käyttö mittauksissa tarkoittaa menettelyä, jossa takymetri pystytetään sijainniltaan tuntemattomaan paikkaan. Asemapisteen koordinaatit

ja korkeus määritetään tähtäämällä liitospisteisiin. Kun koje on laskenut asemapisteen koordinaatit ja orientoinut vaakakehänsä koordinaatiston pohjoissuunnan suhteen, suoritetaan varsinainen mittaustyö. Vapaan asemapisteen menetelmää käytetään yleisesti kartoitus- ja merkintämittauksissa, koska asemapisteen paikka voidaan valita mittausten kannalta tarkoituksenmukaisesti.

Vapaan asemapisteen koordinaatit voidaan laskea, kun mitataan etäisyydet vähintään kahteen liitospisteeseen tai tähtäyssuunnat vähintään kolmeen liitospisteeseen. Ensin mainitussa tapauksessa on kyse kaarileikkaukseksi kutsutusta mittauksesta. Jälkimmäistä mittausta kutsutaan taaksepäinleikkaukseksi. (Kuva 226, s. 226)

Vapaata asemapistettä käytetään runkopisteen tapaan, vaikka sitä ei merkittäisikään pysyvästi. Runkopisteiden mittauksissa kiinnitetään erityistä huomiota mittauksen laadun varmistamiseen. Tämän vuoksi havaintoja toistetaan ja tehdään ylimääräisiä havaintoja. Suunta- ja pystykulmahavainnot voidaan tehdä kummassakin kojeasennossa. Jos liitospisteitä on kaksi tai kolme, tulee niihin luotettavuuden vuoksi mitata sekä suunnat että etäisyydet. Pelkkiä suuntahavaintoja voidaan käyttää, kun liitospisteitä on enemmän kuin kolme. Näin meneteltäessä tehdään ylimääräisiä havaintoja. Ylimääräiset havainnot aiheuttavat sen, että vapaan asemapisteen laskentaa ei voida suorittaa yksikäsitteisesti geodeettisen laskennan perusmenetelmillä. Ylimääritetyn vapaan asemapisteen laskennassa käytetään joko Helmertin muunnosta tai pienimmän neliösumman periaatteen mukaista tasoitusta.



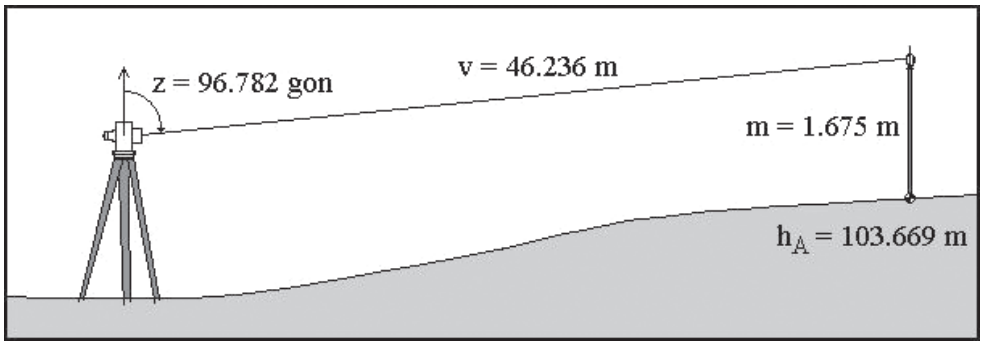

**KUVA 226** *Vapaan asemapisteen koordinaatit ($X_P$ ja $Y_P$) voidaan määrittää vähintään kahden liitospisteen avulla. Mittauksen luotettavuutta voidaan parantaa käyttämällä useampaa kuin kahta liitospistettä. Liitospisteille mitataan sekä suunnat että etäisyydet.*

## 7.3.5 Tehtäviä

**168.** Asemapisteeltä mitattiin säteittäisellä mittauksella neljän pisteen koordinaatit. Laske pisteiden koordinaatit ja piirrä mittauksen havainnekuva johonkin täsmälliseen mittakaavaan. Asemapisteen (Ap) koordinaatit olivat $X_{Ap}$ = 6875116.097 m ja $Y_{Ap}$ = 2542874.306 m, liitospisteen (Lp) koordinaatit olivat $X_{Lp}$ = 6875034.690 m ja $Y_{Lp}$ = 2542769.192 m ja orientoimattomat havainnot olivat:

| Tp | Suunta / gon | Vaakamatka [m] |
|---|---|---|
| Lp | 067.8009 | |
| 1 | 131.2192 | 53.205 |
| 2 | 173.6077 | 88.328 |
| 3 | 263.0615 | 96.703 |
| 4 | 325.7439 | 74.420 |

**169.** Laske seuraavan kuvan mittaustilanteessa takymetrin vaaka-akselin korkeus (kuva 227).




**KUVA 227** *Tehtävä 169: korkeuden siirto takymetrin vaaka-akselille.*

**170.** Kuinka monta ylimääräistä havaintoa tehdään kuvan 226 (s. 260) esittämässä vapaan asemapisteen määrityksessä. Havaintoina ovat vaakasuunnat ($h_1$, $h_2$ ja $h_3$) ja vaakamatkat ($s_1$, $s_2$ ja $s_3$) kolmelle runkopisteelle. Havainnoista lasketaan vapaan asemapisteen koordinaatit.

## 7.4 Takymetrimittaukset

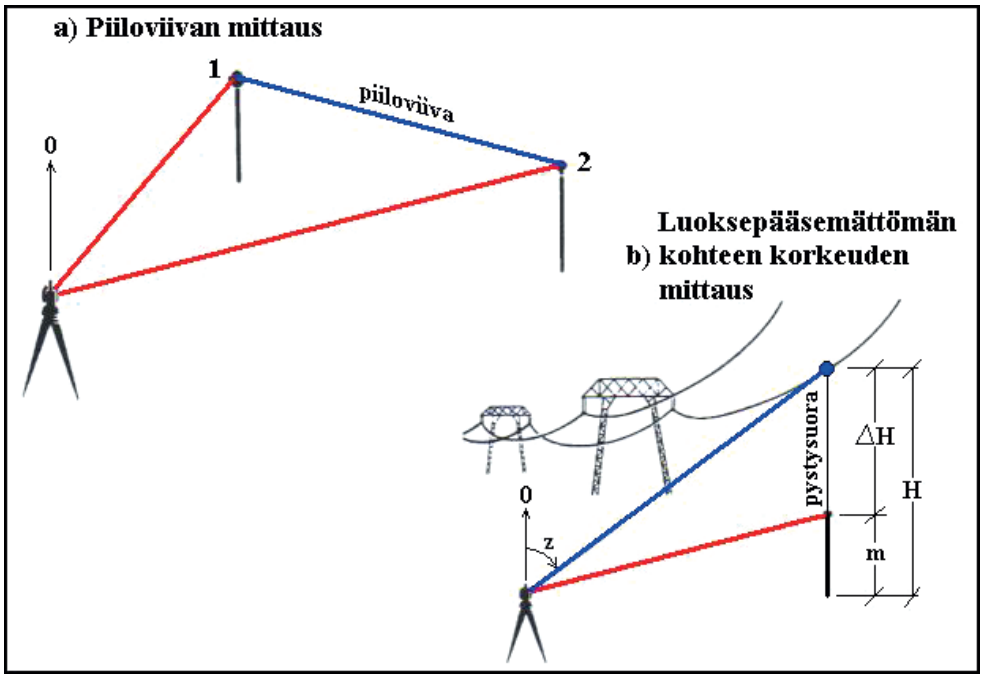
### 7.4.1 Piiloviiva ja luoksepääsemätön kohde

Vaakasuunnat, pystykulmat ja etäisyydet ovat takymetrillä suoraan havaittavia suureita. Näistä havainnoista voidaan laskennallisesti johtaa muita suureita, kuten kohteiden koordinaatteja ja korkeuksia. Seuraavaksi tarkastellaan lyhyesti, yleisellä tasolla, takymetrillä tehtäviä välillisiä mittauksia ja niihin perustuvia laajempia mittaustehtäviä. Kyse on osaksi käsitteistä ja osaksi mittaus- ja kartoitustekniikan perustehtävistä eli kartoitus-, maastomalli- ja merkintämittauksista.

Piiloviivan mittaus ja luoksepääsemättömän kohteen mittaus ovat useimpien takymetrien vakiotoimintoja. Piiloviivan mittaus tarkoittaa pisteiden välisen etäisyyden ja korkeuseron mittaamista niin, että mittaus tehdään pisteiden välisen yhdysjanan ulkopuolelta. Mittaus voidaan tehdä, vaikka pisteiden välillä ei olekaan näköyhteyttä. Tämän vuoksi puhutaan piiloviivasta. Korkealla sijaitsevan kohteen korkeus ja myös tasosijainti voidaan mitata asettamalla prisma kohteen kautta kulkevalle pystysuoralle kohteen alapuolelle. Ensiksi mitataan prismaan pystykulma ja vinomatka. Sitten siirretään tähtäys varsinaiseen mittauskohteeseen, johon mitataan pystykulma. (Kuva 228, s. 263.)

### 7.4.2 Kartoitusmittaukset

Perinteisen määritelmän mukaan kartta on mittakaavan mukaisesti pienennetty, yleistetty, merkeiltään selitetty ja lisätiedoin täydennetty tasokuva alueesta. Kartoilla kuvataan siis ensisijaisesti valittujen kohteiden tasosijaintia. Laaja-alaiset kartoitukset tehdään pääosin kaukokartoituksen keinoin, mutta karttoja joudutaan täydentämään ja tarkastamaan maastossa takymetri- ja satelliittimittausta käyttäen. Pienten alueiden, esimerkiksi yksittäisen rakennustyömaan, kartoituksia voidaan tehdä pelkästään maastomittauksin. Myös erityistä tarkkuutta vaativat kartoitukset tehdään maastossa, koska maastomittaukset ovat yleisesti ottaen tarkempia kuin kaukokartoituksen keinoin tehdyt mittaukset.




**KUVA 228** *Takymetrin vakiotoimintoja. a) Kun takymetrillä mitataan kahden pisteen välimatka ja korkeusero niiden muodostaman sivun ulkopuolelta, niin puhutaan piiloviivan mittauksesta. b) Luoksepääsemättömän kohteen korkeuden mittauksesta on kyse silloin, kun mitataan prisman kanssa samalla pystysuoralla olevien kohteiden korkeuksia. Mittaus antaa myös luoksepääsemättömän kohteen koordinaatit.*

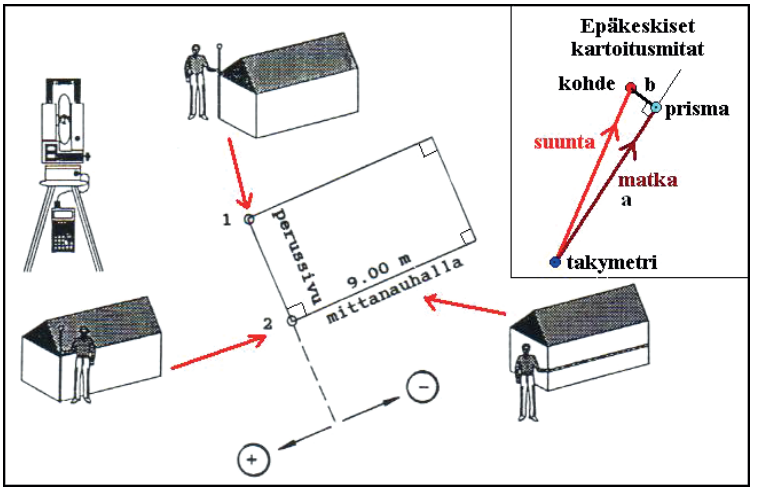
Takymetrillä kartoitettaessa mittausmenetelmänä on tasosijainnin osalta säteittäinen mittaus ja korkeuden osalta trigonometrinen korkeudenmittaus. Mittaukset tallennetaan sähköiseen muotoon ja käsitellään jollakin laskenta- ja kartoitusohjelmalla kartan muotoon.

Mittausten tiedonhallinnan kannalta on tärkeää koodata mittaushavainnot. Usein koodauksessa käytetään neljää tunnusta, jotka ovat pintatunnus, viivanumero, lajikoodi ja pistenumero. Pintatunnus kertoo sijaitseeko piste esimerkiksi maan vai kallion pinnalla. Saman viivan, esimerkiksi tien keskilinjan, pisteille annetaan sama viivanumero. Lajikoodi luokittelee kohteen. Se kertoo muun muassa, että piste kuuluu aitaan tai, että kohteessa on lämmitystolppa. Lajikoodi myös määrittelee kartoitusohjelmassa kohteen kuvaustekniikan eli piirtoasetukset. Pistenumero on yksinkertaisesti pisteen yksilöivä tunnusnumero. (Taulukko 11, s. 264.)

**TAULUKKO 11** *Rovaniemen kaupungin käyttämiä lajikoodeja.*

| Koodi | Kohteen kuvaus | Koodi | Kohteen kuvaus |
|---|---|---|---|
| 703 | Aita | 1180 | Porttaali |
| 702 | Aita kivi | 3100 | Puhelinjakokaappi |
| 601 | Ajoradan reuna | 3000 | Puhelinkioski |
| 218 | Apupiste | 8837 | Purkuputkenpää sv |
| 1181 | Asfaltti | 1101 | Pylväsmuuntaja |
| 1193 | Auton lämmitystolppa | 1187 | Pysäköintimittari |
| 710 | Avokallio | 632 | Päällysteen reuna |
| 8900 | Epäselvä kaivo | 619 | Raide |

Kartoitusmittausten suorittamisen osalta tarkastellaan esimerkkinä erästä yksinkertaista mittaustilannetta. Mittauksessa on kyse suorakulmaisen rakennuksen nurkkien kartoittamisesta. Takymetriä käyttävälle mittaajalle näkyy vain kaksi rakennuksen nurkkaa, jotka hän mittaa aluksi takymetrillä. (Kuva 229.)



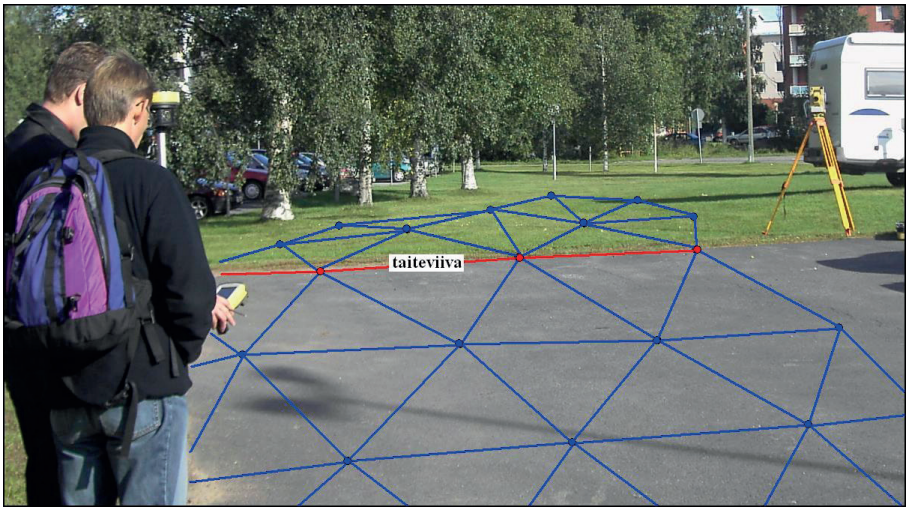

**KUVA 229** *Esimerkki yksinkertaisen suorakaiteenmuotoisen rakennuksen kartoittamisesta. Takymetrillä voidaan mitata ainoastaan kojeelle näkyvät nurkat 1 ja 2. Ne kiinnittävät rakennuksen koordinaatistoon. Rakennuksen taakse jäävät nurkat mitataan mittanauhalla olettaen rakennus suorakulmaiseksi. Prismaa ei aina voi asettaa mittauskohteeseen, jolloin kohde joudutaan havaitsemaan epäkeskisesti. Epäkeskisessä kartoitusmittauksessa voidaan soveltaa suorakulmaisen mittauksen periaatetta.*

Mittauksessa voi olla ongelmana se, että prismaa ei voi asettaa riittävän tarkasti suoraan mittauskohteeseen. Tällöin kohde joudutaan mittaamaan epäkeskisesti. Epäkeskisessä mittauksessa prisma asetetaan kohteen sivulle tai eteen, prisman

paikka mitataan takymetrillä ja kohteen paikka prisman ja sen kautta kulkevan tähtäyslinjan suhteen määritetään esimerkiksi suorakulmaisen mittauksen periaatteen mukaisesti. Suorakulmaisen mittauksen periaatetta voidaan soveltaa myös kojeelle näkymättömien rakennuksen nurkkien kartoittamiseen. Kun rakennus oletetaan suorakulmaiseksi ja sen yksi sivu mitataan, piilossa olevat nurkat voidaan laskea takymetrillä mitattujen pisteiden suhteen. Kuitenkin pitää huomata, että oletuksiin ja laskemiseen perustuvien pisteiden tarkkuus ei ole yhtä hyvä kuin mitattujen pisteiden tarkkuus.

### 7.4.3 Maastomallimittaukset

Nykyaikainen tietotekniikkaan tukeutuva rakennustekninen suunnittelu ja ympäristön visualisointi erilaisina kolmiulotteisina kuvina ja esityksinä perustuu maaston ja rakennetun ympäristön kolmiulotteiseen malliin, jota kutsutaan maastomalliksi. Maastomalli sisältää maanpinnan korkeudet jatkuvaksi pinnaksi mallinnettuna ja lisäksi mahdollisesti maalajipintoja ja –ominaisuuksia, rakennuksia, johtotietoja ja maanalaisia tiloja. Mallin muodostamista varten maastossa mitataan malliin tulevien pintojen muotoa kuvaavien pisteiden koordinaatteja ja korkeuksia. Mittausten laskennan yhteydessä pisteet yhdistetään kolmioiksi. Kolmioista muodostuvaa maastomallia kutsutaan kolmioverkkomalliksi. Mallintamisen jälkeen alueelle voidaan laskea esimerkiksi korkeuskäyrät ja erilaisia poikkileikkauksia tai tehdä vaativampiakin tietotekniikan mahdollistamia visualisointeja ja laskentoja. (Kuva 5, s. 6, kuva 92, s. 116 ja kuva 230.)

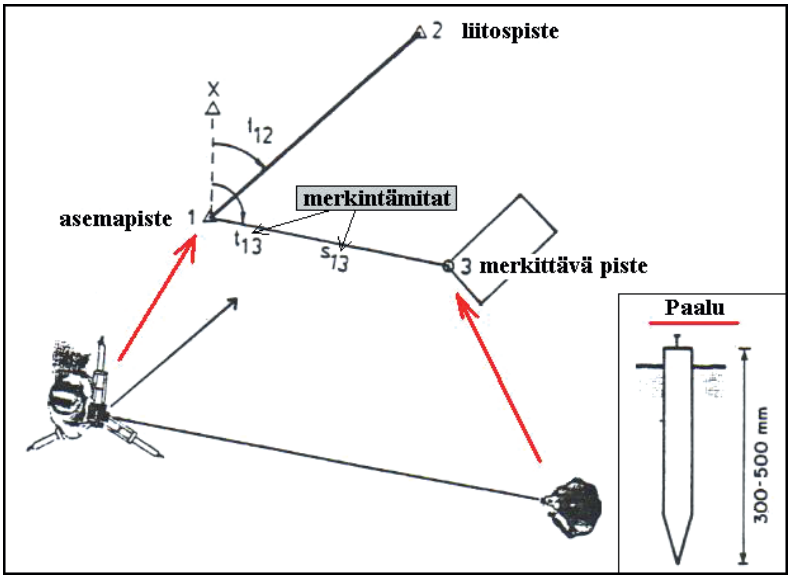



**KUVA 230** *Maastomallin avulla kuvataan maanpinnan muotoja. Taiteviivat ovat tärkeitä mallinnuksen tarkkuuden näkökulmasta. Mallikolmioiden kannat kulkevat pitkin taiteviivaa. Kuvan taiteviivalla tapahtuu pintojen ominaisuuden muutos, kun siirrytään asfaltilta nurmikolle. Yleensä taiteviivat kuvaavat kaltevuuksien muutoskohtia.*

Maastomallia mitattaessa on kartoitusmenetelmästä riippumatta tärkeää mitata taiteviivoja. Ne ovat sellaisia viivamaisia kohteita, joissa tapahtuu pinnan kaltevuuden muutos tai ominaisuuksien muutos. Pinnan kaltevuus muuttuu jyrkästi esimerkiksi ojan penkalla tai pohjalla. Ominaisuuden muutos tapahtuu, kun siirrytään esimerkiksi asfaltilta nurmikolle. Kolmioverkkomallinnuksessa mallikolmioiden kannat sijoitetaan aina taiteviivoille, mikä parantaa mallinnuksen tarkkuutta ja luotettavuutta. (Kuva 230, s. 265.)

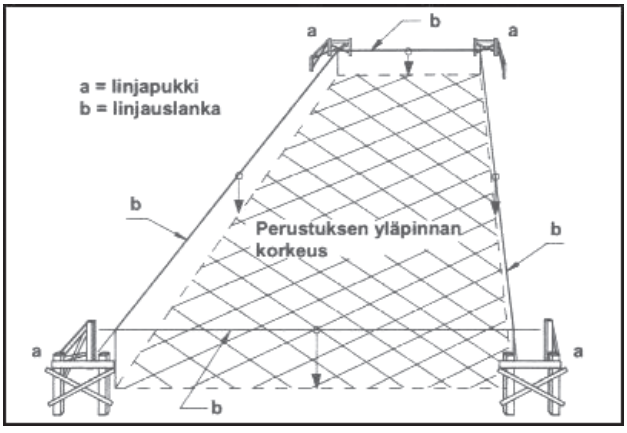
### 7.4.4 Rakentamisen mittaukset

Kartoitus- ja maastomallimittauksia tehdään muun muassa rakennusteknillisen suunnittelun tarpeisiin. Rakennussuunnitelmien toteutuksen yhteydessä tehdään puolestaan merkintä- ja asennusmittauksia. Merkintämittausten lähtökohtana on jokin rakennussuunnitelma, kuten asemapiirros, jossa on kuvattu rakennuskohteen sijainti. Merkintämittausten avulla suunniteltu sijainti merkitään rakennuspaikalle ja rakentaminen tapahtuu tehtyjen merkintöjen suhteen. Tarkkuutensa ja muiden ominaisuuksiensa perusteella takymetri soveltuu erittäin hyvin merkintämittauksiin. Takymetrillä merkintämittauksia tehtäessä mittaus perustuu säteittäiseen mittaukseen. (Kuva 231.)




**KUVA 231** *Takymetrillä merkintämittaukset tehdään säteittäisen mittauksen periaatteella. Suunnitelmatiedot siirretään toimistossa takymetriin tai maastotallentimeen. Takymetri orientoidaan joko tunnetulle tai vapaalle asemapisteelle. Suunnitelmatiedoista lasketaan merkintämitat, kuvassa suuntakulma $t_{13}$ ja vaakamatka $s_{13}$. Mittaaja ohjaa prismamiehen merkintämittojen osoittamaan paikkaan. Haettu sijainti merkitään esimerkiksi puupaalulla ja naulalla. Paalun käytön vuoksi merkintämittauksia kutsutaan usein paalutukseksi.*

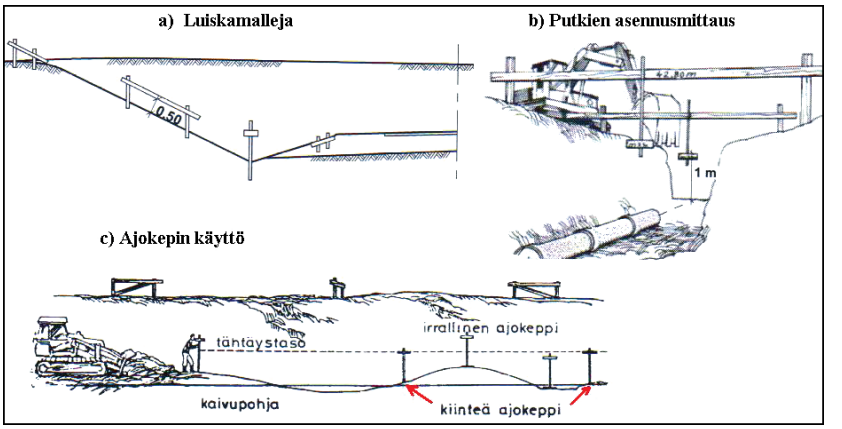
Merkintämittaukset ovat tarkkuutta vaativia ja vastuullisia mittauksia, koska niissä tehdyt virheet voivat aiheuttaa suuria taloudellisia menetyksiä. Ne ovat myös erittäin monipuolisia mittauksia, koska merkintätavat vaihtelevat erilaisissa rakennuskohteissa. Esimerkiksi perinteinen tapa merkitä talon paikka perustuu rakennuspaikan ympärille rakennettaviin linjapukkeihin ja linjalankoihin. Linjapukkien ja –lankojen avulla voidaan merkitä sekä rakennuksen taso- että korkeussijainti niin, että merkinnät säilyvät myös rakennustöiden aikana. (Kuva 232.)




**KUVA 232** *Perinteinen tapa merkitä talon paikka perustuu linjapukkeihin ja linjalankoihin. Linjapukit ovat nurkkapaalujen varamerkkejä, joihin rakennuksen nurkat siirretään linjalankojen avulla. Näin menetellään, koska nurkkapaalut jäävät rakennustöiden alle töiden alettua. Linjapukkien vaakajuoksut (yläpuut) rakennetaan samaan korkeuteen, joten niiden avulla voidaan määrittää rakenteiden korkeustaso. Perinteiset merkintätavat mahdollistavat rakentamisaikaisten mittausten tekemisen yksinkertaisten mittausvälineiden ja –menetelmien avulla.*

Nykyaikaisten mittausohjelmien ja takymetrien käyttö talonrakennustyömailla vähentää perinteisten merkintätapojen käyttöä. Työmaalla tarvittavat runkomittaukset, kartoitukset ja merkintämittaukset voidaan tehdä nopeasti ja tarkasti ilman tilaa vieviä merkintöjä.

Maa- ja tierakentamisen perinteisissä merkinnöissä käytetään muun muassa luiskamalleja ja ajokeppejä. Niiden avulla ohjataan rakentamista erityisesti korkeuden osalta. Maarakentamista ohjaavat merkinnät säilyvät huonosti, joten merkintöjä joudutaan usein uusimaan. Nykyisin maarakentamisessa käytetään jo melko paljon maarakennuskoneiden automaattisia ohjausjärjestelmiä. Automaattisten ohjausjärjestelmien käyttö yleistyy maailmalla ja Suomessa nopeasti. Rakentamisen automatisointi vähentää perinteisten merkintätapojen käyttöä ja tehostaa rakentamisen ohjausta. Automaation myötä mittaajien työt rakennustyömailla muuttuvat. (Kuva 233, s. 268.)



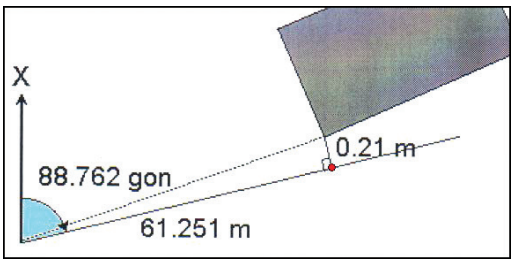

**KUVA 233** *Esimerkkejä maarakentamisen perinteisistä merkintätavoista. a) Luiskamallien avulla ohjataan luiskien ja penkereiden rakentamista. b) Kaivantoon tulevan putken asentamista ohjataan kaivannon yläpuolisiin telineisiin kiinnitettyjen ajorimojen avulla. c) Kaivannon pohjan korkeus voidaan tarkistaa liikuteltavan ajokepin avulla kiinteiden ajokeppien määrittämän tähtäystason suhteen. (Kuvat b ja c, van den Berg – Lindberg 1983, s. 16–17.)*

## 7.4.5 Tehtäviä

**171.** Talon räystään korkeus maanpinnasta mitattiin takymetrillä niin, että asetettiin aluksi prisma pystysuoraan räystään alapuolelle ja siihen mitattiin vinoetäisyys $v$ ja pystykulma $z_1$. Sitten tähdättiin räystään reunaan, jonon mitattiin pystykulma $z_2$. Piirrä havainnekuva mittauksesta. Laske räystään korkeus maanpinnasta, kun $v$ = 32.161 m, $z_1$ = 100.7560 gon, $z_2$ = 98.1378 gon ja prismakorkeus on $m$ = 1.650 m.

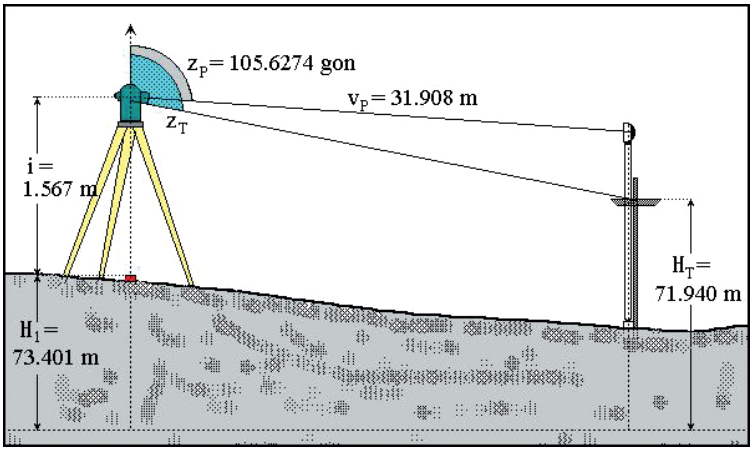
**172.** Miten määritetään luoksepääsemättömän kohteen koordinaatit kuvan 228 b (s. 256, s. 263) esittämässä mittaustilanteessa?

**173.** Rakennuksen nurkka kartoitettiin epäkeskisesti asettamalla prisma sen sivulle. Nurkan ja prisman kautta kulkeva suora oli kohtisuorassa tähtäyslinjaan. Laske nurkan koordinaatit, kun asemapisteen koordinaatit olivat $X$ = 1752.286 m ja $Y$ = 2517.809 m, prismaan tehdyn tähtäyksen suuntakulma oli 88.762 gon, vaakaetäisyys oli 61.251 m ja nurkan kohtisuora poikkeama tähtäyslinjasta oli 0.21 m. (Kuva 234.)




**KUVA 234** *Tehtävä 173.*

**174.** Korkeuden tähtäysmerkki asetettiin paikalleen takymetrillä kuvan esittämällä tavalla. Asemapisteen korkeus oli $H_1$ = 73.401 m ja kojekorkeus oli $i$ = 1.567 m. Takymetrillä havaittiin mittalinjan paalulla olevaan prismaan pystykulma $z_P$ = 105.6274 gon ja vinoetäisyys $v_P$ = 31.908 m. Kuinka paljon kaukoputkea oli käännettävä pystytasossa, jotta tähtäys osui kiinnitysrimaan tavoitekorkeuden $H_T$ = 71.940 m kohdalle? (Kuva 235.)




**KUVA 235** *Tehtävä 174: korkeuden merkintä takymetrillä.*

## 7.5 Laserkeilaus

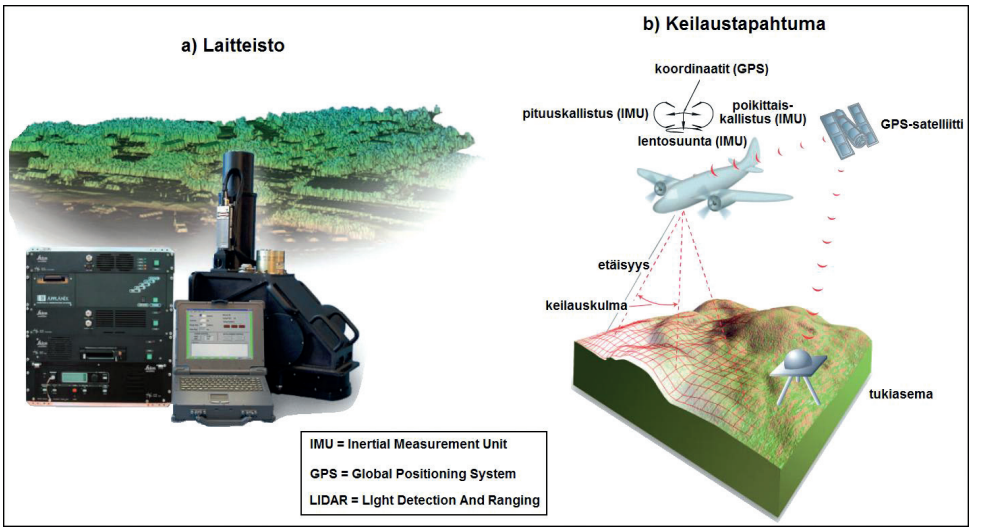
### 7.5.1 Ilmalaserkeilaus

Laserkeilaus perustuu etäisyyden mittaukseen ja mittaussuuntien tarkkaan orientointiin. Mittauslaite on näin ollen tavallaan automaattisesti toimiva takymetri. Ilmasta mitattaessa laserkeilain on kiinnitettynä lentokoneeseen tai helikopteriin. Maassa laserkeilainta käytetään kolmijalalle asennettuna kuten takymetriä, mutta myös liikkuvasta ajoneuvosta tai veneestä voidaan keilata.

Ilmalaserkeilain koostuu keilanosasta, lasertykistä ja ilmaisinosasta. Keilanosa kääntää laserkeilaa. Yleensä keilain pyyhkii kohdetta lentosuuntaan nähden kohtisuorassa suunnassa. Puhutaan kohtisuorasta keilauksesta. Keilaimen avauskulma eli keilauskulma on yleensä 10° - 20°. Kun keilauskulma kasvaa, kasvaa varjoisten alueitten osuus keilauksessa huomattavasti.

Lasertykki lähettää laserpulsseja, jotka osuvat ja kimpoavat takaisin kohteesta. Ilmaisinosa ottaa vastaan takaisin kimmonneet pulssit. Kohteen etäisyys keilaimesta saadaan laskettua pulssin kulkuajan perusteella. Mittaussignaali tuotetaan

yleensä lähi-infrapunaisen valon aallonpituusalueella (1 – 1.5 µm). Etäisyyden lisäksi voidaan kelaimella mitata myös paluusignaalin intensiteetti. Etäisyyksistä saadaan ratkaistua mittauspisteen koordinaatit, kun etäisyyden lisäksi tiedetään lasertykin paikka ja asento. Paikka mitataan satelliittipaikannuksella (GPS/GNSS) ja asento inertiamittausjärjestelmällä (IMU). Mitattujen kohteiden sijaintitarkkuus vaihtelee lentokorkeuden mukaan ja on parhaimmillaan senttimetriluokkaa, mutta tarkkuus on tyypillisemmin desimetriluokkaa. (Kuva 236.)




**KUVA 236** *Laserkeilain Leica ALS 40. Keilauskulma voi olla jopa 75 °, mikä vastaa ilmakuvauskameran avauskulmaa. Lentokorkeuden vaihteluväli on 500 – 6000 m. Mitattujen kohteiden korkeussijainnin tarkkuus vaihtelee välillä 0.15 – 0.50 m ja tasosijainnin tarkkuus välillä 0.15 – 0.75 m. (Leica Geosystems'n esite.)*

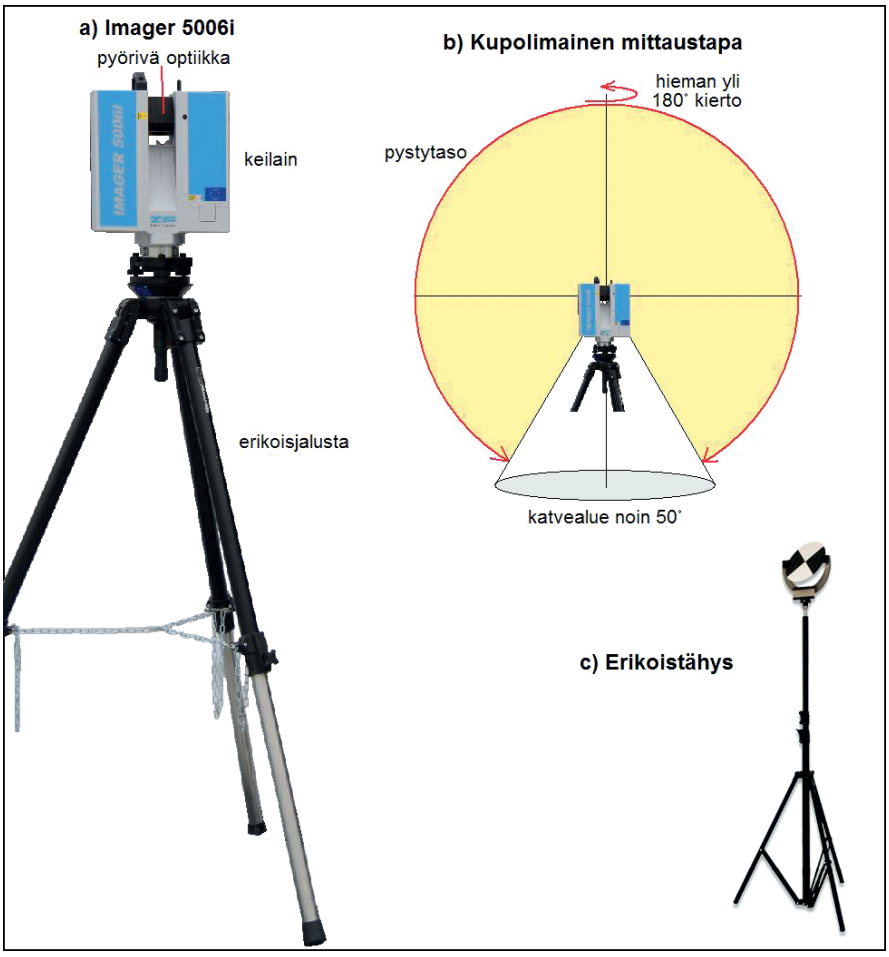
Mitattava alue saadaan keilattua vierekkäisten lentojonojen avulla. Jonojen etäisyys riippuu lentokorkeudesta ja keilauskulmasta. Lasermittaukset eivät ole riippuvaisia vuorokauden ajasta eivätkä sääolosuhteista (pilvisyys ja näkyvyys) samalla tavoin kuin ilmakuvaus. Heijastuneista pulsseista on myös mahdollista mitata useampia heijastuksia kuin vain ensimmäinen heijastus. Esimerkiksi metsäisillä alueilla ensimmäinen heijastus tulee yleensä puitten latvoista ja oksista ja vasta viimeinen kaiku maanpinnasta. Laserkeilaus onkin metsäisillä alueilla tarkempi ja tehokkaampi maaston korkeuksien mittausmenetelmä kuin ilmakuvaus, sillä tiheässäkin metsässä jokin pulssi tunkeutuu yleensä maanpintaan asti.

Laserkeilaus tuottaa pistepilven, jossa mittauspisteiden koordinaatit tunnetaan. Pistepilveä voidaan kutsua etäisyyskuvaksi. Pilven pisteet muodostavat digitaalisen pintamallin. Pintamallissa ei ole vielä eriteltyinä maanpinnan, kasvuston ja rakennusten pisteitä toisistaan. Pintamallista on mahdollista muodostaa digitaalinen korkeus-

malli luokittelemalla pisteet joko maanpinnan, kasvuston tai rakennusten pisteiksi. Pistepilven luokittelussa käytetään usein hyväksi digitaalista valokuvaa. Valokuva voidaan ottaa keilauksen yhteydessä, mutta myös aikaisemmin otettuja ilmakuvia voidaan käyttää hyväksi, jos kohteessa ei ole tapahtunut oleellisia muutoksia.

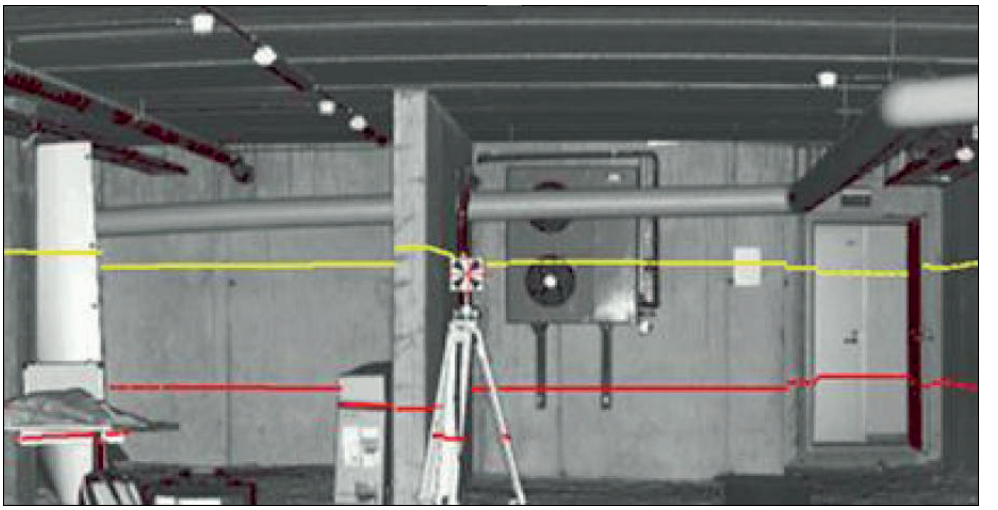
### 7.5.2 Maalaserkeilaus

Keilaus on alkujaan kaukokartoituksessa käytetty mittausmenetelmä. Nykyisin sitä käytetään myös maanpinnalla tehtävissä mittauksissa. Maalaserkeilan on takymetrin kaltainen automaattisesti ja nopeasti etäisyyksiä ja suuntia mittaava koje. Keilaus sopii erityisen hyvin erilaisten rakenteiden mittaamiseen ja mallintamiseen, mutta sitä voidaan käyttää myös maaston kohteiden mittaamiseen. (Kuva 237.)




**KUVA 237** *a) Maalaserkeilain Zoller Fröhlich Imager 5006I. Koje on asennettu värinää vaimentavalle erikoisjalustalle. b) Kupolimaisesti mittaavan keilaimen toimintaperiaate. c) Pistepilven orientoinnissa tarvitaan liitospisteitä, jotka näkyvöitetään tähysten avulla. Kuvassa on keilaukseen tarkoitettu erikoistähys.*

Mittausten perusteella saadaan mittauspisteiden koordinaatit ja kolmiulotteinen pistepilvi, jonka avulla mittauskohdetta voidaan tutkia ja mallintaa. Ilmalaserkeilauksessa keilaimen orientointi mitataan suoraan inertiamittausjärjestelmän avulla. Maalaserkeilauksessa pistepilvi orientoidaan jälkikäteen liitospisteiden avulla. Orientointia varten mittauskohteessa pitää olla riittävä määrä tähyksin näkyvöitettyjä liitospisteitä. Yksittäisen pistepilven orientoinnissa tarvitaan vähintään kolme taso- ja korkeussijainniltaan tunnettua liitospistettä. Orientoinnin luotettavuuden vuoksi liitospisteitä on kuitenkin hyvä olla enemmän kuin kolme. (Kuva 237 c, s. 271 ja kuva 238.)



**KUVA 238** *Pistepilvi voidaan esittää valokuvamaisena etäisyyskuvana. Kuva muistuttaa mustavalkoista kuvaa, mutta sen sävyt perustuvat hyvin kapealla aallonpituusalueella mitattuihin intensiteettiarvoihin. Kuvan keskellä on orientoinnissa käytetty tähys. Kuvaan on muodostettu myös kaksi vaakasuoraa poikkileikkausta.*

Laitevalmistajien keilainten keilaustapa voi vaihdella. Nykyisin enemmistö käytettävistä maalaserkeilaimista on kupolimaisesti mittaavia laitteita. Kupolimaisessa mittaustavassa laitteen alapuolelle jää pieni alue mittaamatta. Muutoin mittaus kohdistuu koko tilaan. (Kuva 237 b, s. 271.)

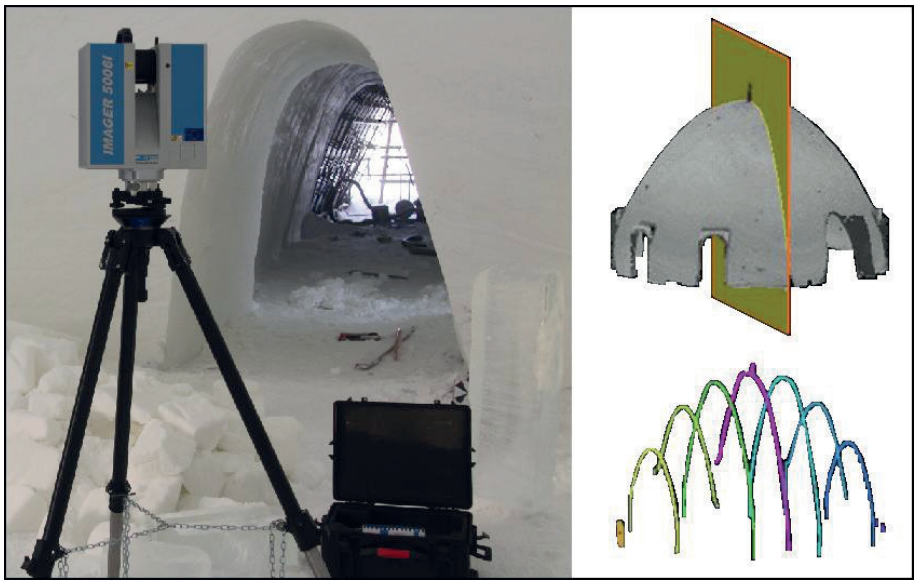
Laserkeilaimet mittaavat etäisyyden joko valon kulkuajan perusteella tai vaihe-eromittauksella. Valon kulkuaikaan perustuvat keilaimet mittaavat pitempiä matkoja kuin vaihe-eromittauksella mittaavat laitteet. Vaihe-eromittauksella mittaavien keilaimien mittausalue jää usein vielä alle 80 metrin. Keilaimet mittaavat kohdetta nopeasti tehden jopa useita satoja tuhansia mittauksia sekunnissa

Keilaimen muodostaman pistepilven tiheys on suoraan verrannollinen mittausetäisyyteen. Samoilla keilausasetuksilla lähellä olevasta kohteesta syntyy tiheämpi

pistepilvi kuin kaukana olevasta kohteesta. Pistepilven tiheyttä voidaan kuitenkin säätää. Joillakin keilaimilla mittaus voidaan kohdistaa rajattuun alueeseen, joka keilataan muita kohteita tarkemmin.

Osa keilaimista tallentaa mitatun pisteen koordinaattien lisäksi myös palautuvan signaalin voimakkuuden eli intensiteetin. Paluusignaalin voimakkuus riippuu yleisesti kohteen etäisyydestä ja kohdepinnan ominaisuuksista. Signaalin voimakkuus voidaan esittää etäisyyskuvassa harmaasävyeroina. Tällä tavoin saadaan syntymään musta-valkokuvaa muistuttava näkövaikutelma. Erojen perusteella voidaan kohdepinnalta erottaa myös tekstuuria, kuten kuvioita ja tekstejä. Näin esimerkiksi liitospisteiden näkyvöittämiseen käytetyt tähykset erottuvat kuvasta. Etäisyyskuvaan voidaan liittää myös digitaalisella kameralla otettu kuva, jonka avulla pistepilven pisteille voidaan antaa ihmisen luonnollista värinäköä vastaavat värit. (Kuva 238, s. 272.)

Laserkeilain siirtää mittaustyötä mittauskohteesta sisätyöksi. Jos liitospisteet ovat käytettävissä, mittauskohteessa ollaan ehkä muutamia minuutteja. Mittausten jatkokäsittely tehdään tietokoneella toimistossa. Pistepilvestä poistetaan virheelliset mittaukset suodattamalla, pistepilveä harvennetaan ja pistepilvi orientoidaan koordinaatistoon. Mahdollisesti tehdään myös erilaisia tiedostomuotojen muunnoksia. Alustavien töiden jälkeen kohdetta tutkitaan ja mitataan, pistepilveen sovitetaan erilaisia pinta- ja kappalemalleja ja siitä muodostetaan esimerkiksi poikkileikkauksia. (Kuva 239.)



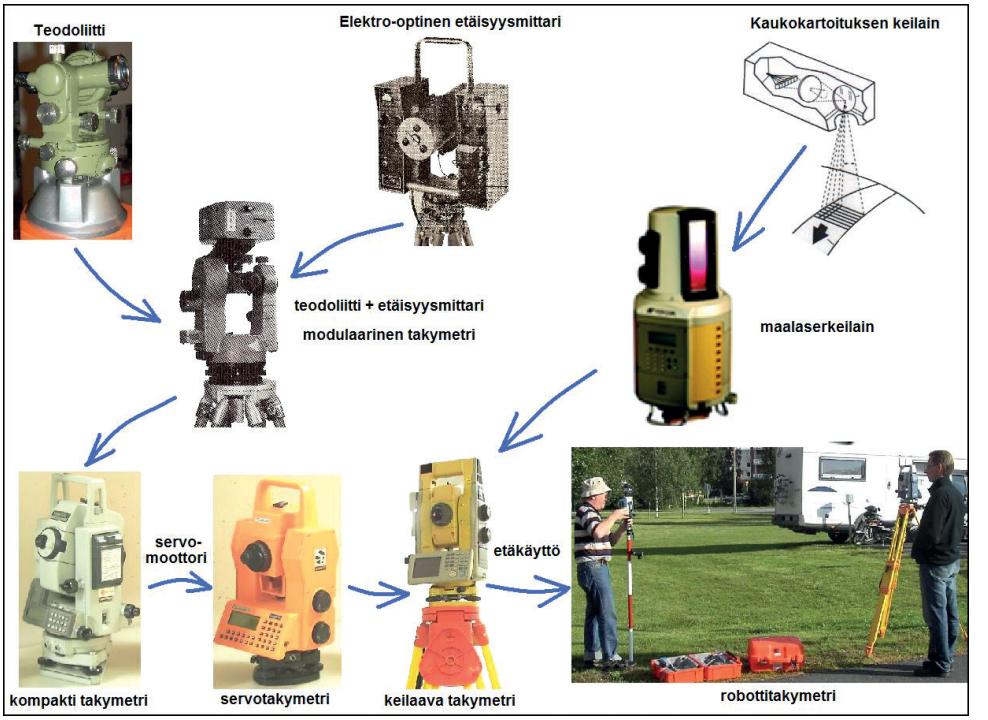

**KUVA 239** *Maalaserkeilan pystytettynä lumirakenteen mittausta varten. Kuvan oikeassa reunassa on pistepilven perusteella muodostettuja pystysuoria poikkileikkauksia.*

## 7.6 Takymetrimittausten kehitys

### 7.6.1 Teodoliitista robottitakymetriksi

Mittaus- ja kartoitustekniikan tehtävissä käytettävät geodeettiset mittauslaitteet ovat kehittyneet nopeasti 1900-luvun loppupuolella ja 2000-luvulla. Takymetrimittaukset, laserkeilaimet ja satelliittipaikannuksen tekniikat ovat mittaustekniikan alueita, joiden kehitys on ollut erityisen merkittävää. Vielä 1970-luvulla saattoi tuntua, että mitään erityistä ei ollut tapahtumassa. Kuitenkin satelliitit kiersivät Maata, elektro-optiset etäisyysmittarit alkoivat tulla käyttöön ja tietotekniikan käyttökin yleistyi. Mittauskojeiden ja –tekniikoiden rinnalla kehittyivät mittausohjelmistot ja maastotietokoneet. Laitekehitys ja tietotekniikan kehitys liittyvätkin läheisesti toisiinsa.

Teodoliitin kaukoputken tai alhidadin päälle ilmestyi etäisyysmittari. Käyttöön tuli modulaarisia takymetrejä. Tämä tarkoittaa, että kulmanmittauskoje ja elektro-optinen etäisyysmittari olivat erillisiä kojeita. 1980-luvulla käytössä yleistyivät kompaktit takymetrit. Niissä etäisyysmittari oli kiinteä osa kulmanmittauskojetta. (Kuva 240.)




**KUVA 240** *Takymetrin kehitysvaiheita 1950-luvulta nykypäivään.*

Elektro-optinen etäisyydenmittaus edellytti alkujaan prisman käyttöä, mutta 1980-luvulla alettiin käyttää myös prismattomasti mittaavia etäisyysmittareita. Nykyisin elektro-optiset etäisyysmittarit ovat niin pieniä laitteita, että samaan kaukoputkeen mahtuu sekä prismaan että prismattomasti mittaavat etäisyysmittarit.

1990-luvulla takymetrin liikkeiden hallinta alkoi automatisoitua. Perinteisesti teodoliitti ja takymetri on suunnattu mittauskohteeseen tähtäimien ja mekaanisten liikeruuvien avulla. Liikkeiden hallinnan automatisointi mahdollistui, kun takymetriin asennettiin servomoottoreita, jotka kiersivät kaukoputkea kojeen mekaanisten akseleiden ympäri. Servomoottorein varustetussa takymetrissä liikeruuvit ovat korvautuneet pienellä kosketuksella toimivilla liikepyörillä tai kojeen suuntaaminen ja kohdistus mittauskohteeseen ovat muuttuneet täysin automaattisiksi toiminnoiksi. (Kuva 240, s. 275.)

Takymetrin liikkeiden hallinnan automatisointi on mahdollistanut sen, että takymetriä voidaan etäkäyttää. Etäkäyttö tapahtuu prisman puoleisesta päästä. Etäkäytettävää takymetriä sanotaan robottitakymetriksi. Robottitakymetri on pitkälle automatisoitu etäkäytettävä takymetri. Sen avulla yksi mittaaja pystyy tekemään normaaleihin kartoitus- ja merkintämittauksiin liittyvät mittaustyöt. Etäkäytön edellytyksiä ovat servotakymetri ja takymetrin ja prisman välinen tietoliikenneyhteys. Prisman löytymistä hankalissa mittausolosuhteissa voidaan nopeutta erilaisilla pikahakutekniikoilla. (Kuva 241 ja 242, s. 276.)

**KUVA 241** *Sokkian robottitakymetrin esittelytilanne vuonna 2007. Esittelijänä on Kimmo Jäppinen (vasemmalla) Geostar Oy:stä. Kuva ei esitä tyypillistä mittaustilannetta. Oleellinen asia on, että mittaaja tekee yksin tarvittavat mittaukset prisman puoleisesta päästä. Oikealla Jaakko Lampinen.*

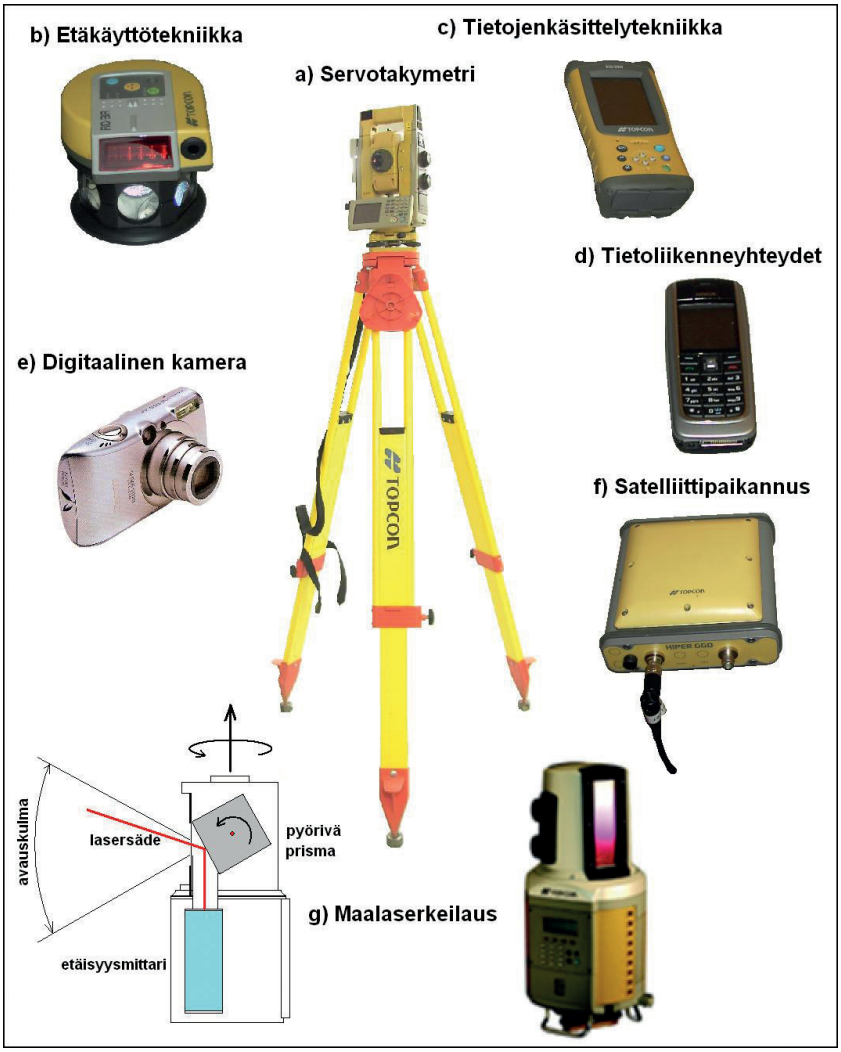
Takymetrin liikkeiden hallinnan automatisointi on mahdollistanut myös täysin automaattiset mittaustoiminnot. Esimerkiksi keilaus eli skannaus on mittausta, jossa kohdetta mitataan etukäteen määritellyllä tavalla täysin automaattisesti. (Kuva 244, s. 278).

Takymetrien ja laserkeilainten kehittymisen myötä mittaajien ajattelutapa on muuttumassa. Perinteisesti mittaaja on harkinnut mitä mittaa ja mitannut kohteesta yksittäisiä pisteitä. Tarvittaessa pisteitä on yhdistetty viivoiksi, alueiksi ja pinnoiksi. Nykyinen tekniikka mahdollistaa kohteen kattamisen mittauspisteiden pilvellä. Mittaukset on mahdollista tehdä automaattisesti. Jälkeenpäin katsotaan, mitä mittauksista saadaan irti tulkitsemalla ja mallintamalla kohde tietotekniikan tarjoamin keinoin.

**KUVA 242** *Topconin servotakymetri GPT 9003 A. Kojeessa on sekä prismaan että prismattomasti mittaavat etäisyysmittarit. Etäkäytössä mittausta ohjataan prisman puoleisesta päästä maastotietokoneella (FC-200), joka on radioyhteydessä takymetriin. Optinen pikahakulaite (RC-3R) nopeuttaa prisman löytymistä hankalissa mittaustilanteissa.*

## 7.6.2 Mittauskojeiden ja –tekniikoiden integraatio

Integraatio tarkoittaa eheytymistä, sulautumista tai yhtenäisen kokonaisuuden muodostumista ja muodostamista. Mittauslaitteidenkin osalta tapahtuu mittauskojeiden ja –tekniikoiden integraatiota. Integraation tuloksena mittauskojeiden toiminnot monipuolistuvat. Takymetri on hyvä esimerkki mittausten integraatiosta. (Kuva 243, s. 243.)

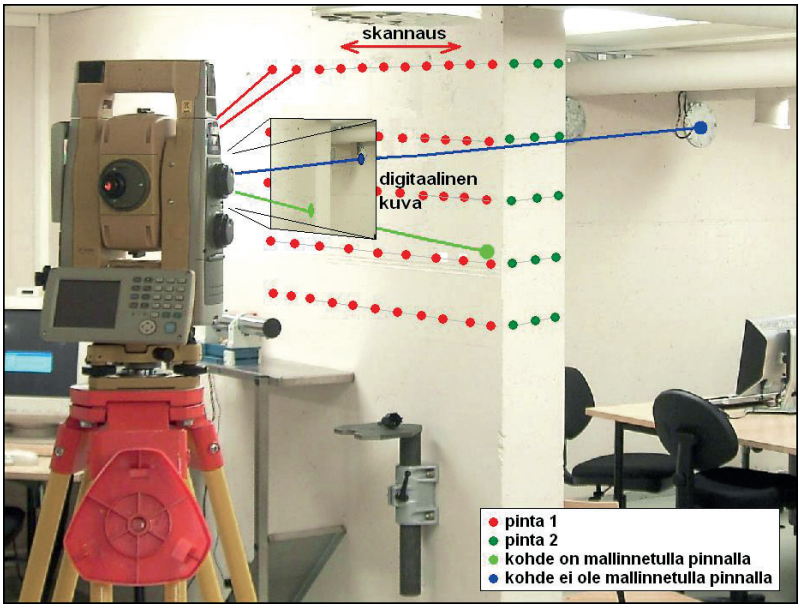



**KUVA 243** *Nykyaikainen takymetri on monitoimilaite. a) Takymetri on servotakymetri. b) Takymetrin etäkäyttö on mahdollista. c) Takymetri on maastotietokone. d) Takymetri kommunikoi muiden laitteiden kanssa. e) Takymetrillä voidaan ottaa ja mitata digitaalisia kuvia. f) Takymetrin ja satelliittipaikantimen yhteiskäyttö on mahdollista. g) Takymetrillä voi keilata eli skannata.*

Nykyaikainen takymetri voi parhaimmillaan olla:

- automaattisesti toimiva servotakymetri
- etäkäyttöinen mittauskoje
- maastotietokone
- oheislaitteiden ja tietoverkkojen kanssa kommunikoiva laite
- digitaalinen kamera
- satelliittipaikantimien kanssa yhteiskäyttöinen koje
- maalaserkeilain.

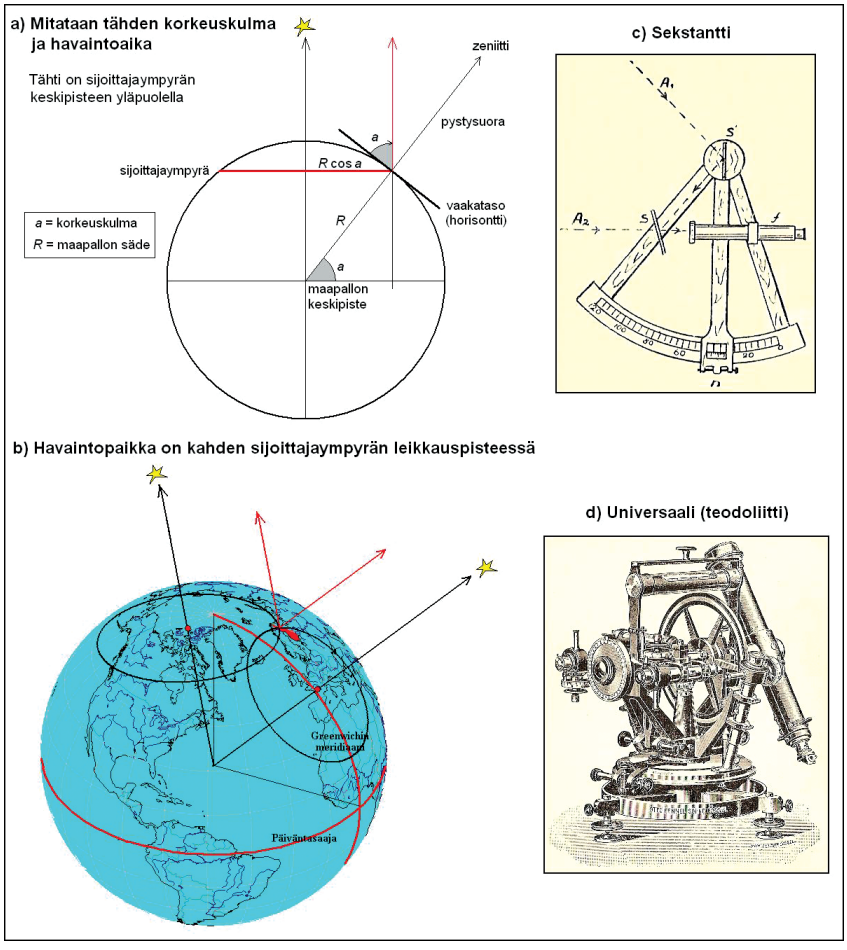
Eräs mielenkiintoinen piirre on kaukokartoituksen ja maastomittausten tekniikoiden läheneminen toisiaan. Läheneminen näkyy valokuvien ja keilaustekniikoiden hyödyntämisessä. Ja takymetrin osana voi olla digitaalinen kamera. Kameraa voidaan käyttää mittausten dokumentointiin, takymetrin ohjaukseen ja kuvamittauksiin. Yksittäisiltä kuvilta mittaaminen on mahdollista jo mittauspaikalla, jos kohteessa on mittausten perusteella mallinnettuja pintoja. Pintojen mallintaminen onnistuu keilauksen eli skannauksen avulla. Jos mittauskohde kuvataan kahdesta paikasta, syntyy stereokuvapari. Stereokuvia voidaan mitata tarkoitukseen suunnitelluilla ohjelmilla jälkikäteen. Kameralla ja keilausominaisuudella varustettu takymetri sopii moniin erikoismittauksiin, kuten onnettomuustutkimuksiin, mutta se sopii myös tavanomaisempiin mittaus- ja kartoitustekniikan töihin. (Kuva 244.)




**KUVA 244** *Takymetrillä voi keilata eli skannata mittauskohteen. Koje mittaa automaattisesti etukäteen määritellyllä tavalla pisteitä kohteesta. Mittausohjelma voi mallintaa kohteen muodostamalla siihen pintoja. Kohteesta voidaan ottaa valokuva. Yksittäiseltä kuvalta voidaan mitata kohteita, jotka kuuluvat mallipintoihin. Sinisellä merkitty venttiili ei kuulu kumpaankaan mallinnettuun pintaan, joten sen koordinaatteja ei ole mahdollista mitata takymetrin ottamalta kuvalta.*

# 8 SATELLIITTIMITTAUS

Takymetrimittauksen ohella satelliittimittaus on nykyisin tärkein maastossa ja rakennustyömailla tehtävien mittausten menetelmä. Tässä luvussa tarkastellaan satelliittipaikannuksen periaatteita, laitteita ja mittaustapoja. Mittaus- ja kartoitustekniikan näkökulmasta tärkeimpiä mittaustapoja ovat suhteellisen paikannuksen mittaustavat, joiden avulla kohteiden sijainti voidaan määrittää muutamien senttimetrien, jopa millimetrien tarkkuudella. Ennen paikannussatelliitteja globaali paikannus perustui tähtitieteeseen. (Kuva 245.)




**KUVA 245** *Ennen satelliittimenetelmien käyttöönottoa ainoat maailmalaajuisesti toimivat paikannusmenetelmät perustuivat tähtitieteellisiin mittauksiin. Havaitsijan paikka voidaan määrittää mittaamalla tähtien korkeuskulmaa ja havaintoaikaa. (Heiskanen 1937, sekstantti s. 92 ja universaali s. 87).*

## 8.1 Paikannusta satelliittien avulla

Useimmille ihmisille satelliittipaikannus tarkoittaa GPS-paikannusta. Amerikkalainen GPS-paikannusjärjestelmä (Global Positioning System) mahdollistaa maailmanlaajuisen, reaaliaikaisen paikantamisen milloin tahansa sääolosuhteista riippumatta. GPS-paikannuksen tekniikka on kohtuullisen edullista ja helppokäyttöistä. Ennen satelliittipaikannuksen kaltaista tekniikkaa aito globaali eli maailmanlaajuinen paikantaminen perustui tähtien suunnan ja havaintohetken ajan mittaukseen. Tähtitieteellinen paikannus oli hidasta, tiedollisesti ja taidollisesti vaativaa ja sääolosuhteista riippuvaa (kuva 245, s. 279).

Neuvostoliitto lähetti ensimmäisen satelliitin Maata kiertävälle radalle lokakuussa 1957. Avaruuden valloituksen ja avaruuden teknisen hyödyntämisen alusta alkaen ymmärrettiin satelliittien tarjoamat mahdollisuudet paikannustekniikalle. Jo 1960-luvun alkupuolella kehitettiin USA:ssa sotilaskäyttöön Transit Doppler –paikannusjärjestelmä. Järjestelmä vapautettiin siviilikäyttöön 1960-luvun lopulla. Se loi osaltaan perustan GPS-paikannusjärjestelmälle. (Kuva 246.)

**KUVA 246** *Satelliittipaikannusta Saudi-Arabiassa Farasanin saaristossa 1980-luvun alkupuolella. Kuvan laitteisto on Magnavox MX 1502. Paikannuslaite määritti sijaintinsa Transit Doppler -järjestelmän satelliittien avulla. Laitteisto on erittäin raskas nykyisiin laitteisiin verrattuna. Muun muassa virtalähteenä on neljä auton akkua. Sijaintia ei saatu reaaliajassa, vaan se laskettiin mittausten jälkeen toimistossa.*

GPS-järjestelmä on hallitsevassa asemassa oleva satelliittipaikannusjärjestelmä. Sen kehitystyö aloitettiin USA:ssa 1970-luvulla, mutta vasta vuonna 1994 se oli suunnitellussa kokoonpanossaan. Vaikka kyse on sotilaskäyttöön suunnitellusta järjestelmästä, toteutettiin se myös siviilikäytön kannalta hallitusti ja järkevällä tavalla. (Kuva 247.)

Tekniikka & Talous 16.1.1992

Verkko täydellinen vuonna 1993

Satelliitit mittaavat tielinjat ja kertovat tarkan sijainnin

Maapalloa kiertävät satelliitit pystyvät pian kertomaan tarkat koordinaatit milloin ja missä tahansa.
Satelliittiverkkoa hyödynnetään jo laajasti muun muassa merenkulussa ja kartoituksessa. Tieliikenteen ja rakennusteknikan sovellukset ovat myös jo arkipäivää.

Gps paikantaa kolmesta satelliitista mitatun etäisyyden avulla

Olet tässä

**KUVA 247** *GPS-järjestelmän siviilikäyttö oli hyvin suunniteltu. Mahdolliset siviilikäytön sovellukset olivat tiedossa ja tekniikka käytettävissä, kun GPS-järjestelmä otettiin käyttöön täydessä laajuudessaan 1990-luvun alkupuolella (Tekniikka & Talous 16.1.1992).*

Nykyisin satelliittipaikannus ei ole vain GPS-järjestelmän varassa. Venäläinen Glonass-järjestelmä on ollut toiminnassa 1990-luvulta alkaen. Glonass-järjestelmä on käytettävissä kaikkialla maailmassa. Se vastaa satelliittien määrän ja kattavuuden osalta GPS-järjestelmää. Euroopan Unioni on parhaillaan toteuttamassa Galileo-järjestelmää. Japani, Kiina ja Intia suunnittelevat ja toteuttavat omia paikannusjärjestelmiään. Eri maiden ylläpitämien paikannusjärjestelmien muodostamaa kokonaisuutta kutsutaan GNSS-järjestelmäksi (Global Navigation Satellite System). GNSS-järjestelmän tavoitteena paikannusjärjestelmien käyttäjien näkökulmasta on siihen kuuluvien osajärjestelmien sujuva yhteiskäyttö. GPS- ja Glonass-järjestelmien osalta yhteiskäyttö toimii jo hyvin.

USA:n ylläpitämä GPS-järjestelmä on palvellut luotettavasti siviilikäytön paikanmääritystä jo 20 vuotta. Tehdyillä järjestelmän kehittämispäätöksillä GPS-järjestelmä tulevaisuus on varmistettu 2030-luvulle saakka. Venäläisen Glonass-järjestelmän luotettavuus ei ole ollut aivan yhtä hyvä kuin GPS-järjestelmän luotettavuus. Uusien paikannussatelliittijärjestelmien käyttöönotto ei ole ollut ongelmatonta. Muun muassa Euroopan Unionin suunnitteleman Galileo-järjestelmän käyttöönotossa on edelleen suuria poliittisia, taloudellisia ja teknisiä ongelmia. Satelliittipaikannuksen edellytykset on kuitenkin turvattu pitkälle tulevaisuuteen pelkästään USA:n toiminnan ansiosta.

## 8.2 Global Positioning System

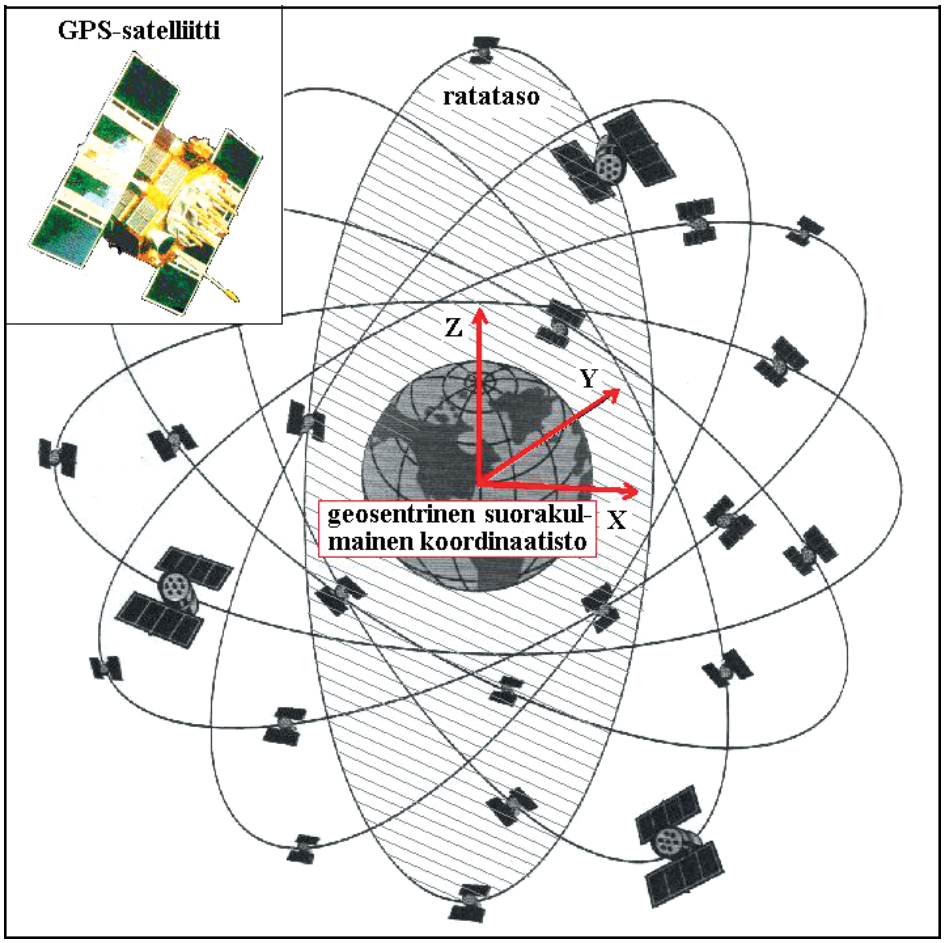
### 8.2.1 GPS-järjestelmän osat

NAVSTAR GPS (Navigation Satellite Time and Ranging Global Positioning System) tai lyhyemmin GPS (Global Positioning System) on Yhdysvaltain puolustushallinnon kehittämä ja ylläpitämä satelliittipaikannusjärjestelmä. Sen kehitystyö aloitettiin 1970-luvulla. Järjestelmä oli nykyisessä muodossaan valmis vuonna 1994.

GPS-järjestelmä on ensisijaisesti kehitetty sotilaskäyttöön. Sen kehitystyön tavoitteina olivat muutaman metrin paikannustarkkuus, hyvä häiriöiden sietokyky ja yksisuuntaisuus. Yksisuuntaisuus tarkoittaa, että paikannuspalvelunkäyttäjä vain vastaanottaa satelliitin lähettämän signaalin, mutta ei itse lähetä mitään signaalia satelliittiin. Sotilaskäytön ensisijaisuudesta huolimatta siviilikäytön tarpeet on alusta alkaen huomioitu järjestelmän kehitystyössä.

Järjestelmän avulla palvelun käyttäjä voi määrittää sijaintinsa ja nopeutensa missä tahansa maapallolla minä tahansa vuorokaudenaikana sääolosuhteista riippumatta. Paikannuksen lisäksi GPS-järjestelmä on tärkeä myös ajanmäärityksen kannalta. Esimerkiksi maailmanlaajuisten tietoverkkojen ajastus eli synkronointi tehdään järjestelmän avulla.

GPS-järjestelmän rakennetta kuvattaessa sanotaan sen muodostuvan kolmesta lohkosta, jotka ovat satelliitti-, valvonta- ja käyttäjälohkot. Satelliittilohkoon kuuluu vähintään 24 satelliittia, jotka kiertävät maapalloa kuudella ratatasolla noin 20 200 km korkeudella maapallon pinnasta. 24 satelliittia on järjestelmän niin sanottu toiminnallinen laajuus. Kun tämä tila saavutettiin vuonna 1995, on taivaalla aina ollut enemmän kuin 24 toimivaa satelliittia. Esimerkiksi kesäkuussa 2012 paikannuskäytössä oli 31 satelliittia. (Kuva 248, s. 283 ja taulukko 12, s. 284.)

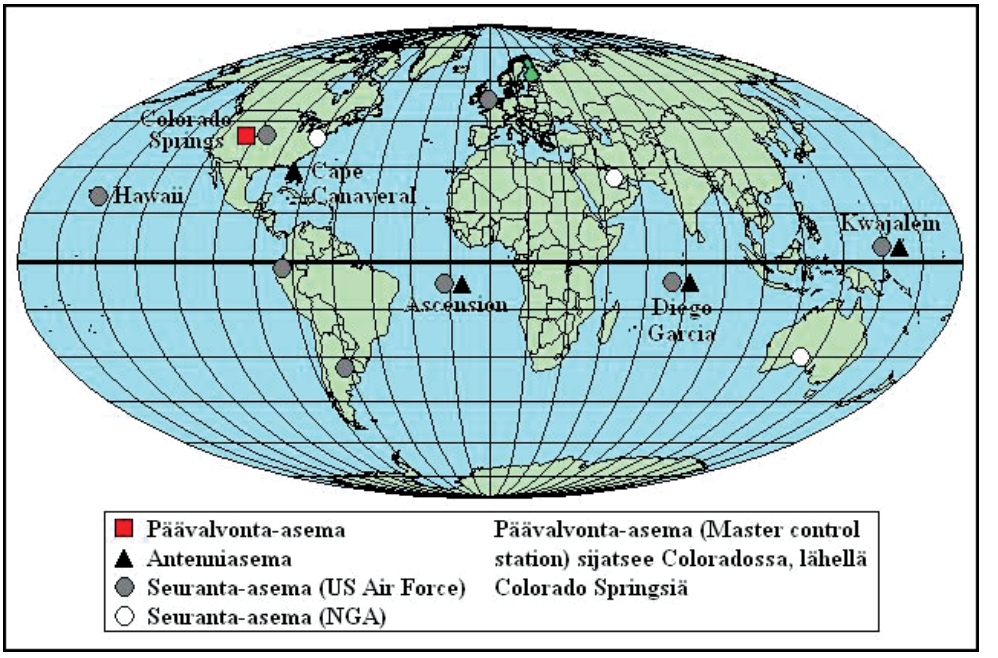



**KUVA 248** *GPS-järjestelmän niin sanottu toiminnallinen laajuus on 21 varsinaista satelliittia ja kolme varasatelliittia. Satelliitit sijaitsevat kuudella ratatasolla. Hetkellisesti satelliittien lukumäärä voi vaihdella satelliittien vikaantumisen ja korvaavien satelliittien lähettämisen vuoksi. Kuvassa näkyy myös GPS-järjestelmän maakeskinen eli geosentrinen suorakulmainen koordinaatisto. Koordinaattijärjestelmä tunnetaan nimellä WGS84 (World Geodetic System 1984).*

Valvontalohkon muodostavat päävalvonta-asema ja useat antenni- ja seuranta-asemat. Päävalvonta-asema sijaitsee USA:ssa lähellä Colorado Springsiä. Valvontalohkon asemat sijaitsevat päiväntasaajan molemmin puolin. Niiden tehtävänä on satelliittien ratojen ja kellovirheiden määrittäminen ja ennustaminen sekä järjestelmän yleisen toiminnallisen tilan valvonta. Valvonta-asemat voivat tarvittaessa myös siirtää satelliitteja. Siirron syy voi olla satelliitin ajautuminen pois suunnitellulta radaltaan tai jokin sotilaallinen syy. Valvontalohkon toiminnot ovat tärkeitä paikannustarkkuuden kannalta. GPS-järjestelmän käyttöönoton jälkeen valvontalohkoa on kehitetty muun muassa lisäämällä valvonta-asemien lukumäärää. Kehitystyö on osaltaan parantanut GPS-paikannuksen tarkkuutta. (Kuva 249, s. 284.)

**TAULUKKO 12** *GPS-satelliittien sukupolvet. Vanhin tällä hetkellä toimiva GPS-satelliitti on 20-vuotias. Tilanne 7.6.2012. Samanaikaisesti käytettävissä on myös 24 Glonass-satelliittia ja kaksi Galileo-satelliittia.*

| Sarja | Satelliittien laukaisut | Laukaisujen lukumäärä | Suunniteltu toiminta-aika | Toiminnassa |
|---|---|---|---|---|
| I | 22.2.1978 – 9.10.1985 | 11 | 5 v | 0 |
| II | 14.2.1989 – 1.10.1990 | 9 | 7.5 v | 0 |
| II A | 26.11.1990 – 6.11.1997 | 19 | 7.5 v | 11 |
| II R | 17.1.1997 – 6.11.2004 | 13 | 7.5 v | 12 |
| II R-M | 26.9.2005 – 17.8.2009 | 8 | 7.5 v | 7 |
| II F | 28.5.2010 - | 2 | 12 v | 2 |
| III | 2013 alkaen? | | | |




**KUVA 249** *GPS-järjestelmän valvontalohkon maa-asemat. Ne seuraavat jatkuvasti paikannussatelliitteja. Valvonta-asemat ovat myös WGS84-järjestelmän realisoinnissa käytettyjä kiintopisteitä.*

Käyttäjälohkon muodostavat paikannuspalvelun käyttäjät, jotka työnsä tai harrastustensa vuoksi tarvitsevat reaaliaikaista sijaintitietoa. Käyttäjät mittaavat satelliittien lähettämiä signaaleja sijainnin, nopeuden ja ajan määrittämiseksi.

Teknisissä paikannusjärjestelmissä koordinaatit ovat tärkeitä asioita. GPS-järjestelmän koordinaattijärjestelmä on geosentrinen eli maakeskinen suorakulmainen koordinaattijärjestelmä. Se tunnetaan nimellä WGS84 (World Geodetic System 1984). Monissa maissa, myös Suomessa, käytetään siihen perustuvia koordinaattijärjestelmiä. (Kuva 248, s. 283.)

### 8.2.2 Satelliittien ratojen esittäminen

GPS-satelliittien radat ovat lähes ympyräratoja, ratatason päiväntasaajasta mitattu kaltevuus eli inklinaatio on 55°, radan isompi puoliakseli on noin 26560 km ja satelliitit ovat noin 20200 km korkeudella maapallon pinnasta. Satelliittien kiertoaika on noin 11 h 58 min eli vähän lyhyempi kuin vuorokausi. Tämä pieni poikkeama vuorokauden pituudesta aiheuttaa sen, että satelliittien asema taivaalla ei toistu aivan samanlaisen samaan kellonaikaan.

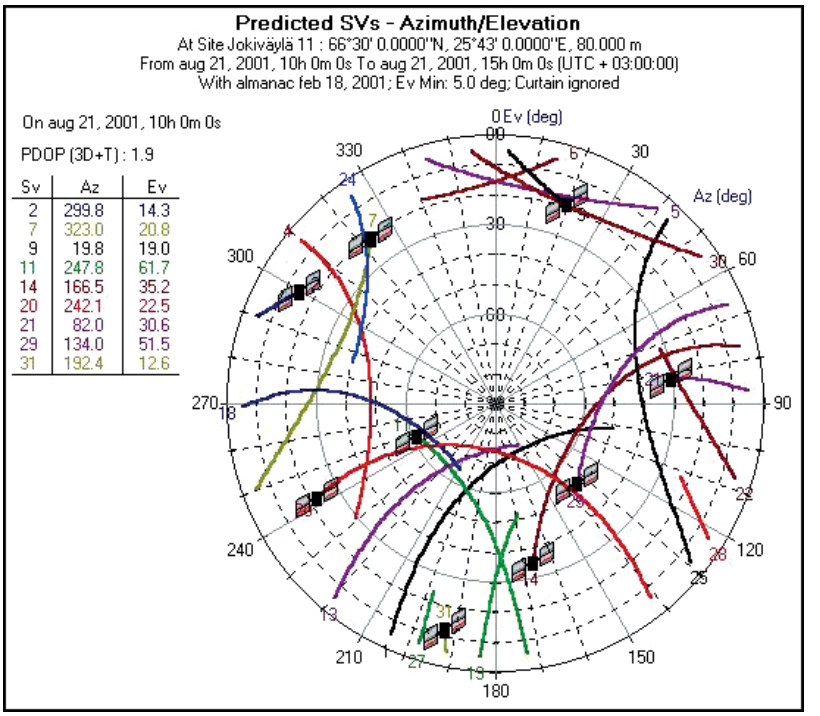
Kun satelliittien ratoja tarkastellaan maapallon pinnalta käsin, esitetään satelliittien sijainti yleensä polaarisen napapiirroksen avulla. Esitystapaa käytetään muun muassa satelliittipaikantimien opastusnäytöissä ja laskentaohjelmissa. (Kuva 250, s. 286.)

Napapiirroksen uloin kehä on horisontti. Jos satelliitti on piirroksen ulkokehällä, se on juuri ja juuri näkyvissä horisontissa. Tällöin satelliitinkorkeuskulma on nolla. Havaitsija on aina piirroksen keskellä. Jos satelliitti on piirroksen keskipisteessä, satelliitti näkyy suoraan havaitsijan yläpuolella eli zeniitissä. Satelliitin korkeuskulma on tällöin 90°.

Horisonttiympyrän kehälle on merkitty suunnat maantieteellisen pohjoisen suhteen. Tällä tavoin määriteltyä suuntaa kutsutaan atsimuutiksi. Napapiirroksessa pohjoinen on ylhäällä pohjoinen ja sen atsimuutti on nolla. Alhaalla on etelä, jonka atsimuutti on 180°.

Satelliittitaivaalla on aukko pohjois- ja etelänapojen ympärillä. Aukko johtuu satelliittien ratojen kallistuksesta päiväntasaajan suhteen. Ratatason kallistuksen vuoksi satelliitit eivät kierrä napojen kautta. Havaitsijan leveyskulma määrää aukon paikan. Aukon vuoksi esimerkiksi Pohjois-Suomessa ei näy juurikaan paikannuksen kannalta käyttökelpoisia satelliitteja pohjoisessa.

Erityistä tarkkuutta vaativien satelliittimittausten suunnittelun yhteydessä napapiirrokseen voidaan piirtää havaintopaikan näkemäesteet. Niiden avulla voidaan tutkia esteiden vaikutusta paikannustarkkuuteen. (Kuva 263, s. 309.)

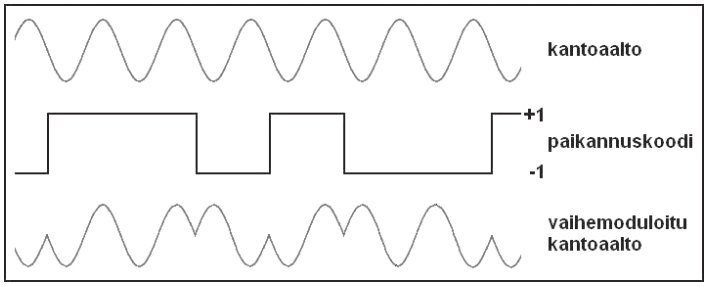



**KUVA 250** *Polaarinen napapiirros, joka esittää satelliittien kulun Rovaniemen taivaalla 21.8.2001 klo 10 - 15. Satelliittisymbolit esittävät satelliittien sijainnin ennustejakson alussa. Satelliitista alkava kaari kuvaa satelliitin radan ennustejakson kuluessa. Satelliittitaivaalla on aukko pohjoisessa. Aukon paikka määräytyy havaitsijan leveyskulman perusteella. (Pred-ohjelman tuloste.)*

### 8.2.3 GPS-signaali

Käyttäjät määrittävät sijaintinsa satelliittien lähettämän signaalin avulla. Se muodostuu kolmesta pääosasta (kuva 251, s. 287):

1. Kantoaallot, joita on kaksi tai uusimmissa satelliiteissa kolme:
   - L1, $f$ = 1575.42 MHz, $\lambda$ = 19 cm
   - L2, $f$ = 1227.60 MHz, $\lambda$ = 24 cm
   - L5, $f$ = 1176.45 MHz, $\lambda$ = 26 cm
2. Paikannuskoodit, joita on kaksi:
   - P-koodi (Precise) L1- ja L2-taajuuksilla, tarkoitettu sotilaskäyttöön
   - C/A-koodi (Coarse Acquisition) taajuudella L1, tarkoitettu siviilikäyttöön, uusimmissa satelliiteissa myös L2-taajudella
3. Navigointiviesti, jonka osia ovat:
   - aikaan liittyvät tiedot
   - satelliittien ratatiedot (almanakkatiedot ja efemeridit)
   - satelliittien terveydentilatiedot.




**KUVA 251** *GPS-signaalin kantoaalto ja paikannuskoodi. Paikannuskoodi muodostuu kahden tilan vaihtelusta. Tiloja voidaan merkitä +1 ja –1, mutta matematiikalla ei ole tässä asiassa merkitystä. Paikannuskoodi liitetään vaihemoduloinnilla kantoaaltoon. (Poutanen 1998, s. 119.)*

USA parantaa GPS-järjestelmän tarkkuutta vähitellen. Järjestelmän parannukset tehdään kehittämällä valvontalohkoa ja avaamalla kaksi uutta taajuutta siviilikäyttöön. Uuden polven paikannussatelliiteissa L2-taajuudelle lisätään C/A-koodi ja kokonaan uusi L5-taajuus otetaan käyttöön. Siviilikäytön paikannukseen tarkoitettujen taajuuksien lisääntyminen kasvattaa samanaikaisten havaintojen lukumäärää. Tämä puolestaan parantaa keskiarvomittausten tarkkuutta. Lisäksi useampien taajuuksien avulla voidaan entistä paremmin hallita ilmakehään liittyviä virhevaikutuksia, jotka ovat suurin yksittäinen paikannuksen virhelähde.

Paikannuskoodit eli P- ja C/A-koodit eivät itsessään sisällä mitään informaatiota. Ne ovat pseudosatunnaisia +1 ja –1 tilan sisältäviä sekvenssejä, joilla moduloidaan kantoaaltoa niin, että kantoaallon vaihe kääntyy 180°, kun koodin tila muuttuu (kuva 251). Pseudosatunnainen tarkoittaa näennäisesti satunnaista sekvenssien vaihtelua. Vaihtelu saadaan kuitenkin aikaan täsmällisesti toistettavalla matemaattisella algoritmilla. Pseudosatunnaisuus on erittäin tärkeä ominaisuus signaalin havaitsemisen ja mittaamisen kannalta. Sen ansiosta on mahdollista havaita hyvinkin heikkotehoinen signaali. Sotilaskäytön näkökulmasta pseudosatunnaisuus tekee signaalista vaikeasti häirittävän.

### 8.2.4 Aika

Paikannussatelliitit liikkuvat taivaalla ja havaitsija liikkuu maapallon mukana ja pinnalla. Liikkuvassa järjestelmässä paikannus ei ole mahdollista ilman ajan täsmällistä hallintaa. Ennen satelliittiaikaa globaali paikannus perustui Aurinkoon ja tähtiin. Tällöinkin aika oli välttämätön tekijä paikannuksessa. Aika ja paikka liittyvät siis yhteen.

Aikaan liittyvät käsitteet ja järjestelmät ovat yhtä monimutkaisia kuin esimerkiksi koordinaattijärjestelmät. Ajan ylläpito on pitkäjänteistä ja vaativaa tieteellistä työtä, joka nykyisin perustuu seuraaviin ilmiöihin:

- Maan pyörimisliike. Pyörimisliikkeen perusteella saadaan yleisaika eli keskiaurinkoaika (UT) ja tähtiaika.
- Maan vuotuinen kierto Auringon ympäri. Vuotuisen kiertoliikkeen perusteella saadaan efemeridiaika (ET), terrestrinen dynaaminen aika (TDT) ja barysentrinen dynaaminen aika (TDB).
- Atomikello. Atomikellojen avulla saadaan kansainvälinen atomiaika (TAI) ja koordinoitu yleisaika (UTC).

Satelliittipaikannuksen käyttäjän ei tarvitse perehtyä näihin aikajärjestelmiin kovin syvällisesti. Tiettyjen perusasioiden tietämys riittää. Tärkein näistä perusasioista on ehkä se, että kellomme käyvät nykyisin atomikelloilla määritettävää koordinoitua yleisaikaa (UTC). Se puolestaan seuraa Maan pyörimisliikkeen perusteella määritettävää keskiaurinkoaikaa eli yleisaikaa (UT, Universal Time, täsmällisemmin UT1) enintään 0.9 sekunnin erolla. Usein yleisajasta käytetään myös nimitystä Greenwichin keskiaika (GMT, Greenwich Mean Time), koska yleisaika vastaa kansainvälisen sopimuksen perusteella Auringon keskimääräistä liikettä (yön ja päivän vaihtelua) Greenwichissä Englannissa. Greenwichin kautta kulkeva nollameridiaani on näin sekä paikannuksessa että ajanmittauksessa tärkeä vertailukohta.

GPS-järjestelmä toimii omassa aikajärjestelmässään. GPS-aika (GPST) seuraa koordinoitua yleisaikaa tunnetulla erolla, joka on muutamia kymmeniä sekunteja. Aikajärjestelmien synkronointi eli ajastus on niiden ylläpitäjien tehtävä. Järjestelmien aikaerot eivät tule esille normaaleissa satelliittipaikannuksen käyttötilanteissa.

Maapallo on jaettu pituuspiirejä noudattaviin aikavyöhykkeisiin. Aikavyöhykkeet vaihtuvat periaatteessa 15° välein, vaikkakin valtiolliset rajat aiheuttavat tähän sääntöön useita poikkeuksia. Kullakin aikavyöhykkeellä on oma vyöhykeaikansa, joka sopii parhaalla mahdollisella tavalla paikalliseen yön ja päivän vaihteluun. Aikavyöhykejaon yhteydessä on sovittu myös kansainvälinen päivämääräraja, joka kulkee Tyynellä merellä Aasian ja Amerikan mantereiden välistä.

Suomen vyöhykeaika on pituusasteen $\lambda$ = 30°I keskiaurinkoaika. Paikannusjärjestelmän käyttäjän tulee tuntea yleisajan (UT) ja Suomen vyöhykeajan yhteys, joka on

talviajassa $UT = T_v - 2$ h, (139)

kesäajassa $UT = T_v - 3$ h. (140)

Kaavoissa $UT$ on yleisaika ja $T_v$ on Suomen vyöhykeaika. EU-maissa siirrytään kesäaikaan maaliskuun viimeisenä sunnuntaina klo 3 ja talviaikaan lokakuun viimeisenä sunnuntaina klo 4. Talviajassa elämme niin sanottua normaaliaikaa.

### 8.2.5 Tehtäviä

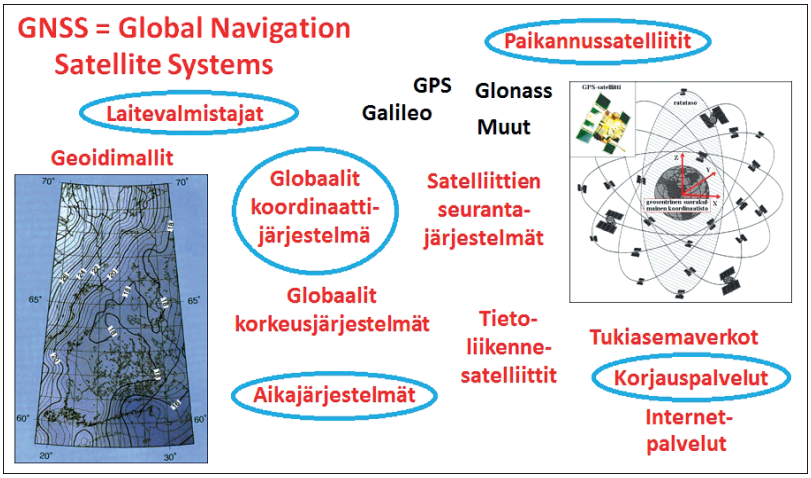
**175.** Mitkä ovat satelliittien Sv 6, Sv 24 ja Sv 28 suunnat ja korkeudet kuva 250 (s. 286) esittämän ennustejakson lopussa? Mitä kuva lyhenteet ”Sv”, ”Az” ja ”Ev” tarkoittavat?

**176.** Ovatko kuvassa 250 (s. 286) esitetyn satelliittitilanteen aikaa koskevat asetukset oikein?

**177.** Mikä on eri paikannussatelliittien (GPS, Glonass, Galileo) lukumäärä tällä hetkellä?

## 8.3 Global Navigation Satellite System

Pitkään satelliittipaikannus oli vain GPS-paikannusta. Nykyisin on alettu puhumaan GNSS-paikannuksesta tai yleisesti satelliittipaikannuksesta. GNSS-lyhenne tulee sanoista Global Navigation Satellite System. Myös monikollista muotoa (Systems) käytetään. GNSS tarkoittaa eri maiden ylläpitämien paikannusjärjestelmien muodostamaa kokonaisuutta. Laajimmillaan GNSS-järjestelmään voidaan ajatella kuuluvan kaikki paikannusta palvelevat järjestelmät ja toimijat. Sen voidaan näin ajatella tarkoittavan paikannuksen infrastruktuuria. (Kuva 252.)




**KUVA 252** *GNSS ja paikannuksen infrastruktuuri.*

USA:n ylläpitämän GPS-paikannussatelliittijärjestelmän tulevaisuus on turvattu vuosikymmeniksi eteenpäin. Muiden toimivien tai suunnitteilla olevien paikannussatelliittijärjestelmien asema ei ole aivan yhtä varma. Valtiot, jotka hankkeissa ovat mukana, kuitenkin melko varmasti ylläpitävät jo toimivia järjestelmiään ja toteuttavat suunnittelemansa järjestelmät, koska niissä on kyse sotilaallisesta ja poliittisesta arvovallasta ja suurista taloudellisista eduista.

Venäläinen Glonass-järjestelmä otettiin käyttöön vähän GPS-järjestelmän jälkeen 1990-luvulla. Järjestelmää on mahdollista käyttää paikannuksessa maailmanlaajuisesti. Glonass-järjestelmä ei ole aivan yhtä kattava kuin GPS-järjestelmä. Kesäkuussa 2012 toimivia Glonass-satelliitteja on 24, kun samanaikaisesti on 31 toimivaa GPS-satelliittia. Glonass-järjestelmän ylläpidossa on ollut välillä suuria taloudellisia ja teknisiä ongelmia. Ylläpidon vaikeudet liittyvät osaksi satelliittien lyhyeen käyttöikään. Tällä hetkellä toimivien Glonass-satelliittien keski-ikä on noin kolme vuotta, kun GPS-satelliittien keski-ikä on noin 10 vuotta. On kuitenkin varmaa, että Venäjä tulee ylläpitämään ja kehittämään järjestelmäänsä. Glonass-järjestelmä täydentää GPS-järjestelmää erityisesti hankalissa mittaustilanteissa, kun satelliittien näkyvyydessä on ongelmia.

Euroopan Unioni rakentaa oman Galileo-paikannusjärjestelmänsä. Sen ensimmäinen testisatelliitti ammuttiin avaruuteen vuoden 2005 lopulla. Kaksi ensimmäistä toimivaa satelliittia laukaistiin 21.10.2011. Vuonna 2012 ollaan laukaisemassa vielä kaksi satelliittia. Täydessä laajuudessaan järjestelmään tulee kuulumaan 30 paikannussatelliittia. Ennen näitä tapahtumia järjestelmän rakentamisessa on ollut suuria ongelmia. Järjestelmän piti olla valmis jo vuonna 2008, mutta nykyisen tiedon mukaan se toimii vuonna 2014/2015, mutta ei kuitenkaan täydessä laajuudessaan. (Kuva 253.)

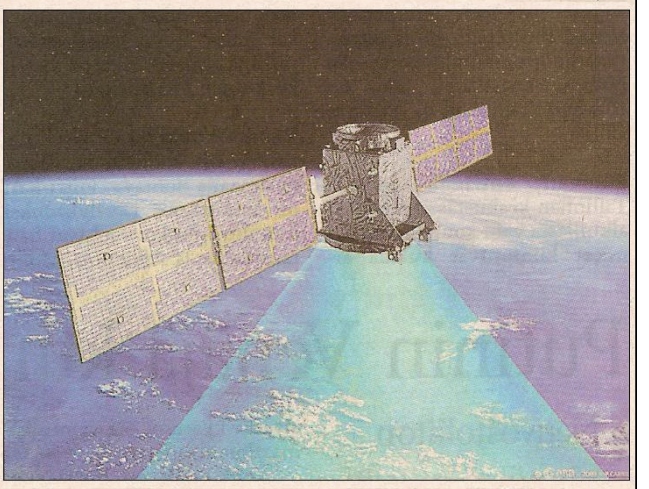
# Galileo-satelliitit ”umpikujassa”

P. CARRIL / AP

## EU:n paikannus-järjestelmälle tulossa lisää julkista rahoitusta

**Petteri Tuohinen**
HELSINGIN SANOMAT

**BRYSSEL.** Euroopan unionin miljardihanke oman satelliittipaikannusjärjestelmän rakentamisesta ajautui keskiviikkona ennen kokemattomiin ongelmiin, kun urakasta vastaavat yhtiöt eivät tehneet asialle mitään torstain määräaikaan mennessä.



**Taiteilijan näkemys Galileo-paikannusjärjestelmän satelliitista.**

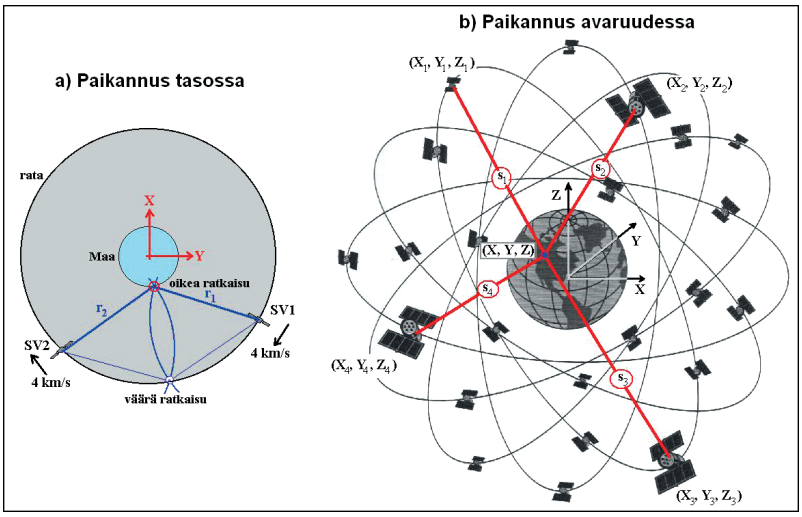
**KUVA 253** *Euroopan Unionin Galileo-paikannussatelliittihanke on edennyt vaivalloisesti. (Helsingin Sanomat 10.5.2007.)*

Ei varmaankaan ole sattumaa, että sekä USA:n aikomat GPS-järjestelmän uudistukset että EU:n Galileo-järjestelmän rakentaminen ajoittuvat samoille vuosille. Molemmilla osapuolilla on selviä poliittisia ja taloudellisia motiiveja kehittää satelliittipaikannusta. Eurooppa rakentaa Galileo-järjestelmänsä, jotta riippuvuus amerikkalaisten järjestelmästä voitaisiin murtaa sekä taloudellisesta että sotilaallisesta näkökulmasta katsoen. Euroopan Unioni hakee suurvallan tunnusmerkkejä. Vastaavia hankkeita on menossa muun muassa Japanissa, Kiinassa ja Intiassa. Paikannuksen käyttäjillä on valinnanvaraa.

## 8.4 Satelliittipaikannuksen mittaustavat

### 8.4.1 Paikannuksen periaate

Satelliittipaikannuksessa havaitaan satelliittien lähettämiä signaaleja. Havaintojen perusteella mitataan etäisyydet vähintään kolmeen satelliittiin. Kun satelliittien sijainti tunnetaan havaintohetkellä, voidaan havaitsijan paikka laskea. Satelliittien paikat lasketaan navigointiviestin tietojen perusteella. Satelliittipaikannus perustuu siis etäisyyksien tai etäisyyserojen mittaukseen. Paikannuksen geometrian kannalta on riittävää mitata etäisyydet kolmeen satelliittiin, mutta mittausten virheiden hallinnan vuoksi tulee mitata etäisyydet useampaan, vähintään neljään, satelliittiin. (Kuva 254.)




**KUVA 254** *Satelliittipaikannus perustuu etäisyyksien mittaamiseen. a) Jos Maa olisi taso, riittäisi etäisyyksien mittaus kahteen satelliittiin. Matemaattisesti ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, mutta maanpinnalla tapahtuvan paikannuksen kannalta oikeita paikkaratkaisuja on vain yksi. b) Kolmiulotteisessa tilassa paikantamisen edellytyksenä on etäisyyksien mittaus vähintään kolmeen satelliittiin.*

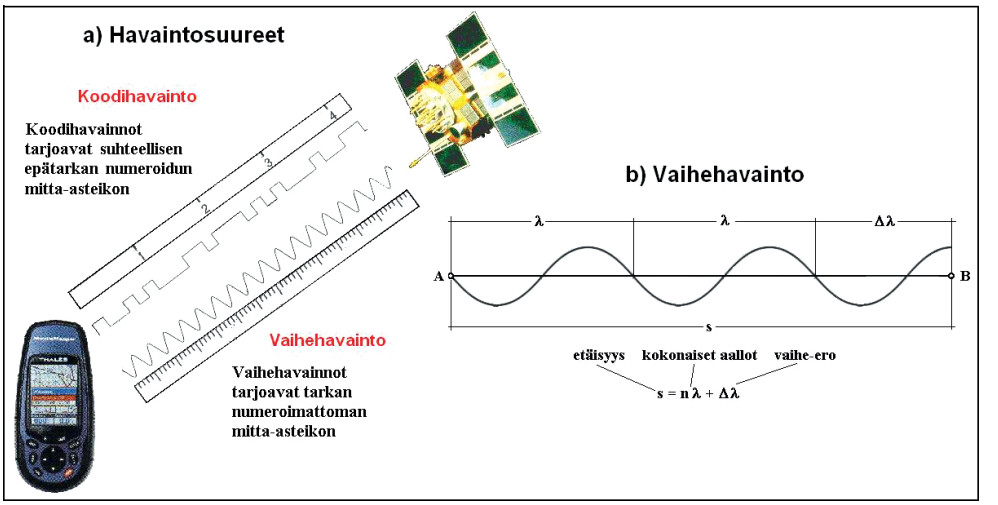
## 8.4.2 Havaintosuureet

Satelliittipaikannuksessa etäisyyksien mittauksessa voidaan hyödyntää joko satelliitin lähettämän signaalin paikannuskoodeja tai kantoaaltoja. Asiat esitellään tässä GPS-järjestelmän mukaisesti, mutta samoja periaatteita noudattavat muutkin GNSS-järjestelmään kuuluvat paikannussatelliitit. Siviilikäytössä käytetään L1-taajuudelle moduloitua C/A-koodia tai kantoaaltoja L1 ja L2. Uuden polven satelliitit lähettävät C/A-koodin myös L2-taajuudella ja käytössä on myös kantoaalto L5.

Paikannuskoodeja ja niistä johdettuja suureita kutsutaan havaintosuureiksi. Havaintosuure on tärkeä paikannuksen tarkkuuteen vaikuttava tekijä, sillä etäisyys satelliittiin tai toiseen satelliittipaikantimeen on teknisesti mahdollista mitata paremmin kuin 1 %:n tarkkuudella aallonpituudesta tai koodijakson pituudesta, jotka ovat:

- P-koodijakson pituus on 29.3 m
- C/A-koodijakson pituus on 293 m
- L1-kantoaallon pituus on 0.19 m
- L2-kantoallon pituus on 0.24 m.

Satelliittipaikannuksen perushavainnot ovat koodihavaintoja tai vaihehavaintoja. Myös näiden perushavaintojen yhdistelmät ovat mahdollisia. Lisäksi vaativimmissa mittauksissa saatetaan käyttää Doppler-havaintoja, jotka perustuvat kantoaaltoon ja kuvaavat satelliitin lähenemis- tai loittonemisnopeutta vastaanottimen suhteen.




**KUVA 255** *a) GPS-paikannuksen havaintosuureet ovat joko koodihavaintoja tai vaihehavaintoja. b) Vaihehavainnoista puhutaan, kun etäisyys satelliittiin tai toiseen vastaanottimeen mitataan paikannussignaalin kantoaallon avulla. Mittaus- ja kartoitustekniikassa käytetään yleensä vaihehavaintoja, koska vain niiden avulla saavutetaan riittävän hyvä mittaustarkkuus.*

Koodihavainnosta puhutaan, kun etäisyys mitataan paikannuskoodin avulla. Paikannuskoodi muodostaa signaaliin tavallaan numeroidun, mutta karkeajakoisen mitta-asteikon. Sen avulla etäisyydenmittaus on teknisesti suhteellisen helppoa. Vaihehavainnoista puhutaan, kun etäisyydenmittaus perustuu satelliitin lähettämän signaalin kantoaallon aallonpituuteen. Kantoaallon aallonpituus on oleellisesti lyhyempi kuin paikannuskoodin jakson pituus. Vaihehavaintojen avulla päästään oleellisesti tarkempaan paikannukseen kuin paikannuskoodin avulla, mutta samalla mittaus tulee teknisesti paljon monimutkaisemmaksi. (Kuva 255, s. 292.)

### 8.4.3 Kolme perusmittaustapaa

Satelliittipaikannuksessa voidaan käyttää useita mittaustapoja eli mittausmoodeja. Mittaustapojen jaottelu perustuu muun muassa mittauksissa käytettäviin havaintosuureisiin, systemaattisten virheiden korjaamistekniikoihin ja havaintolaitteiden lukumääriin. Perusmittaustavat ovat absoluuttinen paikannus, differentiaalinen paikannus ja vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen mittaus. Mittaustapoihin liittyvä suomalainen käsitteistö ei vastaa täysin esimerkiksi englannin ja saksan kielen käsitteitä. Lisäksi laitemyyjien markkinoinnissaan käyttämät käsitteet monimutkaistavat mittaustapojen esittelyä. (Kuva 256, s. 294, taulukko 13, s. 295.)

Absoluuttinen paikannus eli navigointi (GPS, GNSS) on laajimmin käytetty satelliittipaikannuksen mittaustapa. Kyse on peruspaikannuksesta, jota käyttävät eri alojen harrastajat ja ammattilaiset liikkuessaan jalan, autolla tai veneellä. Sitä luonnehtivat seuraavat tekijät:

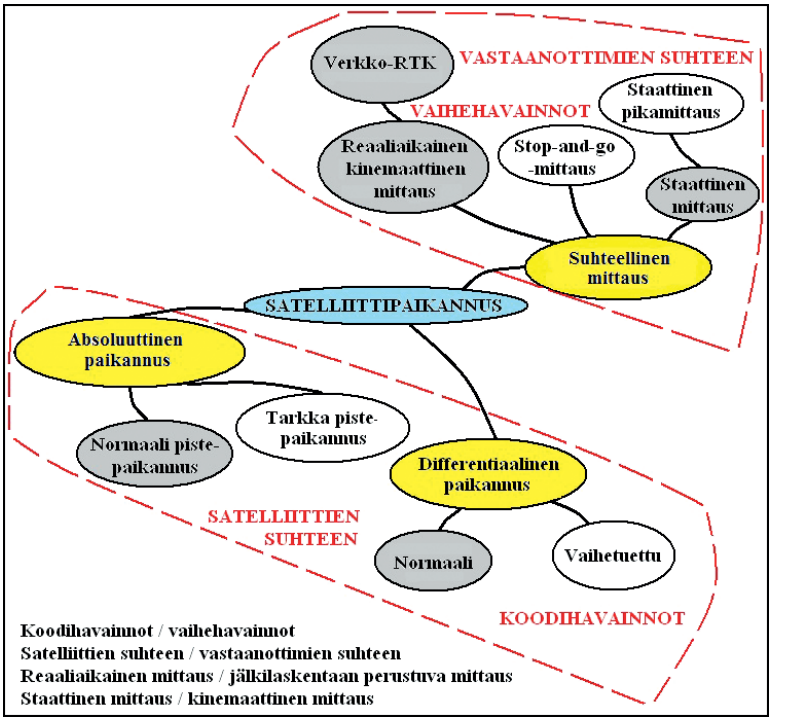
- käyttäjä tarvitsee yhden havaintolaiteen
- etäisyydenmittaus perustuu C/A-koodihavaintoihin
- paikantimen kellovirhe voidaan korjata ylimääräisten etäisyyksien avulla
- paikka lasketaan satelliittien suhteen
- paikannustarkkuus on < 10 m.

Differentiaalisessa paikannuksessa (DGPS, DGNSS) voidaan korjata tietyt mittauksen systemaattiset virheet tunnetulla pisteellä olevan tukiaseman avulla. Differentiaalista paikannusta käytetään muun muassa paikkatietoja kerättäessä (GIS-paikannuksessa) ja ammattimaisessa auto- ja laivaliikenteessä sekä merenmittauksessa. Mittaustapaa luonnehtivat seuraavat tekijät:

- käyttäjä tarvitsee yhden oman havaintolaitteen
- reaaliaikaisessa mittauksessa käyttäjällä tulee olla tietoliikenneyhteys johonkin yleisiä korjauspalveluja tarjoavaan tukiasemaan
- tukiaseman avulla korjataan satelliittilohkoon ja ilmakehään liittyviä virheitä
- etäisyydenmittaus perustuu C/A-koodihavaintoihin
- paikka lasketaan satelliittien suhteen
- paikannustarkkuus on < 0.5–5 m.

Vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen mittaus eli interferometrinen mittaus on tarkin kolmesta perusmittaustavasta. Menetelmää kutsutaan myös relatiiviseksi mittaukseksi. Geofysikaalisissa mittauksissa, geodesiassa, kartoitusmittauksissa, rakentamisen mittauksissa ja koneohjauksessa käytetään lähes aina vaihehavaintoja. Mittaustapaa luonnehtivat:

- kaksi samanaikaisesti toimivaa käyttäjän havaintolaitetta
- paikka määritetään toisen havaintolaitteen eli vertailuvastaanottimen suhteen
- vertailuvastanotin sijaitsee usein tunnetulla pisteellä
- etäisyys toiseen vastaanottimeen mitataan kantoaallon avulla
- paikannustarkkuus vertailuvastaanottimen suhteen on < 0.05 m, parhaimmillaan muutamia millimetrejä.




**KUVA 256** *Satelliittipaikannuksen mittaustavat. Absoluuttinen paikannus, differentiaalinen paikannus ja vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen eli relatiivinen mittaus ovat perusmittaustavat. Lyhyempi muoto ”suhteellinen mittaus” tarkoittaa yleensä samaa kuin ”vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen mittaus”.*

Edellä esitetyt mittaustapojen kuvaukset ovat yleistäviä. Satelliittipaikannuksessa on mahdollista käyttää monin tavoin muodostettuja havaintosuureiden yhdistelmiä, jotka tarjoavat monipuolisia tapoja paikan määrittämiseen. Paikannuksen tarkkuuteen liittyen eri lähteissä voi olla perustellusti toisistaan poikkeavia tietoja. Edellä annetut suuntaa-antavat tarkkuusarviot kuvaavat paikannuksen tarkkuutta

1σ-tasolla. Tällöin 68 % mittausajasta virheet ovat pienempiä kuin annettu arvo. Satelliittipaikannuksen laitteet ovat mittaustapojen osalta joustava. Eri käyttötarkoituksiin löytyy tarkkuudeltaan ja hinnaltaan sopivia vaihtoehtoja. Tarkkuudesta saa maksaa. Halvimmat absoluuttisen paikannuksen laitteet maksavat muutamia kymmeniä euroja ja kalleimmat suhteellisen paikannuksen laitteet parikymmentä tuhatta euroa. Satelliittipaikannus on osattu kaupallistaa erittäin hyvin.

**TAULUKKO 13** *Satelliittipaikannuksen perusmittaustapojen vertailua. Suuntaa-antava tarkkuusarvio on annettu 1σ-tasolla.*

| Mittaustapa | Havainto-suure | Paikan laskenta | Virheiden hallinta | Tarkkuus |
|---|---|---|---|---|
| Absoluuttinen paikannus | C/A-koodi | Satelliittien suhteen | Mallintaminen ja toisto | 5–10 m |
| Differentiaalinen paikannus | C/A-koodi | Satelliittien suhteen | Tukiasemakorjaus, mallintaminen ja toisto | 0.5–5 m |
| Suhteellinen mittaus | L1, L2 ja L5 kantoaallot | Vertailu-vastaanottimen suhteen | Erotushavainnot, mallintaminen ja toisto | < 0.05 m |

## 8.5 Absoluuttinen paikannus

### 8.5.1 Sijainnin määritys

Suurin osa satelliittipaikannuksen käyttäjistä määrittää sijaintinsa absoluuttisen paikannuksen periaatteella. Mittaustapa on teknisesti yksinkertaisin ja laitteiltaan halvin kolmesta perusmittaustavasta. Tarkkuudeltaan absoluuttinen paikannus soveltuu harrastekäyttöön ja moniin ajoneuvonavigoinnin sovelluksiin. Absoluuttisen paikannuksen paikannusperiaatteet ovat seuraavat (kuva 254, s. 291):

1. Satelliitit ovat mittauksessa sijainniltaan tunnettuja kohteita, sillä niiden rataparametrit välitetään havaitsijalle osana paikannussignaalia.
2. Havaitsija mittaa etäisyydet vähintään kolmeen satelliittiin.
3. Etäisyydenmittaus perustuu satelliitin lähettämän signaalin kulkuajan mittaamiseen C/A-koodin avulla signaalin viivytystekniikkaa käyttäen.
4. Havaitsijan paikka on satelliittien ja etäisyyksien määrittämien pallopintojen leikkauskohdassa.
5. Mittauksessa tarvitaan kulkuajan mittauksen vuoksi erittäin tarkkoja kelloja.
6. Mittauksessa määritetään havaitsijan paikantimen kellon käyntivirhe mittaamalla etäisyydet geometrian vaatiman kolmen sijasta vähintään neljään satelliittiin.

Havaitsijan paikka voidaan laskea kolmen etäisyyden avulla. Menettelystä käytetään joskus nimitystä avaruustrilateraatio, joka tarkoittaa etäisyyksien avulla tapahtuvaa kolmiomittausta. Ensimmäinen etäisyydenmittaus rajoittaa paikan pallon pinnalle, jonka keskipisteenä on satelliitti ja säteenä mitattu etäisyys. Toinen mittaus rajoittaa paikan ympyrän kaarelle, sillä kahden pallon leikkauskäyrä on ympyrä. Kolmas mittaus rajoittaa paikan kahteen pisteeseen, koska pallo voi leikata ympyrän kahdessa pisteessä. Vaikka mahdollisia paikan ratkaisuja onkin kaksi, oikea ratkaisu on mahdollista valita, koska haettu ratkaisu on yleensä maapallon pinnalla. Toinen ratkaisukohta sijaitsee kaukana avaruudessa ja se muuttuu suurella nopeudella satelliittien rataliikkeen mukana. (Kuva 254, s. 291.)

Matemaattisesti paikannuksen ongelma voidaan esittää hyvin yksinkertaisesti WGS84-järjestelmän suorakulmaisessa koordinaatistossa. Kolme mitattua etäisyyttä voidaan kirjoittaa kolmen sijainniltaan tunnetun satelliitin ja paikantimen koordinaattien avulla seuraavasti:

$$\begin{cases} P_1 = \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2} \\ P_2 = \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2} \\ P_3 = \sqrt{(X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2} \end{cases}, \tag{141}$$

jossa $P_1$, $P_2$ ja $P_3$ ovat mitatut etäisyydet, $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$ ja $(X_3, Y_3, Z_3)$ ovat satelliittien tunnetut sijainnit ja $(X, Y, Z)$ on havaitsijan tuntematon sijainti.

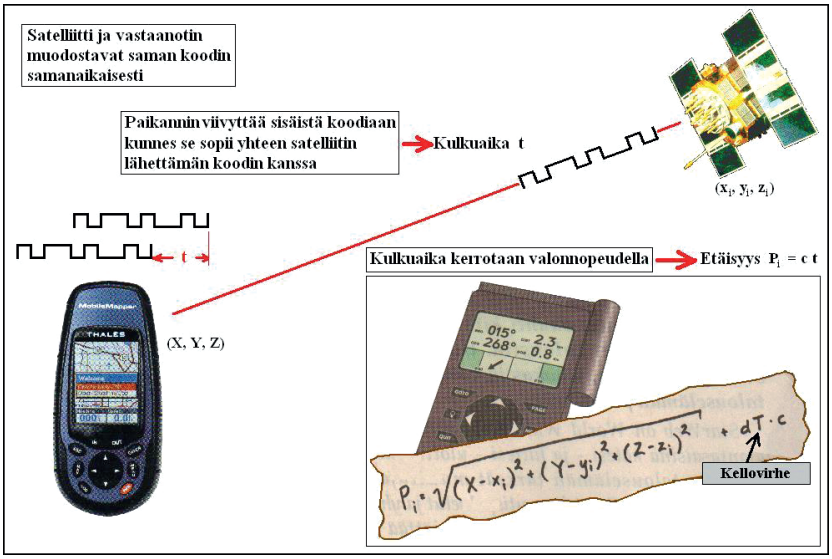
Mitattuja etäisyyksiä kutsutaan usein pseudoetäisyyksiksi eli vale-etäisyyksiksi tai näennäisiksi etäisyyksiksi. Syynä nimitykseen on se, että mitatut etäisyydet voivat olla pahasti virheellisiä havaitsijan kellon käyntivirheen vuoksi. Erityisesti mittauksen alkuvaiheessa etäisyyksien systemaattiset virheet voivat olla suuria.

Kolme etäisyydenmittausta tuottaa kolme havaintoyhtälöä kolmen tuntemattoman ratkaisemiseksi. Paikantimen sijainti on näin mahdollista laskea. Ratkaisuja on kuitenkin kaksi, koska yhtälöt ovat 2. asteen yhtälöitä. Laskentateknisesti paikantimen sijainnin laskeminen on melko haastava tehtävä, vaikka se matemaattisena ongelmana on sinänsä yksinkertainen asia.

### 8.5.2 Signaalin viivytys

Satelliitin lähettämän signaalin kulkuajan mittaus tehdään siviilikäytössä olevilla paikantimilla C/A-koodin avulla. C/A-koodi sisältää 1023 pseudosatunnaista +1 ja –1 tilan sekvenssiä tai jaksoa (kuva 251, s. 287). Koodi toistuu millisekunnin välein. Kun paikannussignaali etenee valon nopeudella, noin 300000 km/s, koodin pituus on noin 300 km. Koodi, sen jaksot ja aika muodostavat tavallaan paikannussignaa-

liin numeroidun mitta-asteikon (kuva 255, s. 286). Jokaisella paikannussatelliitilla on yksilöllinen koodinsa, jonka tuottamistapa on julkinen. Satelliitit voidaan erottaa vastaanottimessa toisistaan signaalin perusteella ja signaalin kopio voidaan tuottaa vastaanottimessa. (Kuva 257).




**KUVA 257** *Absoluuttisessa paikannuksessa mitataan etäisyys satelliittiin C/A-koodia käyttäen signaalin viivytystekniikalla. Paikantimen kellovirhe määritetään laskennallisesti mittaamalla etäisyydet vähintään neljään satelliittiin.*

Etäisyyden mittaus C/A-koodin avulla perustuu tarkkaan ajanmittaukseen. Ajanmittausta varten satelliiteissa on varmuuden vuoksi kaksi tai kolme kelloa. Kellot ovat atomikelloja ja stabiloituja kvartsikelloja. Kellojen käyntivirheitä seurataan jatkuvasti valvonta-asemilla ja käyntivirheet välitetään käyttäjille paikannussignaalin mukana. Satelliittien kellojen tarkkuus on siis hyvä. Paikantimen kello on puolestaan huomattavasti epätarkempi kvartsikello. Se on tarkkuudeltaan samantasoinen kuin rannekellotkin, joten se liukuu vähitellen pois oikeasta ajasta. Paikantimen kellon käyntivirhe voidaan kuitenkin määrittää hyvin yksinkertaisella mittausteknillisellä keinolla mittaamalla etäisyydet vähintään neljään satelliittiin.

Etäisyys paikantimesta satelliittiin mitataan C/A-koodia käyttäen signaalin viivytystekniikalla. Satelliitti ja paikannin muodostavat paikannuskoodin samanaikaisesti olettaen, että niiden kellot käyvät täsmälleen samaa aikaa. Satelliitista tuleva signaali on matkaeron vuoksi myöhässä paikantimen signaaliin verrattuna. Paikannin alkaa viivyttää omaa sisäistä signaaliaan koodin sekvenssi kerrallaan, kunnes paikantimen signaali yhtyy satelliitin signaaliin. Kun yhden sekvenssin ajallinen kesto on noin $10^{-6}$ s, viivytykseen tarvittujen jaksojen lukumäärä voidaan muuttaa aikaeroksi. (Kuva 257, s. 257.)

Kun samanlaisena toistuva C/A-koodin pituus on noin 300 km, etäisyys satelliittiin ($P$) muodostuu kokonaisista koodijaksoista ($n$) ja signaalin viivytyksellä mitatusta osamatkasta ($\Delta P$)

$$P = n \times 300\,\text{km} + \Delta P. \tag{142}$$

Signaalin viivytyksellä mitataan siis ainoastaan osamatka ($\Delta P$). Kokonaisten 300 kilometrin pituisten koodien lukumäärä mitataan suoralla ajanmittauksella ja yrityksen ja erehdyksen keinolla. Kun satelliittipaikannin käynnistetään, siltä kuluu jonkin verran aikaa ennen kuin se pystyy määrittämään matkaan sisältyvät kokonaiset koodit ja paikantimen kellon käyntivirheen. Mittauksen käynnistysvaihetta voidaan kutsua paikantimen alustamiseksi.

Paikannussignaali on melko heikkotehoinen ja C/A-paikannuskoodi on pseudosatunnainen. Koodin näennäisen satunnaisuuden vuoksi eri satelliittien koodit on helppo erottaa toisistaan. Koodin satunnaisuuden vuoksi heikkotehoisenkin signaalin viivytyksessä saavutetaan hyvin selvästi erottuva maksimikorrelaatio, silloin kun satelliitin ja paikantimen koodit osuvat päällekkäin. Paikantimessa viivytys suoritetaan laiteteknisesti korrelaattorin avulla.

### 8.5.3 Paikantimen kellon käyntivirhe

Jotta etäisyydenmittaus satelliittiin onnistuisi, tulee satelliitin ja paikantimen kellojen käydä tarkasti samaa aikaa. Satelliittien kelloja voidaan pitää luotettavina, mutta paikantimen kellon tarkkuus voi olla ongelma. Onneksi paikantimen kellon käyntivirhe voidaan määrittää hyvin yksinkertaisella mittausteknillisellä keinolla. Kun mittaukset kaikkiin satelliitteihin tehdään samanaikaisesti, mahdollinen paikantimen kellon käyntivirhe vaikuttaa kaikkiin mittauksiin yhtä paljon. Virhe on mittaushetkellä luonteeltaan systemaattinen virhe. Jos kolmen etäisyyden sijasta mitataankin etäisyydet neljään satelliittiin, kellon käyntivirhe voidaan mallintaa havaintoyhtälöihin ja ratkaista yhtälöistä:

$$\begin{cases} P_1 = \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2} + c\Delta t \\ P_2 = \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2} + c\Delta t \\ P_3 = \sqrt{(X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2} + c\Delta t \\ P_4 = \sqrt{(X_4 - X)^2 + (Y_4 - Y)^2 + (Z_4 - Z)^2} + c\Delta t \end{cases}, \tag{143}$$

jossa $P_1$, $P_2$, $P_3$ ja $P_4$ ovat mitatut etäisyydet, $(X_1, Y_1, Z_1)$, $(X_2, Y_2, Z_2)$ ja $(X_3, Y_3, Z_3)$ ovat satelliittien tunnetut sijainnit, $(X, Y, Z)$ on havaitsijan tuntematon sijainti, $c$ on valon nopeus ja $\Delta t$ on paikantimen kellon käyntivirhe.

Käytettävissä on neljä havaintoyhtälöä kolmen paikkatuntemattoman ($X$, $Y$ ja $Z$) ja kellon käyntivirheen ($\Delta t$) määrittämiseksi, joten tuntemattomien ratkaisu on mahdollinen. Paikannin määrittää kellovirhettä jatkuvasti ja ajastaa paikantimen kelloa.

### 8.5.4 Absoluuttisen paikannuksen laajennuksia

Absoluuttista paikannusta voidaan avustaa muualta kuin paikannussatelliiteista saatavien tietojen avulla. Periaatteessa mitä tahansa sähkömagneettista signaalia voidaan hyödyntää avusteena. Matkapuhelimiin integroiduissa satelliittipaikantimissa käytetään apuna matkapuhelinverkkopalvelua, jonka lähettämät tiedot nopeuttavat ja tarkentavat paikannusta erityisesti näkemäesteiden rajoittaessa satelliittisatavuutta. Avustettu paikannus on rajallisesti mahdollista myös sisätiloissa. Avusteet voivat olla satelliittien almanakkatietoja, verkko-operaattorilta saatavia karkeita paikkatietoja ja laskentapalvelua. Avustettua satelliittipaikannusta merkitsee lyhenne A-GPS, joka on johdettu englanninkielisestä termistä ”Assisted GPS”.

Yhdellä vastaanottimella tehtävää paikannusta voidaan kutsua pistepaikannukseksi. Absoluuttinen paikannus on C/A-koodin perusteella tehtävää pistepaikannusta. Pistepaikannuksessa voidaan käyttää myös vaihehavaintoja. Tarkka pistepaikannus (PPP, Precise Point Positioning) on yhdellä satelliittivastaanottimella ilman korjauspalveluita tehtävää tarkkaa paikannusta. Paikan laskenta perustuu pitkään havaintoaikaan, usealla taajuudella tehtyihin koodi- ja vaihehavaintoihin sekä tarkkoihin satelliittien ratatietoihin ja kellokorjauksiin. Havaintoajat ovat kymmenistä minuuteista tunteihin ja paikka lasketaan jälkikäteen. Menetelmällä on mahdollista päästä jopa senttimetriluokan paikannustarkkuuksiin.

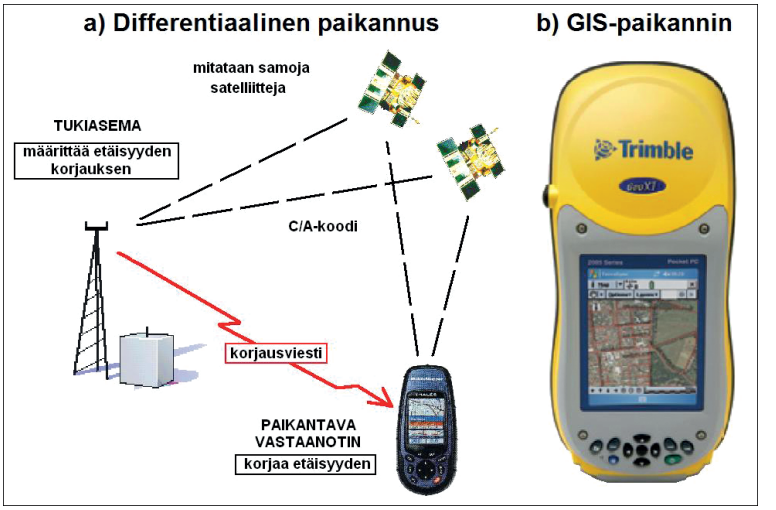
## 8.6 Differentiaalinen paikannus

Differentiaalisessa paikannuksessa (DGPS, DGNSS) etäisyydet satelliitteihin mitataan C/A-koodin avulla, kuten absoluuttisessa paikannuksessa. Lisäksi mittaukseen tulee mukaan tukiasema, joka sijaitsee tunnetulla pisteellä. Kun tukiasema mittaa etäisyyden, se samalla laskee havaintopaikan ja satelliitin tunnettuja koordinaatteja vastaavan etäisyyden. Laskettua etäisyyttä pidetään etäisyyden oikeana arvona. (Kuva 258, s. 300). Mitatun ja lasketun etäisyyden erotuksena saadaan havainnon virhe:

virhe = mitattu etäisyys – laskettu etäisyys. (144)

Tukiasema välittää määrittämänsä virheet paikantavalle vastaanottimelle, joka korjaa mittaamiaan etäisyyksiä:

korjattu etäisyys = mitattu etäisyys – virhe. (145)




**KUVA 258** *a) Differentiaalisen paikannuksen periaate. b) Differentiaalisessa paikannuksessa tarvitaan siihen valmis paikannin. Yleensä paikannin on teknisiltä ominaisuuksiltaan ja ohjelmistoltaan monipuolisempi kuin harrastekäytön paikantimet. Paikkatiedon keruuseen tarkoitettuja paikantimia kutsutaan GIS-paikantimiksi*

Etäisyyksiin tehtävää korjausta (-virhe) kutsutaan differentiaalikorjaukseksi. Menettelyllä voidaan korjata tukiaseman ja paikantavan vastaanottimen yhteiset virheet, jotka ovat havaintohetken systemaattisia virheitä. Yhteiset virheet aiheutuvat lähinnä valvontalohkosta, satelliittilohkosta ja ilmakehästä. Korjattujen etäisyyksien avulla paikantavan vastaanottimen sijainti saadaan laskettua oleellisesti tarkemmin kuin absoluuttisella paikannuksella.

Differentiaalisessa paikannuksessa havaitsija tarvitsee vain yhden oman vastaanottimen, koska sekä Suomessa että maailmalla on tarjolla erilaisia yleisiä tukiasemapalveluita. Differentiaaliseen paikannukseen valmiin satelliittipaikantimen lisäksi havaitsija tarvitsee tietoliikenneyhteyden korjauspalvelun tarjoajaan ja mahdollisesti korjaussignaalin vastaanoton edellyttämän lisälaitteen.

Suomalaisilla satelliittipaikannuksen käyttäjillä on useita vaihtoehtoisia tapoja hankkia reaaliaikaisia differentiaalikorjauksia:

- Indagon Oy:n @Fokus DGNSS-palvelu, jossa korjaukset lähetetään IP-pohjaisena tiedonsiirtona
- Merenkulkulaitoksen palvelu, jossa korjaukset välitetään radiomajakoiden kautta
- Geotrim Oy:n VRS-palvelu
- Leica Geosystems Oy:n SmartNet-palvelu
- Geostationääristen satelliittien kautta saatava differentiaalikorjaus
- Käyttäjä voi perustaa oman tukiaseman, jonka korjaukset välitetään esimerkiksi radiomodeemin kautta.

Aikanaan Indagonin Fokus-palvelu oli toteutettu yhteistyössä Digitan kanssa. Differentiaalikorjaukset välitettiin Radio Suomen verkossa radiolähetyksen RDS-signaalissa. Palvelun perustana oleva Radio Data System (RDS) on kehitetty helpottamaan radion kuuntelua liikkuvassa ajoneuvossa. Sen avulla välitetään esimerkiksi radiovastaanottimille digitaalisessa muodossa ohjelmien seuraamista helpottavia tietoja. Fokus-palvelu on nyt muutettu @Fokus-palveluksi, jossa korjaukset välitetään Internet-yhteyden kautta.

Pohjois-Amerikassa käytetään differentiaalisessa paikantamisessa WAAS-järjestelmää (Wide Area Augmentation System), jossa differentiaalikorjaus välitetään geostationääristen tietoliikennesatelliittien kautta. Euroopassa vastaava järjestelmä on EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay Service). Satelliittien kautta saatavat korjaukset toimivat Suomessa melko huonosti, koska geostationääriset satelliitit ovat alhaalla horisontissa. Ensimmäisissä EGNOS-yhteensopivissa laitteissa jo pienetkin maastoesteet tai rakennukset saattoivat estää korjaussignaalin saamisen. Nykyiset vastaanottimet ovat kuitenkin aikaisempia herkempiä.

Differentiaalisen paikannuksen tarkkuuteen ei oleellisesti vaikuta se mistä korjaus hankitaan, vaikka tukiaseman etäisyydellä onkin tarkkuuden kannalta tiettyä merkitystä. Maanpäällisiin tukiasemiin ja C/A-koodiin perustuvan mittaustavan tarkkuus on < 1 m todennäköisyystasolla 1σ (68 %). Differentiaalisessa paikannuksessa on kuitenkin mahdollista käyttää muitakin havaintosuureita kuin vain C/A-koodia. Differentiaalisen paikannuksen tekniikat ovat siis monimuotoisempia kuin edellä kuvattu perustekniikka. Tarkkuutensa puolesta mittaustapa soveltuu muun muassa yleiseen paikkatietojen keruuseen, merenmittaukseen ja ammattimaiseen auto- ja laivaliikenteeseen.

## 8.7 Suhteellinen mittaus

### 8.7.1 Vaihehavainnot

Absoluuttisessa ja differentiaalisessa paikannuksessa etäisyydet satelliitteihin mitataan C/A-koodin avulla ja vastaanottimen paikka lasketaan satelliittien suhteen. Absoluuttista paikannusta tarkemmassa differentiaalisessa paikannuksessa mitattuja etäisyyksiä korjataan tukiasemalla määritettyjen korjausten avulla. Differentiaalikorjausten avulla voidaan poistaa huomattava osa paikantavan vastaanottimen ja tukiaseman yhteisistä virheistä. Vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen mittaus eroaa näistä kahdesta mittaustavasta kahdella tapaa. Ensinnäkin etäisyydenmittauksessa havaintosuureena on kantoaalto (kuva 255, s. 292). Toiseksi paikantavan vastaanottimen sijainti mitataan toisen vastaanottimen, vertailuvastaanottimen, suhteen. Vaihehavaintoihin perustuvalla suhteellisella mittaustavalla

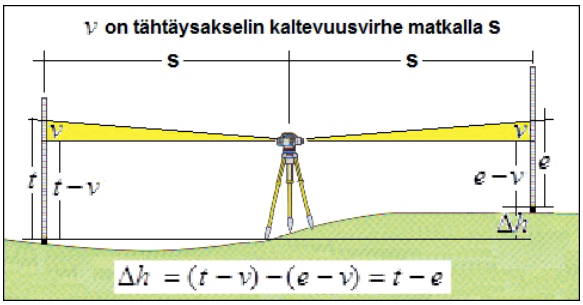
saavutetaan paras mahdollinen tarkkuus. Parhaimmillaan paikannusvirheet ovat vain millimetrejä vertailuvastaanottimen suhteen. Saavutettava tarkkuus vastaa takymetrimittausten tarkkuutta. Toisaalta vaihehavaintoihin perustuva mittaustapa on oleellisesti monimutkaisempi kuin koodihavaintoihin perustuvat mittaustavat. Vaihehavaintoihin perustuvaa suhteellista mittausta käytetään geodesian, geofysiikan, mittaus- ja kartoitustekniikan ja koneohjauksen tehtävissä.

GPS-satelliittien lähettämien signaalien koodit on vaihemoduloitu kahteen kantoaaltoon L1 ($f$ = 1575 MHz, $\lambda$ = 19 cm) ja L2 ($f$ = 1228 MHz, $\lambda$ = 24 cm). Uuden polven GPS-satelliiteissa on käytettävissä myös kantoaalto L5 ($f$ = 1176 MHz, $\lambda$ = 26 cm). Kun kantoaallosta poistetaan koodit, jää jäljelle puhdas kantoaaltovärähtely. Kantoaallon kaikki jaksot ovat identtisiä, mikä mutkistaa sen käyttöä etäisyydenmittauksessa. Kantoaallon havaitsemiseen perustuvaa etäisyydenmittausta kutsutaan vaihe-eromittaukseksi tai interferometriseksi mittaukseksi. Vaihe-eromittauksessa mittayksikkönä on aallonpituus. Mitattu etäisyys muodostuu kokonaisista aallonpituuksista ja vaihe-erosta. Usein sanalla vaihe-ero tarkoitetaan koko mitattua matkaa. (Kuva 251, s. 287 ja kuva 255 b, s. 292.)

Kantoaallon avulla etäisyys vastaanottimesta satelliittiin on periaatteessa mahdollista mitata millimetritarkkuudella. Tällainen tarkkuus on kuitenkin merkityksetön satelliittien suhteen, koska niiden radat tunnetaan paljon huonommalla tarkkuudella ja ilmakehän virhevaikutuksia ei voida täysin hallita. Näistä syistä mittauksen vertailukohta siirretään satelliiteista maanpinnalle toiseen vastaanottimeen. Kun mittaus tehdään toisen vastaanottimen suhteen, puhutaan suhteellisesta mittauksesta.

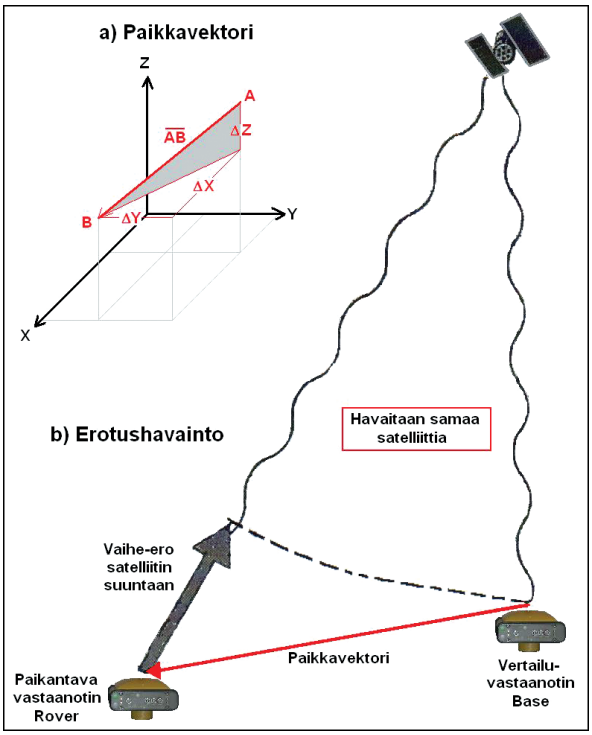
### 8.7.2 Erotushavainnot ja paikkavektori

Suhteellisessa paikannuksessa käytetään varsinaisina havaintosuureina erotushavaintoja. Ne muodostetaan yhdistämällä kahden ajankohdan, vastaanottimen tai satelliitin havainnot. Erotushavainnot ovat alkuperäisten vaihehavaintojen lineaarikombinaatioita. Niitä muodostetaan eri käyttötarkoituksiin tarkoituksenmukaisella tavalla. Erotushavaintojen avulla päästään eroon havaintojen yhteisistä virheistä. Erotushavainnot toimivat vähän samalla tavoin kuin DGPS-paikannuksen differentiaalikorjaukset tai kuin tapahtuu tähtäysakselin kaltevuuden aiheuttamalle virheelle vaaituksessa (kuva 259, s. 303).




**KUVA 259** *Satelliittipaikannuksessa erotushavainto korjaa havaintojen yhteiset virheet samalla tavoin kuin tapahtuu vaaituksessa korkeuseroa laskettaessa tähtäysakselin kaltevuuden aiheuttamalle virheelle.*

Erotushavaintojen avulla määritetään paikantavan vastaanottimen paikkavektori eli koordinaattierot vertailuvastaanottimen suhteen. Yksinkertainen satelliitti-satelliittierotushavainto voidaan tulkita satelliittiin suunnatuksi vektoriksi. Kun havaitaan samanaikaisesti vähintään neljää satelliittia, voidaan erotushavainnoista prosessoida vastanotinten välinen paikkavektori. (Kuva 260)



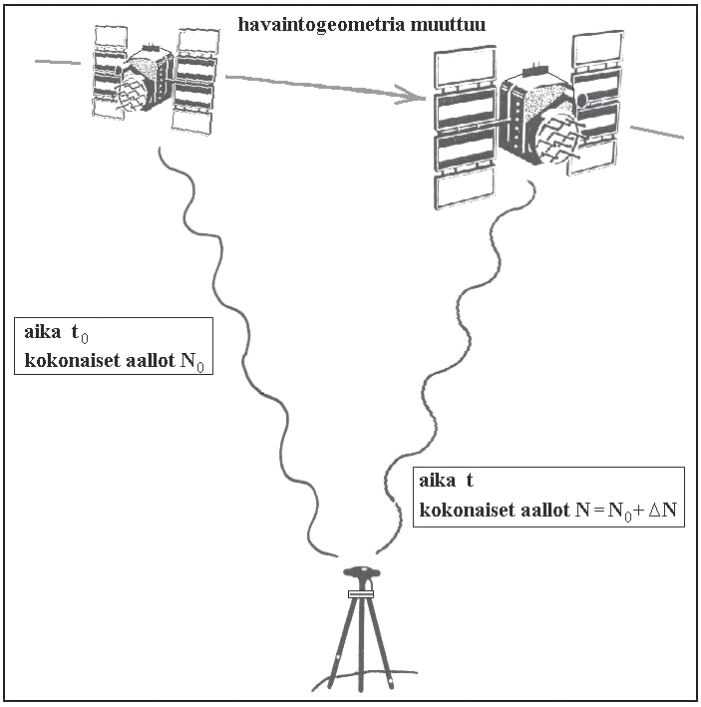

**KUVA 260** *a) Paikkavektori tarkoittaa vertailuvastaanottimen ja paikantavan vastaanottimen koordinaattieroja. b) Yksinkertainen satelliitti-satelliittierotus-havainto voidaan tulkita vastaanotinten etäisyyseroksi satelliitin suhteen. Kun vaihe-erot mitataan vähintään neljän satelliitin suhteen, voidaan paikkavektori laskea havainnoista.*

Suhteellisessa mittauksessa tarvitaan aina vähintään kaksi vastaanotinta. Toista niistä kutsutaan vertailuvastaanottimeksi (base tai reference receiver) ja toista paikantavaksi vastaanottimeksi (rover tai remote receiver). Mittaustulokset saadaan vasta, kun vastaanotinten havainnot on yhdistetty. Vertailuvastaanotin voi sijaita tunnetulla pisteellä, mutta sen sijainti voi olla myös tuntematon. Jos vertailuvastanottimen koodinaatit tunnetaan, saadaan paikantavan vastaanottimen koordinaatit selville lisäämällä mitattu paikkavektori tunnettuihin koordinaatteihin.

### 8.7.3 Alkutuntemattomat ja mittauksen alustus

Kantoaallon vaiheeseen perustuvassa etäisyydenmittauksessa erityisenä ongelmana on matkaan sisältyvien kokonaisten aallonpituuksien ratkaiseminen. Osa-aallonpituus saadaan yksinkertaisesti mittaamalla, mutta kokonaisten aallonpituuksien ratkaisemiseksi satelliitteja pitää seurata riittävän pitkään. Lopulta kokonaisiin aallonpituuksiin päästään käsiksi satelliittigeometrian muutoksen kautta ja käyttämällä hyväksi kaikkia mahdollisia havaintosuureita. (Kuva 261, s. 305.)

Kokonaisten aallonpituuksien ratkaisun yhteydessä puhutaan alkutuntemattomien ratkaisusta (kuva 260, s. 303). Alkutuntematon tarkoittaa kokonaisten aallonpituuksien lukumäärää mittauksen aloitushetkellä. Jokaiseen havaintosuureeseen liittyy oma alkutuntemattomansa. Kun alkutuntemattomat on ratkaistu, sanotaan, että mittaus on alustettu. Tällöin on saavutettu alkutuntemattomille kokonaislukuratkaisu eli fixed-ratkaisu. Fixed-tilassa on jopa millimetrintarkka mittaus mahdollista. Jos alkutuntemattomia ei pystytä ratkaisemaan, saadaan desimaalilukuratkaisu eli float-ratkaisu. Se perustuu C/A-koodiin. Float-ratkaisu ei mahdollista tarkkaa mittausta, vaan tarkkuus jää differentiaalisen paikannuksen tarkkuuden tasolle.




**KUVA 261** *Alkutuntematon ($N_0$) tarkoittaa kokonaisten aallonpituuksien lukumäärä mittauksen aloitushetkellä. Jokaiseen havaintosuureeseen liittyy oma alkutuntemattomansa. Alkutuntemattomat ratkaistaan seuraamalla satelliitteja riittävän pitkään ja käyttämällä kaikkea mahdollista tietoa hyväksi.*

Kun yhteys satelliittiin menetetään, tapahtuu vaihekatko. Tähän voi olla useita syitä, kuten hetkellinen näkemäeste, ionosfäärin häiriö tai voimakas monitieheijastus. Vaihekatkon jälkeen joudutaan alkutuntemattomat ratkaisemaan uudestaan.

## 8.8 Satelliittimittausten tarkkuus

### 8.8.1 Tarkkuuteen vaikuttavat tekijät

Mittausten arvioitu tarkkuus määrittää sen, millaisiin työtehtäviin tiettyä mittaustapaa voidaan käyttää. Mittaustavan ja siihen liittyvien havaintosuureiden lisäksi ainakin seuraavat tekijät tulee huomioida satelliittipaikannuksen tarkkuutta arvioitaessa:

- Maapallo ja havaitsija sen mukana liikkuvat havaintojakson aikana. Samoin satelliitit liikkuvat havaintojakson aikana noin 4 km/s.
- Satelliittien paikka tunnetaan vain rajallisella tarkkuudella. Paikannussignaalin ratatiedot mahdollistavat paikan laskemisen muutaman metrin tarkkuudella.
- Valon nopeus on riippuvainen ilmakehän tilasta. Erityisesti ionosfääri ja troposfääri vaikuttavat signaalin etenemiseen.

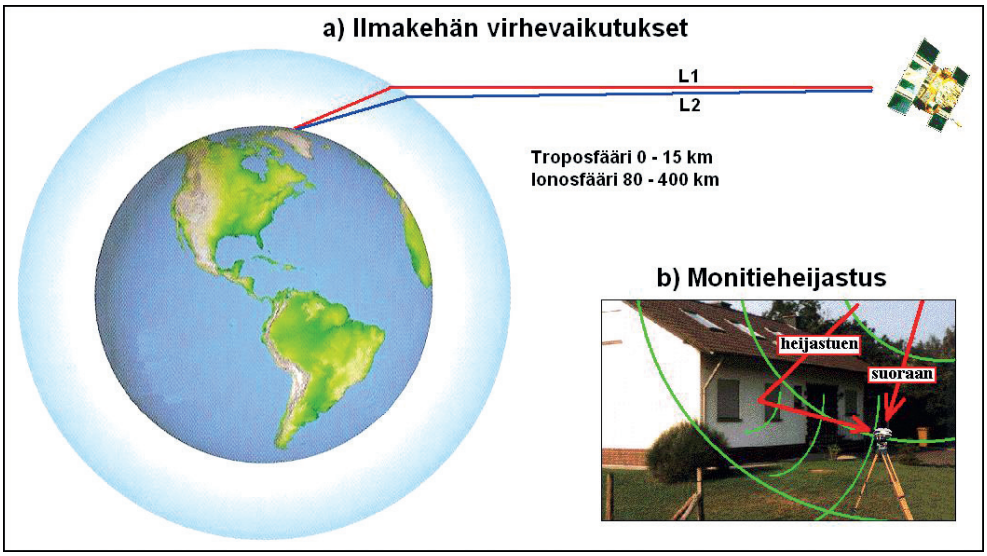
- Satelliittien lukumäärä ja sijainti taivaalla eli satelliittigeometria voi olla mittaukselle epäedullinen.
- Vastaanotettu signaali voi olla heijastunut ympäristöstä. Ilmiöön liittyy termi monitieheijastuminen.
- Vastaanottimien ohjelmistot voivat toimia virheellisesti, kuten mitkä tahansa tietokoneohjelmat. Tai mittaaja käyttää ohjelmia ja laitteita virheellisesti.

Kun paikannusjärjestelmä on kokonaisuudessaan liikkeessä, täsmällinen ajanmittaus mahdollistaa liikkeiden hallinnan. Satelliittien paikan laskenta perustuu tarkkaan ajan mittaukseen ja satelliitin lähettämiin ratatietoihin. Niiden avulla satelliittien paikka pystytään laskemaan muutamien metrien tarkkuudella. Vähitellen ratatietojen tarkkuus on parantunut, kun GPS-järjestelmän valvontalohkon toimintoja on kehitetty. Kaikkein tarkimmissa mittauksissa voidaan jälkikäteen käyttää tarkempia ratatietoja. Niiden perusteella satelliittien paikat tunnetaan muutaman senttimetrin tarkkuudella. Tarkat ratatiedot on mahdollista hankkia internetin kautta. Tarkkoja ratatietoja tarvitaan lähinnä vaativissa kiintopistemittauksissa ja tieteellisiä tarkoituksia palvelevissa mittauksissa, ei tavanomaisissa navigointiin tai maanmittaukseen liittyvissä töissä.

Edellä lueteltujen virhetekijöiden joukosta puuttuu eräs oleellinen virhelähde, koska se on luonteeltaan niin erilainen. Kyse on mittauksessa käytettävistä koordinaatti- ja korkeusjärjestelmistä. Tarkoissa suhteellisissa mittauksissa koordinaatisto ja korkeuksien muuntamiseen liittyvä geoidimalli voivat olla jopa suurin virhetekijä.

### 8.8.2 Ionosfääri ja monitieheijastukset

Maapallon ilmakehä toimii paikannussignaalin etenemisen väliaineena. Rakenteeltaan ilmakehä on kerroksellinen. Erityisesti ionosfääri ja troposfääri vaikuttavat signaalin etenemiseen. Yläilmakehän kerroksiin kuuluvan ionosfäärin tilaan vaikuttaa Auringon hiukkassäteilyn aktiivisuus. Aktiivisen ionosfäärin aikana satelliittipaikannus voi olla jopa mahdotonta, koska signaalin näennäinen kulkumatka vaihtelee liikaa. Troposfääri on ilmakehän alin kerros, jossa ihmisten kokemat sääilmiöt tapahtuvat. Sen vaihteleva vesihöyrypitoisuus aiheuttaa satelliittipaikannukseen virheitä, joita ei voida kunnolla huomioida. Troposfääri voi olla merkittävä virhelähde vuoristoisilla seuduilla korkeuden osalta. Suomen tapaisilla alueilla troposfäärin aiheuttamat virhevaikutukset ovat kuitenkin pieniä, korkeudenmäärityksessä ehkä muutamia senttimetrejä. (Kuva 262 a, s. 307.)




**KUVA 262** *a) Paikannussignaali tulee paikantimeen ilmakehän lävitse. Ilmakehä taittaa signaalia ja häiritsee muutenkin signaalin etenemistä. Suurin virhevaikutus on ionosfäärillä. b) Paikantimen ympäristö voi aiheuttaa heijastuksia, joita kutsutaan monitieheijastuksiksi. Paikantimeen tullut signaali ei ole välttämättä tullut suoraan satelliitista.*

Sähkömagneettisen signaalin eteneminen ilmakehässä on riippuvainen sen aallonpituudesta. GPS-satelliitit lähettävät paikannussignaalia kahdella aallonpituudella. Jos kumpaakin aallonpituutta voidaan käyttää mittauksessa, signaalien kulkuaikaerojen avulla voidaan jossain määrin huomioida ilmakehän virhevaikutukset. Kun absoluuttisessa paikannuksessa käytetään nykyisin vain L1-taajuutta, mittaustavassa ei ole mahdollista korjata ilmakehän ominaisuuksien vaihtelusta aiheutuvia virheitä. Lähitulevaisuudessa tilanne kuitenkin paranee tässä suhteessa, koska C/A-koodi tullaan lisäämään myös L2-taajuudelle.

Paikannussignaalin tulee saapua vastaanottimeen suoraan satelliitista. Signaali voi kuitenkin heijastua ympäristöstä. Erityisesti rakennukset, autot ja vesi voivat heijastaa signaalia. Puhutaan monitieheijastuksista. Heijastukset saattavat aiheuttaa karkeita paikannusvirheitä, joita kuitenkin voidaan vähentää antennitekniikalla ja signaalinkäsittelyn keinoin. Monitieheijastusten vaikutus voi olla pahimmillaan absoluuttisen paikannuksessa 10–20 m suuruusluokkaa. Suhteellisen paikannuksen vaihehavainnoissa monitieheijastusten virhevaikutukset ovat vain muutamia senttimetrejä. (Kuva 262 b,.)

### 8.8.3 Satelliittigeometria

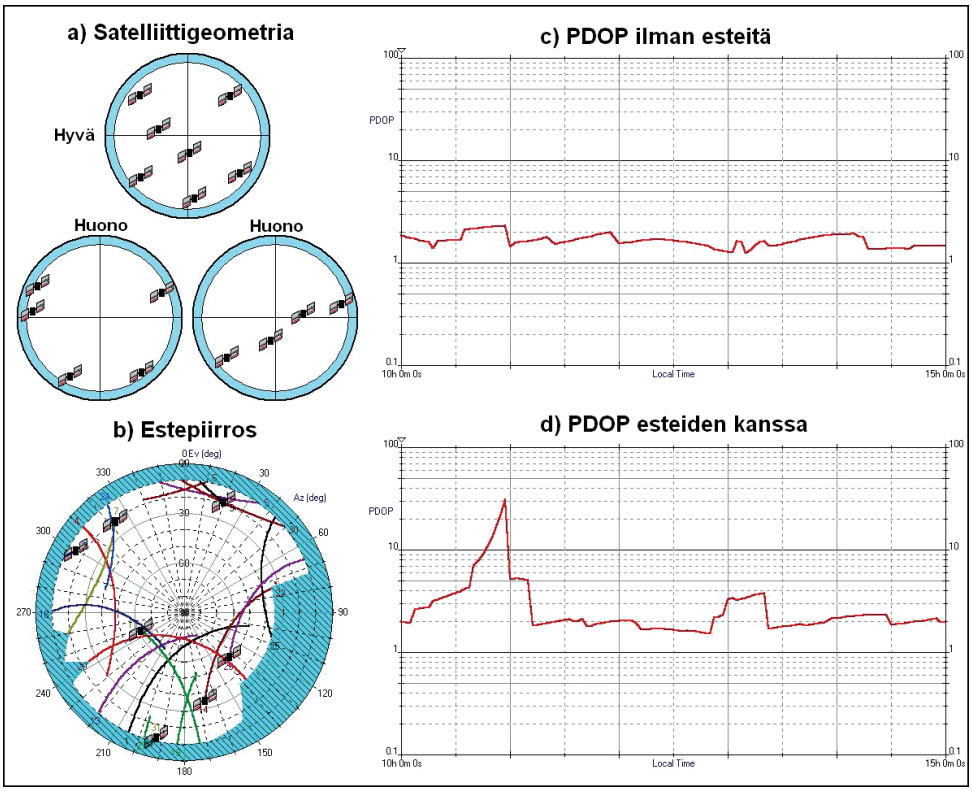
Termi satelliittigeometria viittaa mittauksessa käytettävien satelliittien lukumäärään ja asemaan havaitsijaan nähden. Satelliittisaatavuus on myös termi jota tässä yhteydessä voidaan käyttää. Jos ympäristö on esteistä vapaa, satelliittien lukumäärä ei muodostu ongelmaksi vaan riittävästi satelliitteja on aina käytettävissä paikannukseen. Kaupunkiympäristössä ja metsässä, mikä on erityisesti Suomelle tyypillistä, erilaiset näkemäesteet voivat kuitenkin vaikeuttaa mittauksia, jopa estää ne täysin. Paikannussignaali ei etene, kuten kuunteluun tarkoitettu radiosignaali, häiriintymättä esteiden lävitse.

Havaittavien satelliittien tulee olla selvästi, yli 10°-15° korkeudella, havaitsijan horisontin yläpuolella. Satelliitit eivät saa olla samalla suoralla tai pienialaisessa ryhmässä. Satelliittien tulee olla riittävästi horisontin yläpuolella, koska lähellä horisonttia sijaitsevien satelliittien signaalit kulkevat pitemmän matkan ilmakehässä kuin ylhäällä olevien satelliittien signaalit. Pidemmän kulkumatkan vuoksi ilmakehästä aiheutuvat virheet ovat suurempia lähellä horisonttia kuin ylhäällä horisontista. Tämä vuoksi tarkoissa mittauksissa käytetään havaittavien satelliittien korkeudelle edellä mainittua rajakulmaa, jota kutsutaan katkaisukulmaksi. Paikannuksen tarkkuuden kannalta on edullista, jos ainakin yksi satelliitti on pystysuoraan ylhäällä eli zeniitissä ja muut satelliitit ovat tasaisesti jakautuneina eri suuntiin. Ylhäällä oleva satelliitti vaikuttaa edullisesti korkeustarkkuuteen. (Kuva 263 a, s. 309 ja kuva 264, s. 310.)

### 8.8.4 DOP-luvut

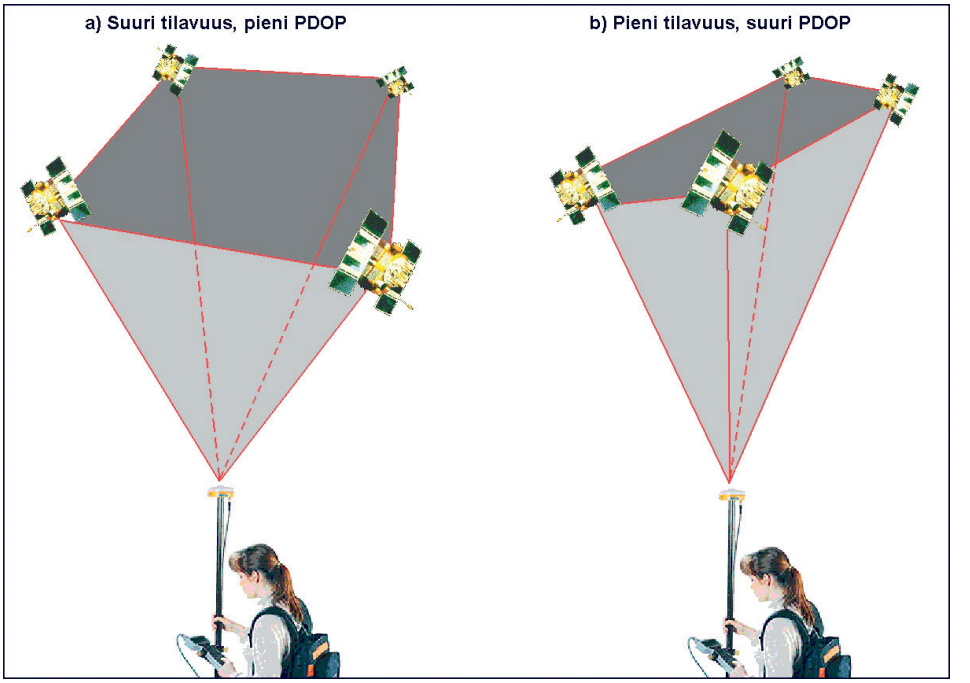
Laskennallisesti satelliittigeometrian vaikutus mittaustarkkuuteen esitetään DOP-lukujen avulla. DOP on lyhenne sanoista Dilution of Precision. Termi tarkoittaa tarkkuuden heikentymistä. DOP-luvut ovat teoreettisia paikannustarkkuutta määrittäviä lukuja. Niihin vaikuttaa vain satelliittien sijainti havaitsijan suhteen. Muilla havainto-olosuhteilla ei ole vaikutusta asiaan Paikannustarkkuus on suoraan verrannollinen DOP-lukuun. Tärkeimmät DOP-luvut ovat:

- HDOP (Horizontal Dilution of Precision) on tasosijainnin epävarmuus
- VDOP (Vertical Dilution of Precision) on korkeussijainnin epävarmuus
- PDOP (Position Dilution of Precision) on paikannuksen eli taso- ja korkeussijainnin yhdistetty epävarmuus.




**KUVA 263** *a) Hyvä ja huono satelliittigeometria. b) Polaariseen napapiirrokseen tehty estepiirros. c) PDOP-luku ilman kuvan esteitä. d) Kuvan esteiden vaikutus PDOP-lukuun. Jos taivaalle on esteetön näkyvyys, satelliittigeometria ei aiheuta ongelmia. Pienehkötkin esteet saattavat hetkellisesti haitata paikannusta. Esteisillä paikoilla mittausajankohta on syytä valita etukäteen jonkin rataennusteohjelman avulla. (Kuvat b-c ovat Pred-ohjelman tulosteita.)*

DOP-lukujen laskenta on matemaattisesti melko vaativa tehtävä. Yleinen sääntö on, että mitä pienempiä DOP-luvut ovat, sitä parempi on satelliittien asema paikannuksen kannalta. Mitään ehdottomia raja-arvoja DOP-luvuille ei ole, mutta jos ne ovat selvästi alle viisi, mittaustilanne on hyvä. Jos DOP-luvut ovat yli 10, tilanne on huono paikannuksen kannalta. Huono satelliittigeometria on nykyisin lähes aina seurausta näkemäesteistä. Näkemäesteiden vaikutusta paikannustarkkuuteen voidaan tutkia rataennusteohjelmien avulla. Suunnitellun mittauspaikan näkemäesteet kartoitetaan ja syötetään ohjelmaan, joka laskee niiden vaikutuksen DOP-lukuihin. Hankalassa kohteessa ennusteohjelman avulla voidaan valita paras mahdollinen mittausajankohta. (Kuva 263 ja kuva 264, s. 310.)

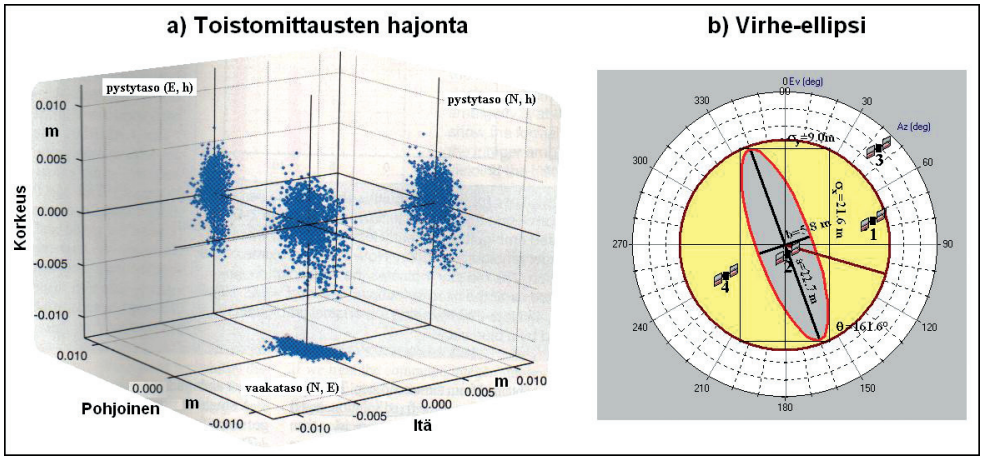



**KUVA 264** *Satelliittigeometrian vaikutusta PDOP-lukuun voidaan havainnollistaa pyramidin tilavuudella, jonka virittävät vastaanotin ja havaittavat satelliitit. Pieni PDOP merkitsee hyvää satelliittigeometriaa ja paikannustarkkuutta.*

### 8.8.5 Paikannuksen tarkkuus

Mittauksen tarkkuus kuvaa virheiden arvioitua suuruutta. Mittauksissa pyritään tilanteeseen, jossa havainnoissa on vain satunnaisia virheitä. Tässä tarkoituksessa systemaattiset virheet pyritään määrittämään ja korjaamaan havainnoista. Karkeat virheet pyritään havaitsemaan ja virheellisiksi epäillyt havainnot hylätään. Jäljelle jäävät satunnaiset virheet ilmenevät mittausten vaihteluna, jonka suuruutta kuvataan normaalijakaumaan perustuvien tunnuslukujen avulla. (Kuva 265, s. 311.)

Mittaustuloksen virheet kasautuvat useista virhelähteistä. Osavirheitä voidaan budjetoida ja yhdistää. Taulukossa 14 (s. 311) tarkastellaan absoluuttisen ja differentiaalisen paikannuksen virhebudjetteja. Taulukossa esitetään etäisyydenmittauksen satunnaiset virheet 1σ-tasolla. Tällä todennäköisyystasolla 68 % mittausajasta virheet ovat pienempiä tai enintään yhtä suuria kuin taulukoitu arvo. Luvut ovat vain virheiden keskimääräistä suuruusluokkaa hahmottavia. Mihinkään yksittäiseen mittaukseen taulukon lukuarvoja ei voi suoraan soveltaa.




**KUVA 265** *Satunnaiset virheet näkyvät mittaustulosten vaihteluna. a) Kuvan toistomittausten hajonta vastaa suhteellisen mittauksen tarkkuutta. b) Tasosijainnin tarkkuutta kuvataan virhe-ellipsin avulla. Virhe-ellipsin avulla voidaan kuvata toistomittausten vaihtelua tai se voidaan johtaa teoreettisista lähtöolettamuksista matemaattisesti. Kuvan virhe-ellipsi vastaa absoluuttisen paikannuksen tarkkuutta. Virhe-ellipsi on voimakkaasti suuntautunut huonon satelliittigeometrian vuoksi.*

**TAULUKKO 14** *Absoluuttisen (GNSS) ja differentiaalisen paikannuksen (DGNSS) virhebudjetit. Lukuarvot kuvaavat etäisyydenmittauksen virheitä 1σ-tasolla (68 %) ja ne ovat vain suuntaa antavia. Virheet on yhdistetty neliöllisesti, myös systemaattisiksi mainitut virheet. Lähde: Hofmann-Wellenhof – Lichtenegger – Wasle 2008, s. 111 ja 436.*

| Virhelähde | Absoluuttinen paikannus (GNSS) | | | DGNSS /m |
|---|---|---|---|---|
| | Systemaattinen / m | Satunnainen / m | Yhteensä / m | |
| Ratatiedot | 2.1 | 0.0 | 2.1 | 0.1 |
| Satelliitin kello | 2.0 | 0.7 | 2.1 | 0.1 |
| Ionosfääri | 4.0 | 0.5 | 4.0 | 0.2 |
| Troposfääri | 0.5 | 0.5 | 0.7 | 0.2 |
| Monitieheijastus | 1.0 | 1.0 | 1.4 | 1.4 |
| Vastaanotin | 0.5 | 0.2 | 0.5 | 0.5 |
| Yhteensä | 5.1 | 1.4 | 5.3 | 1.5 |

Satunnaiset virheiden yhdistämiseen liittyvä laskusääntö on, että osavirheet yhdistetään neliöllisesti. Absoluuttisessa paikannuksessa mitatun etäisyyden virhe on 1σ-tasolla

$$\sigma_R = \sqrt{2.1^2 + 2.1^2 + 4.0^2 + 0.7^2 + 1.4^2 + 0.5^2} = 5.3\,\mathrm{m}, \quad (146)$$

jossa $\sigma_R$ on mitatun etäisyyden keskihajonta ja osavirheet ovat taulukon 14 arvoja.

Taso- ja korkeussijainnin mittaustarkkuuteen vaikuttaa etäisyydenmittauksen lisäksi satelliittigeometria. Sen vaikutus arvioidaan DOP-lukujen avulla. Jos HDOP = 1.5, tasosijainnin virhe on 1σ-tasolla

$$\sigma_P = \sigma_I = \mathrm{HDOP}\sigma_R = 8.0\,\mathrm{m}, \quad (147)$$

jossa $\sigma_P$ viittaa pohjoissuunnan koordinaattiin ja $\sigma_I$ itäsuunnan koordinaattiin.

Jos VDOP = 2.0, korkeussijainnin virhe on 1σ-tasolla

$$\sigma_h = \mathrm{VDOP}\sigma_R = 10.6\,\mathrm{m}. \quad (148)$$

1σ-tasolla voidaan sanoa, että 68 % mittausajasta tasokoordinaattien virhe on < 8 m ja korkeuden virhe on < 11 m. Usein satelliittipaikannuksen tarkkuus ilmoitetaan 2σ-tasolla. Tähän todennäköisyystasoon liittyy 95 % todennäköisyys. Jotta tälle todennäköisyystasolle päästään, tulee edellä saadut luvut kertoa kahdella. Voidaan siis sanoa 2σ-tasolla, että 95 % mittausajasta tasokoordinaattien virhe on < 16 m ja korkeuden virhe on < 21 m.

Kun puhutaan mittausten virheistä ja tarkkuudesta, tulee aina mainita todennäköisyystaso, jolla päätelmät on tehty. Satelliittipaikannuksen yhteydessä tulee kertoa myös DOP-luvut, joihin päätelmät perustuvat. Yleisesti käytetyt virheiden tunnusluvut perustuvat normaalijakauman keskihajontaan. Tällöin ei oteta kantaa virheiden ylärajaan. Hetkellisesti voikin kaikissa satelliittipaikannuksen mittaustavoissa ilmetä poikkeuksellisen suuria virheitä.

Absoluuttisen paikannuksen suurin virhelähde on ionosfääri (arvioitu virhevaikutus 4.0 m, taulukko 14, s. 311). Kun satelliittipaikannuksen tarkkuutta pyritään parantamaan, erityisesti suurimpaan virhelähteeseen tulee pystyä vaikuttamaan. Vielä joitakin vuosia sitten ionosfäärin virhevaikutukseksi absoluuttisessa paikannuksessa arvioitiin noin 8 m, joten asiaan on pystytty vaikuttamaan. Absoluuttisessa paikannuksessa on lähinnä kyse ilmakehän virhevaikutusten aikaisempaa paremmasta mallintamisesta. Differentiaalisessa paikannuksessa ionosfäärin aiheuttamiin virheisiin pystytään puuttumaan differentiaalikorjauksen avulla. Differentiaalisessa paikannuksessa ionosfäärille budjetoitu osavirhe on vain 0.2 m ja mitatun etäisyyden yhdistetty virhe on 1σ-tasolla

$$\sigma_R = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.2^2 + 1.4^2 + 0.5^2} = 1.5\,\mathrm{m}. \quad (149)$$

Kun absoluuttisessa paikannuksessa vastaava luku oli 5.3 m, voidaan todeta, että siirryttäessä differentiaaliseen paikannukseen, tarkkuus paranee absoluuttiseen paikannukseen verrattuna noin neljäsosaan. Tarkkuuden huomattava paraneminen on seurausta suurimpien havaintohetken systemaattisten virheiden kompensoitumisesta. Tukiaseman ja paikantavan vastaanottimen yhteiset virheet poistuvat lähes kokonaan differentiaalikorjauksen avulla. Jäljelle jäävät havaintopaikkaan liittyvä monitieheijastus ja vastaanottimen virhevaikutus. Ilman monitieheijastusta yhdistetty virhevaikutus olisi vain 0.6 m.

Kun huomioidaan DOP-luvut, saadaan koordinaattien arvioidut tarkkuudet. Jos HDOP = 1.5 ja VDOP = 2.0, ovat koordinaattien arvioidut tarkkuudet 1σ-tasolla

$$\sigma_P = \sigma_I = \mathrm{HDOP}\sigma_R = 2.3\ \mathrm{m}, \tag{150}$$

$$\sigma_h = \mathrm{VDOP}\sigma_R = 3.0\ \mathrm{m}, \tag{151}$$

jossa $\sigma_P$ viittaa pohjoissuunnan koordinaatin, $\sigma_I$ itäsuunnan koordinaatin ja $\sigma_h$ korkeuden keskihajontaan.

1σ-tasolla voidaan sanoa, että 68 % mittausajasta tasokoordinaattien arvioitu virhe on differentiaalisessa paikannuksessa < 2 m ja korkeuden virhe on < 3 m. Vastaavasti voidaan sanoa 2σ-tasolla, että 95 % mittausajasta tasokoordinaattien virhe on < 5 m ja korkeuden virhe on < 6 m.

### 8.8.6 Suhteellisen mittauksen tarkkuus

Vaihehavaintoihin perustuvan suhteellisen mittauksen yhteydessä, tarkkuus esitetään usein suhteellisena tarkkuutena. Suhteellisella mittaustavalla voidaan parhaimmillaan määrittää kahden pisteen keskinäinen asema 0.1 ... 1 ppm:n suhteellisella tarkkuudella. Tavanomaisten suhteellisten mittausten tarkkuudet ovat luokkaa 5 ... 10 ppm (taulukko 15, s. 314). Jos esimerkiksi vastaanotinten välimatka on 10 km eli 10 000 m ja mittauksen suhteellinen tarkkuus on 5 ppm, paikannustarkkuus vertailuvastaanottimen suhteen on tällöin

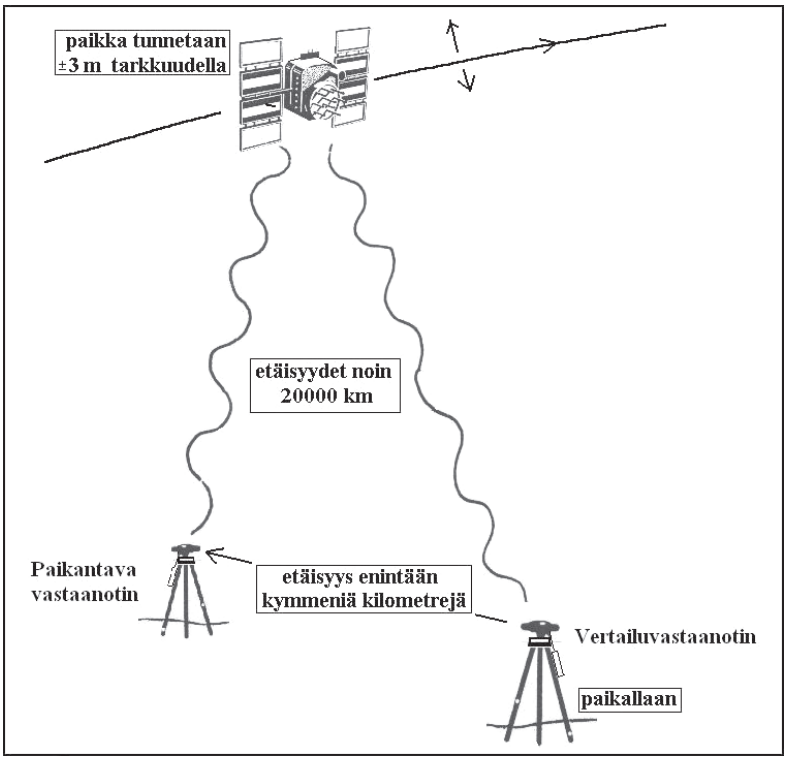
$$5 \times 10^{-6} \times 10000\ \mathrm{m} = 0.05\ \mathrm{m}. \tag{152}$$

Vaihehavaintoihin perustuvassa suhteellisessa mittauksessa on mahdollista saavuttaa todella hyvä sisäinen paikannustarkkuus, mutta tarkkuus voidaan menettää moninkertaisesti siirryttäessä GPS-järjestelmässä käytettävän WGS84-järjestelmän koordinaateista paikallisiin koordinaattijärjestelmiin. Kyse on siitä, millaisilla muunnosparametreilla ja mittauksilla siirrytään koordinaattijärjestelmästä toiseen.

**TAULUKKO 15** *Kahden laitevalmistajan laitteiden tarkkuudet suhteellisessa mittauksessa. Staattisessa mittauksessa laitteet ovat paikallaan ja sijainti lasketaan jälkikäteen. Kinemaattisessa mittauksessa paikantava laite voi liikkua ja sijainti lasketaan reaaliajassa. Tarkkuus on arvioitu 1σ-tasolla (68 % mittausajasta).*

| Laite | Staattinen | | Kinemaattinen | |
|---|---|---|---|---|
| | Taso | Korkeus | Taso | Korkeus |
| Trimble R8 | 5 mm + 0.5 ppm | 5 mm + 1 ppm | 10 mm + 1 ppm | 20 mm + 1 ppm |
| Topcon Hiper Pro | 3 mm + 0.5 ppm | 5 mm + 0.5 ppm | 10 mm + 1 ppm | 15 mm + 1 ppm |

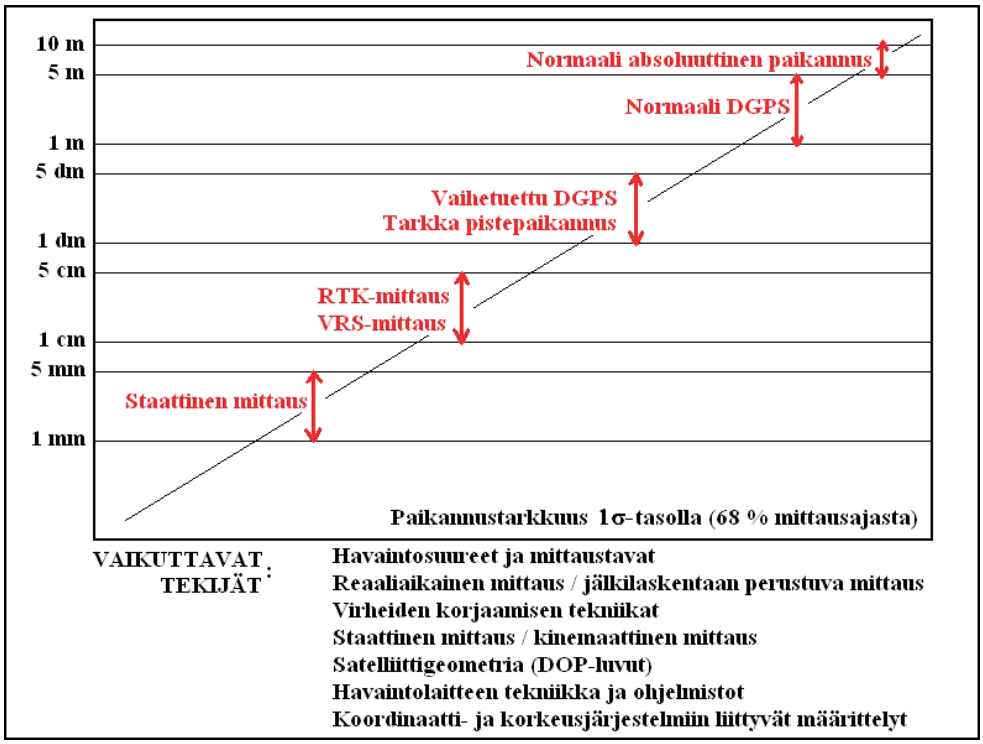
Vaihehavaintoihin perustuva suhteellinen mittaus on tarkin kolmesta perusmittaustavasta. Paras tarkkuus on seurausta kolmesta tekijästä. Ensinnäkin havaintosuureena on kantoaallon vaihe, jota voidaan havaita suurella tarkkuudella. Toiseksi erotushavaintojen avulla voidaan eliminoida pääosa vastaanotinten yhteisistä virheistä. Kolmanneksi vertailukohdan siirtäminen kaukana olevasta, liikkuvasta satelliitista lähellä olevaan, paikallaan pysyvään vastaanottimeen mahdollistaa lopulta hyvän suhteellisen tarkkuuden. (Kuva 266.)




**KUVA 266** *Vertailukohdan siirto satelliitista maanpinnalla olevaan vertailuvastaanottimeen mahdollistaa vaihehavaintoihin perustuvan suhteellisen mittauksen hyvä tarkkuuden.*

### 8.8.7 Yhteenveto

Kuvassa 267 esitetään vielä suuntaa antava yhteenveto satelliittipaikannuksen mittaustapojen arvioiduista tarkkuuksista. Vaihehavaintoihin perustuvien suhteellisten mittausten yhteydessä esiintyy erilaisia lisämääritteitä. Kinemaattisessa mittauksessa vertailuvastaanotin on paikoillaan ja paikantava vastaanotin liikkuu. Reaaliaikaisessa kinemaattisessa mittauksessa (RTK-mittauksessa, Real Time Kinematic) tunnetulla pisteellä oleva vertailuvastaanotin lähettää liikkuvalle paikantavalle vastaanottimelle vaihehavaintonsa. Paikantava vastaanotin prosessoi yhteiset havainnot ja laskee sijaintinsa tukiaseman suhteen. VRS-mittauksessa (VRS on Virtual Reference Station System) käytetään hyväksi yksittäisen tukiaseman sijasta tukiasemaverkkoa. Staattisessa mittauksessa vastaanottimet ovat paikallaan mitattavilla pisteillä koko mittauksen ajan. Havainnot yhdistetään ja lasketaan myöhemmin jälkilaskennassa.




**KUVA 267** *Satelliittipaikannuksen mittaustapojen arvioitu tarkkuus 1σ-tasolla. Kuvan tarkkuusarviot ovat vain suuntaa antavia. Niitä ei voi käyttää minkään yksittäisen mittauksen tarkkuuden arviointiin.*

### 8.8.8 Tehtäviä

**178.** Kuvassa 263 a (s. 309) on kolme satelliittigeometrian laatua kuvaavaa periaatekuvaa. Yksi tilannekuva edustaa hyvää ja kaksi huonoa satelliittigeometriaa. Mihin nämä arviot perustuvat?

**179.** Miksi kuvan 265 b (s. 311) virhe-ellipsi on suuntautunut kuvan esittämällä tavalla?

**180.** Vielä 2000-luvun alussa USA:n puolustushallinto heikensi tahallisesti absoluuttisen paikannuksen tarkkuutta menettelyllä, josta käytettiin nimitystä ”rajoitettu saatavuus” (SA, Selective Availability). Tämän tahallisen heikennyksen arvioitu keskimääräinen virhevaikutus absoluuttisessa paikannuksessa oli keskihajontana ilmaistuna 27.4 m. Mikä olisi absoluuttisen paikannuksen tasosijainnin ja korkeussijainnin tarkkuus todennäköisyystasolla 2σ (95 %), jos USA:n puolustushallinto ottaisi samanlaisen tahallisen heikennyksen uudelleen käyttöön? Tehtävän muut virhevaikutukset on tarkoitus arvioida samalla tavoin kuin taulukossa 14 (s. 311).

**181.** Jos etäisyys satelliittiin mitataan 6.0 m keskihajonnalla ja mittaushetken HDOP-luku on 1.5 ja VDOP-luku on 1.8, millä tarkkuudella taso- ja korkeussijainti voidaan mitata absoluuttisessa paikannuksessa? Anna tarkkuusarvio sekä 1σ- että 2σ-tasoilla.

## 8.9 Reaaliaikaiset kinemaattiset mittaustavat

### 8.9.1 Geodeettiset satelliittivastaanottimet

Tarkoissa suhteellisissa mittauksissa käytettävät satelliittivastaanottimet ovat geodeettisia vastaanottimia. Nykyaikaiset vastaanottimet ovat lähes automaattisesti toimivia tietoteknisiä laitteita. Vastaanotin ottaa näytteitä satelliittien lähettämistä signaaleista säännöllisen aikavälein. Samanaikaisesti se muodostaa sisäistä vertailusignaalia. Paikannin kerää kaikki tarvittavat havaintosuureet (koodi-, vaihe- ja Doppler-havainnot kaikilla taajuuksilla). Jokaista satelliittia ja havaintosuuretta varten laitteessa on oma kanavansa, jonka kautta havainto vastaanotetaan. Kanavia voi olla useita satoja. Mitä enemmän paikannussatelliitteja on käytettävissä, sitä enemmän kanavia vastaanottimissa pitää olla. (Kuva 268, s. 318.)

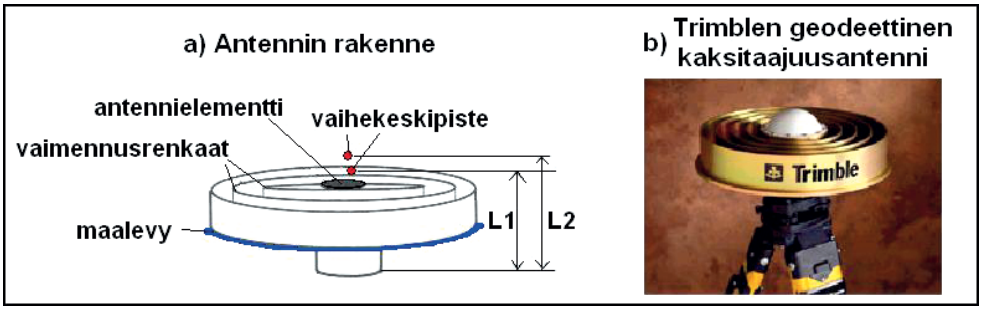
Suhteellisessa mittauksessa vastaanottimen on päästävä kiinni kantoaallon vaiheeseen. Suurin osa ensimmäisen sukupolven vastaanottimista käytti niin sanottua neliöintitekniikkaa, jossa signaali kerrotaan itsellään. Ne ovat kuitenkin kadonneet markkinoilta, koska menetelmän signaalikohinasuhde on huono. Suositeltavampi tapa on käyttää koodikorrelaatiota. Menetelmän käytön edellytys on, että vastaanottimessa voidaan tuottaa paikannuskoodien täsmälliset kopiot. Tässä suhteessa P-koodin salaus tuo ongelmia. Siviilikäytön laitteiden valmistajat pystyvät tuotta-

maan riittävän oikean kopion P-koodista. Menetelmien yksityiskohdat ovat kuitenkin patentein suojattuja ja näin ollen salaisia.

Satelliittivastaanottimissa on sisäänrakennettu antenni. Tukiasemakäytössä ja erityisen vaativissa mittauksissa vastaanottimeen voidaan liittää myös ulkoinen geodeettinen antenni. Antennin tehtävänä on vastaanottaa satelliiteista horisontin yläpuolelta tulevat paikannussignaalit. Antennien suunnittelussa on tärkeää huomioida monitieheijastusten eli ympäristöstä heijastuneiden signaalien vähentäminen. Häiriöt tulevat yleensä alhaalta päin ja niihin voidaan vaikuttaa kolmella tavalla: maalevyn, vaimennusrenkaiden ja antennin suuntakuvion avulla. Maalevyllä, joka on antennin pohjassa, vaimennetaan alhaalta päin tulevia heijastuksia. Samaan pyritään myös vaimennusrenkailla, jotka sijaitsevat symmetrisesti antennielementin ympärillä. Antenni lähettää suuremmalla teholla tiettyihin suuntiin ja vastaanottaa paremmin tietyistä suunnista tulevaa säteilyä. Tätä ominaisuutta kuvaa antennin suuntakuvio. Se pyritään suunnittelemaan sellaiseksi, että antenni vahvistaa alhaisilla korkeuskulmilla tulevaa signaalia mahdollisimman vähän. (Kuva 269, s. 318.)

Tarkoissa mittauksissa pitää tuntea antennin fyysisen keskipisteen ja vaihekeskipisteen ero. Antenni keskistetään mittauspisteelle fyysisen keskipisteen suhteen. Mittaus taas tapahtuu vaihekeskipisteen eli antennin sähköisen keskipisteen suhteen. Yleensä nämä pisteet eroavat toisistaan. Vieläpä L1- ja L2-taajuuksilla on omat vaihekeskipisteensä ja niiden paikka vaihtelee muun muassa satelliitin suunnan mukaan. Laitevalmistajien antamista tiedoista selviää kunkin laitteen osalta fyysisen keskipisteen ja vaihekeskipisteiden erot. (Kuva 269, s. 318.)

**KUVA 268** *Kaksi Topconin geodeettista satelliittivastaanotinta oheislaitteineen. Laitteita voidaan käyttää RTK-mittaukseen ja staattiseen mittaukseen.*




**KUVA 269** *a) Geodeettisen satelliittiantennin rakenne. b) Trimblen geodeettinen kaksitaajuusantenni. Kuvan antenni on erillinen antenni, joka liitetään kaapelilla vastaanottimeen. Vaihekeskipiste on paikka, johon havaintosuureet kohdistuvat. L1- ja L2-taajuuksien vaihekeskipisteet ovat eri paikassa.*

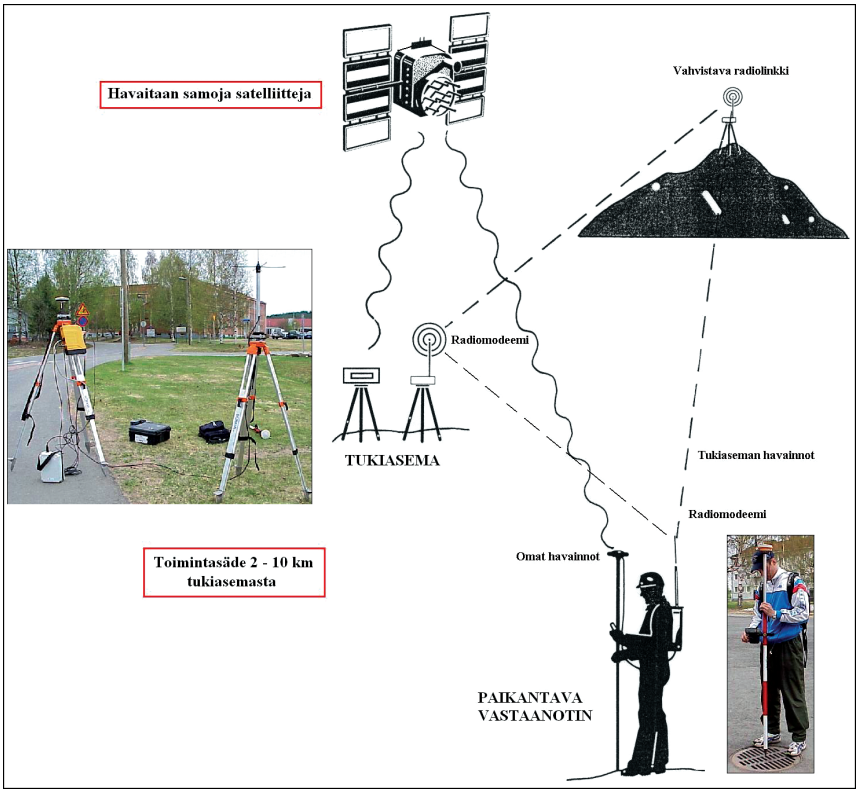
### 8.9.2 RTK-mittaus

Reaaliaikainen kinemaattinen mittaus eli RTK-mittaus (Real Time Kinematic) on mittaus- ja kartoitustekniikassa käytettävä perusmenetelmä. RTK-mittaus sopii tarkkuutensa puolesta hyvin muun muassa kartoitus- ja maastomallimittauksiin. Myös merkintämittauksissa RTK-mittausta käytetään yleisesti, kuten myös koneohjauksessa. Perinteisessä RTK-mittauksessa tarvitaan tunnetulla pisteellä sijaitseva vertailuvastaanotin eli tukiasema. Tukiasemalla oleva vastaanotin lähettää mittaamansa vaihehavainnot paikantavalle vastaanottimelle. Paikantava vastaanotin ratkaisee alkutuntemattomat ja muut mittauksessa tarvittavat suureet reaaliajassa. (Kuva 270, s. 320.)

Tukiaseman ja paikantavan vastaanottimen välillä tulee olla tiedonsiirtoyhteys. Yhteys voidaan toteuttaa radiomodeemin tai matkapuhelinverkon välityksellä. Maastosta riippuen toimintasäde on radiomodeemin avulla muutamia kilometrejä, enintään kymmenen kilometriä. Matkapuhelinverkkoa käytettäessä välimatkalla ei ole merkitystä, mutta itse mittaustavan rajoitukset estävät pitkien yli 20 km etäisyyksien käytön.

RTK-mittaus on vaativa mittaustapa sekä laskennan että tiedonsiirron suhteen. Liikkuvan vastaanottimen pitää pystyä ratkaisemaan alkutuntemattomat ”lennosta”. Mittauksessa käytetään hyödyksi kaikkia mahdollisia havaintosuureita. Nykyisellä tekniikalla tarvitaan vain alle minuutin havainnot, jotta alkutuntemattomat saadaan ratkaistua. Välimatkan kasvaessa tukiasemaan, kasvaa myös alkutuntemattomien ratkaisuaika eli alustusaika. Menetelmä on kriittinen myös satelliittien lukumäärän suhteen. Tukiasemalla ja liikkuvalla vastaanottimella tulee olla seurannassa vähintään viisi yhteistä satelliittia, mutta käytännössä vasta 6 – 7 yhteistä satelliittia antaa riittävän luotettavan tuloksen.

Perinteistä yhteen tukiasemaan perustuvaa RTK-mittausta voidaan suorittaa enintään 20 km etäisyydellä tukiasemasta. Toimintasäteen ylärajan määrittävät ionosfäärin häiriöt. Kaupunkialueilla ja muilla esteisillä paikoilla, kuten metsissä, näkemäesteet ja monitieheijastukset voivat haitata RTK-mittausta

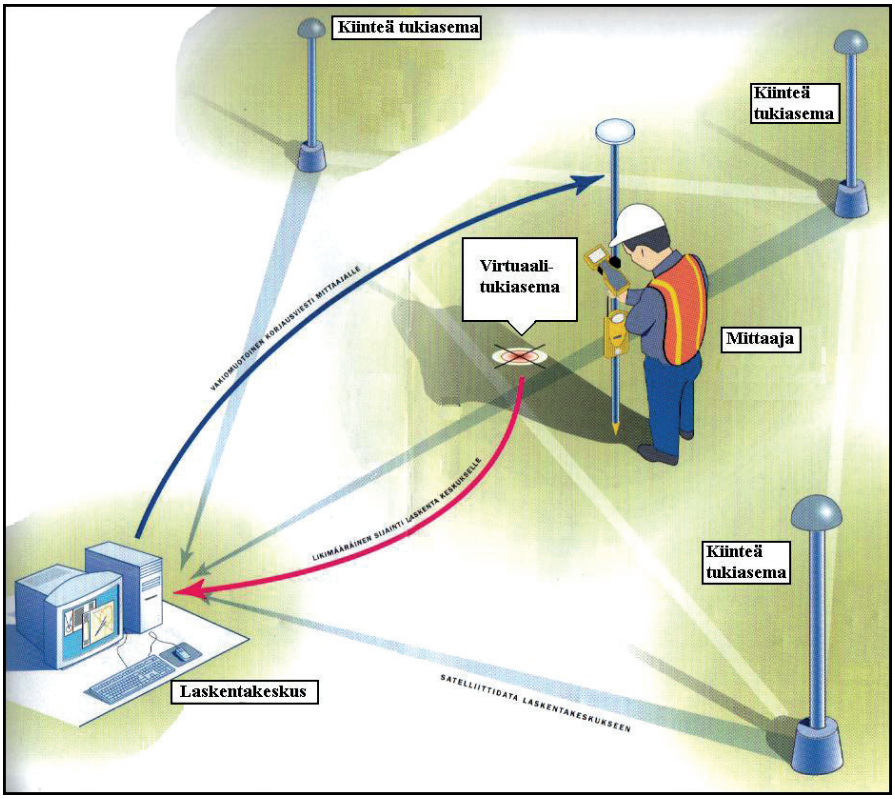



**KUVA 270** *Perinteisen yhteen tukiasemaan perustuvan reaaliaikaisen kinemaattisen mittauksen periaatekuva.*

## 8.9.3 Verkko-RTK-mittaus

Reaaliaikaista kinemaattista mittausta voidaan tehdä vain melko rajallisella alueella tukiaseman ympäristössä ionosfääriin liittyvien virheiden ja häiriöiden vuoksi. Usein jo noin 10 km:n etäisyys tukiasemaan on liian suuri ja 20 km:n etäisyydellä mittaus on mahdollista vain poikkeuksellisen edullisissa olosuhteissa. Noin 10–20 km etäisyydellä tukiasemasta ionosfääriin liittyvät virheet alkavat olla samaa suuruusluokkaa kuin paikannussignaalin kantoaallon pituus. Tällöin kokonaisten aallonpituuksien eli alkutuntemattomien ratkaisussa ei voida saavuttaa riittävän luotettavaa tulosta.

Ilmakehään liittyviä virheitä on kuitenkin mahdollista hallita paremmin, kun yhden tukiaseman sijasta käytetään tukiasemien verkostoa. Kun RTK-mittausta tehdään tukiasemaverkossa, puhutaan verkko-RTK-mittauksesta. Tukiasemaverkon avulla voidaan mallintaa ilmakehän virheitä niin, että ionosfääriin ja troposfääriin liittyviä virheitä pystytään korjaamaan. Tämä mahdollistaa entistä pidemmät etäisyydet tukiasemiin, parantaa mittausten luotettavuutta ja nopeuttaa mittauksia.




**KUVA 271** *Trimblen VRS-järjestelmän toimintaperiaate (Geotrim Oy:n esite). Järjestelmää voidaan käyttää kaikkien laitevalmistajien laitteilla.*

Erästä tukiasemaverkostoratkaisua kutsutaan VRS-järjestelmäksi (Virtual Reference Station System). Järjestelmä laskee jokaiselle mittaajalle oman virtuaalisen tukiaseman lähelle mittauspaikkaa. Trimblen VRS-järjestelmä on kokonaisuus, joka sisältää vastaanottimet varusteineen, ohjelmiston ja tiedonsiirtotekniikan. Järjestelmä toimii pääpiirteissään seuraavasti (kuva 271):

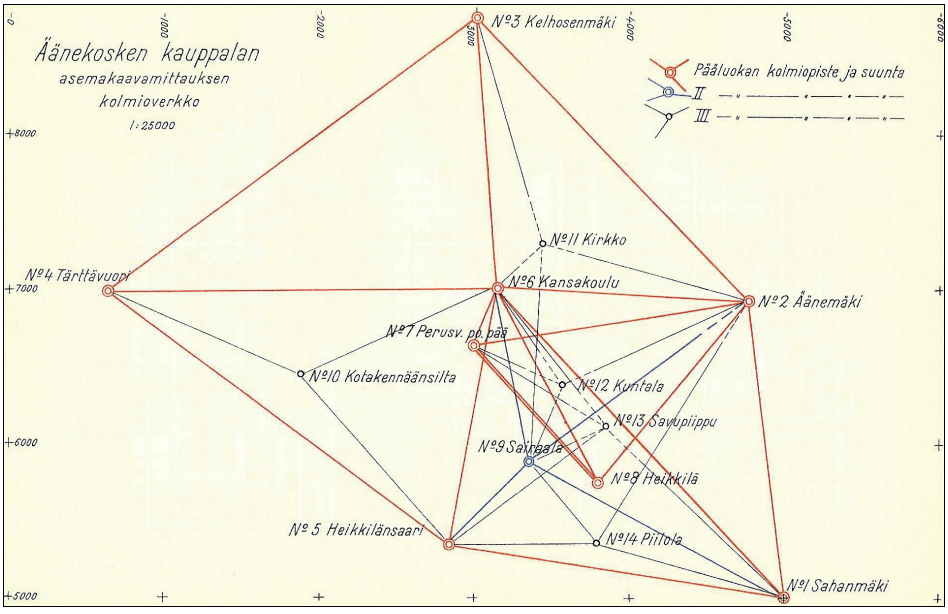
- Kiinteät tukiasemat lähettävät satelliittidatan laskentakeskukseen.
- Mittaaja lähettää matkapuhelinverkossa likimääräisen sijaintinsa laskentakeskukselle.
- Laskentakeskus prosessoi kiinteiden tukiasemien lähettämää dataa, käyttää mittaajan likimääräistä sijaintia virtuaalitukiaseman muodostamiseen mittaajan lähelle ja lähettää korjausdatan mittaajalle.
- Virtuaalitukiasema on kuvitteellinen tukiasemapiste, joka lasketaan erikseen jokaiselle mittaajalle. Pisteen suhteen lasketaan mittaajan saama korjausdata.
- Mittaaja vastaanottaa korjausdatan laskentakeskukselta. Keskuksen korjausdata simuloi paikallisen tukiaseman lähettämää dataa.

Trimblen VRS-verkko, jota ylläpitää Geotrim Oy, on käytettävissä koko Suomessa. Siihen kuuluu noin 100 tukiasemaa. Pohjois-Suomessa on joitakin alueita, joilla verkon toiminnassa voi ilmetä ongelmia. VRS-verkon käyttö RTK-mittauksissa on yleistynyt Suomessa nopeasti. Maanmittauslaitos, muut valtion organisaatiot, kunnat ja mittausalan yritykset käyttävät laajasti VRS-verkkoa hyödyksi mittauksissaan. VRS-verkon käyttäjälle riittää pelkkä paikantava vastaanotin. Omaa tukiasemaa ei enää tarvitse ostaa, kuten perinteistä RTK-mittausta tehtäessä. Näin mittauskustannukset pienenevät perinteiseen RTK-mittaukseen verrattuna. VRS-verkon avulla voidaan tulevaisuudessa tehdä myös runkomittauksia nykyistä tehokkaammin, sillä verkon tukiasemat muodostavat tarkan runkoverkon, jonka jokaisella pisteellä on jatkuvasti toimiva satelliittivastaanotin.

Vuodesta 2012 alkaen Suomessa on mahdollista tehdä verkko-RTK-mittauksia myös Leica Geosystems Oy:n ylläpitämässä SmartNet-verkossa. Siihen kuuluu yli 100 tukiasemaa ja se kattaa koko Suomen.

# 9 TASORUNKOMITTAUS

Runkomittausten avulla tehdään mittauspaikalle koordinaatisto ja korkeuksien vertailutaso. Mittausten yhteydessä maastoon rakennetaan pysyviksi tarkoitettuja pistemerkkejä (kiintopisteitä eli runkopisteitä), joille mitataan koordinaatit ja korkeudet halutussa koordinaatti- ja korkeusjärjestelmässä. Runkomittauksia tarvitaan maailmanlaajuisesti, valtakunnallisesti ja paikallisesti. Laadukkaat runkomittaukset luovat edellytykset yleisesti paikkatietojen hyödyntämiselle ja erityisesti tarkoille kartoitus-, maastomalli- ja rakennusmittauksille. Kirjan aikaisemmissa luvuissa on käsitelty enemmän tai vähemmän yksityiskohtaisesti useita runkomittauksiin liittyviä aiheita, kuten kiintopisteitä (s. 8), pisteselityskorttia (s. 10), runkoverkkoa ja runkomittauksia (s. 12), pienimmän neliösumman menetelmää (s. 75), koordinaatti- ja korkeusjärjestelmiä (s. 133) ja jonovaaitusta korkeusrunkomittausmenetelmänä (s. 223). Tässä luvussa tarkastellaan runkomittausten merkitystä, mittausohjeita, tasorunkomittauksia ja erityisesti jonomittausta esimerkkinä kulman- ja etäisyydenmittaukseen perustuvista, takymetrillä tehtävistä tasorunkomittauksista. Luvussa esitellään myös takymetrihavaintojen esikäsittelyyn liittyvät asiat. Nykyisin suurin osa tasorunkomittauksista tehdään paikannussatelliittien avulla. Satelliittimittauksiin perustuvia runkomittauksia käsitellään vain hyvin yleisellä tasolla. (Kuva 272.)




**KUVA 272** *Äänekosken kauppalan asemakaavamittauksen kolmioverkko (Maanmittaushallitus 1951, s. 108). Kiintopisteet mitataan ryhminä. Tasokiintopisteet muodostavat runkoverkkoja, jotka ovat geometrialtaan monikulmiojonoja, jonoverkkoja tai kolmioverkkoja.*

# 9.1 Tasorunkomittaukset

## 9.1.1 Runkomittausten merkitys

Kiintopisteitä häviää jatkuvasti. Eriaikoina toteutetut mittaukset voivat johtaa tarkkuudeltaan epähomogeeniseen runkoverkkoon. Voi syntyä ongelma-alueita, joissa tarkka mittaus ei ole mahdollista. Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmät vaihtuvat. Jollekin alueelle voi syntyä uusia mittaustarpeita, joita olemassa oleva runkoverkko ei palvele. Runkoverkkoja pitää siis uudistaa ja ylläpitää. Toisaalta kehittyvä mittaustekniikka voi myös vähentää runkomittausten tarvetta. Monet ovat sitä mieltä, että tarkoissa reaaliaikaisissa satelliittimittauksissa käytettävät GNSS-asemat vähentävät paikallisten runkomittausten tarvetta. On varmaa, että paikannuksen infrastruktuurin kehitys ja entistä tarkemmat mittaustekniikat vaikuttavat runkomittauksiin, mutta ei ole itsestään selvää miten ne vaikuttavat ja missä laajuudessa.

Runkomittaukset ovat sekä havaintojen keruun että laskennan kannalta vaativia mittauksia, joten on luonnollista että niitä ohjataan mittausohjeiden avulla. Mittausohjeita tarvitaan rationalisoimaan töiden suoritusta ja niiden avulla todetaan töiden vaatimusten ja sopimusten mukainen suorittaminen. Tämän kirjan aihepiiriin liittyvät mittaukset ovat sellaisia, että niihin voidaan yleensä soveltaa kaavoitusmittausohjeita. Uusimmat kaavoitusmittausohjeet ovat vuodelta 2003. Vanhemmillakin ohjeilla on merkitystä, sillä niiden mukaan mitattuja runkopisteitä käytetään edelleen. Nykyisiä ohjeita on myös helpompi ymmärtää, kun tuntee ohjeiden kehityshistoriaa. Ohjeet muuttuvat ajan ja teknisen kehityksen mukana. Parhaillaan ollaan laatimassa uusia tasorunkomittauksen ohjeita ”Kiintopistemittaus EUREF-FIN – koordinaattijärjestelmässä”. Muuttuvan tilanteen vuoksi mitään yksittäisiä ohjeita ei tässä yhteydessä haluta liian voimakkaasti tuoda esille.

## 9.1.2 Mittausohjeet ja kiintopisteiden luokittelu

Perinteisesti runkomittausten tarkoituksena on ollut luoda kiintopisteverkko kartoitusten että rakentamiseen liittyvien paikalleenmittausten suorittamista varten. Nykyisin runkomittausten merkitystä voidaan arvioida yleisemminkin paikkatietojen hyödyntämisen näkökulmasta. Runkomittaukset ovat sekä havaintojen keruun että laskennan kannalta vaativia mittauksia, joten on luonnollista, että niitä ohjataan mittausohjeiden avulla. Mittausohjeita tarvitaan rationalisoimaan töiden suoritusta ja niiden avulla todetaan töiden vaatimusten ja sopimusten mukainen suorittaminen. Yleisimmät Suomessa käytetyt ja käytettävät ohjeet ovat seuraavat:

- Maanmittaushallituksen kiertokirjelmä 5/74 vuodelta 1974
- Kaavoitusmittausohjeet vuodelta 1983
- Numeerisen kartoituksen maastomittausohjeet vuodelta 1991
- Talonrakentamisen runkomittauksiin liittyvä standardi SFS-ISO 4463-1

- Kaavoitusmittausohjeet vuodelta 2003
- Mittausalalla toimivien yritysten ja organisaatioiden sisäiset ohjeet

Vuonna 2012 tullaan hyväksymään uusi tasorunkomittauksiin liittyvä julkisen hallinnon suositus ”Kiintopistemittaus EUREF-FIN –koordinaattijärjestelmässä”. Mutta vanhoillakin ohjeilla on vielä merkitystä, sillä niiden mukaan mitattuja pisteitä käytetään edelleen. Lisäksi uusimpiakin mittausohjeita on helpompi ymmärtää, kun tuntee niiden kehityshistoriaa.

Kaikkia mittauksiin liittyviä asioita ei kerrota ohjeissa ja mitkään ohjeet eivät ole mittaustöissä pakollisia, vaan niitä käytetään sopimuksen mukaan. Mittausten tarkkuus ja tulosten yleinen luotettavuus varmistetaan laadunvalvonnalla, jonka suorittamista mittausohjeet tukevat. Mittausohjeiden lisäksi laadunvalvonta perustuu hyvään mittaustapaan. Se tarkoittaa sitä, että mittauksissa sovelletaan käytännössä hyviksi koettuja mittausmenetelmiä ja yleisesti hyväksyttyä mittausteknillistä tietoa. Mittausohjeet ja hyvän mittaustavan noudattaminen luovat pohjan runkomittausten onnistuneelle suorittamiselle.

Valtakunnalliset ja kunnalliset taso- ja korkeusrunkomittaukset ja kiintopisteet jaetaan hierarkkisiin luokkiin. Ensimmäinen luokka on aina ylin luokka ja sitä pidetään myös tarkimpana luokkana. On jonkin verran ongelmallista, että runkomittausten luokittelussa on ajoittaisia muutoksia, mutta asian kanssa on mahdollista tulla toimeen. Runkomittausten yleiset luokitteluperusteet ovat seuraavat (taulukot 1, s. 12 ja 16, s. 326):

- Mittauksen hierarkia. Mittauksen lähtöpisteiden tulee olla vähintään samaa luokkaa kuin määritettävien pisteiden, mutta mieluimmin ylemmin ylemmän luokan pisteitä.
- Mittauksen rakenne. Mittauksen rakennetta kuvaavat pisteiden lukumäärät, etäisyydet ja yleensä pisteiden keskinäinen asema toisiinsa nähden.
- Mittauksen suoritus. Mittauksen suoritukseen liittyvät muun muassa havaintojen toistokerrat ja kojeiden tarkkuus.
- Mittauksen tarkkuus. Mittausohjeissa annetaan raja-arvoja erilaisille tarkkuuden tunnusluvuille, joita ovat ohjeista riippuen sulkuvirheet, jäännösvirheet, toistomittausten erot, suureiden keskihajonnat ja pistevälien suhteelliset tarkkuudet.
- Runkopisteiden rakenne. Ohjeissa saatetaan kertoa, miten pisteet merkitään ja millaiselle alustalle ne rakennetaan.

**TAULUKKO 16** *Kiintopisteiden luokittelu valmisteilla olevassa julkisen hallinnon suosituksessa "Kiintopistemittaus EUREF-FIN –koordinaattijärjestelmässä". Tässä uusimmassa luokituksessa kiintopisteet voivat olla joko aktiivisia (pysyvät FinnRef- tai GNSS-asemat) tai passiivisia kiintopisteitä.*

| Luokka | Kiintopisteiden kuvaus | |
|---|---|---|
| E1 | **Pysyvät FinnRef-asemat** | |
| | Geodeettisen laitoksen EUREF-FIN –tihennyspisteet 1996-1997 | |
| E1b | Geodeettisen laitoksen EUREF-FIN –tihennyspisteet 1998-1999 | |
| E2 | Maanmittauslaitoksen ja Merenkulkulaitoksen EUREF-FIN –tihennyspisteet | **Pysyvät GNSS-asemat** |
| E3 | Maanmittauslaitoksen ja Merenkulkulaitoksen EUREF-FIN –tihennyspisteet ja kuntien ylemmät peruskiintopisteet | |
| E4 | Kuntien alemmat peruskiintopisteet | |
| E5 | Kuntien ylemmät käyttökiintopisteet | |
| E6 | Kuntien alemmat käyttökiintopisteet | |

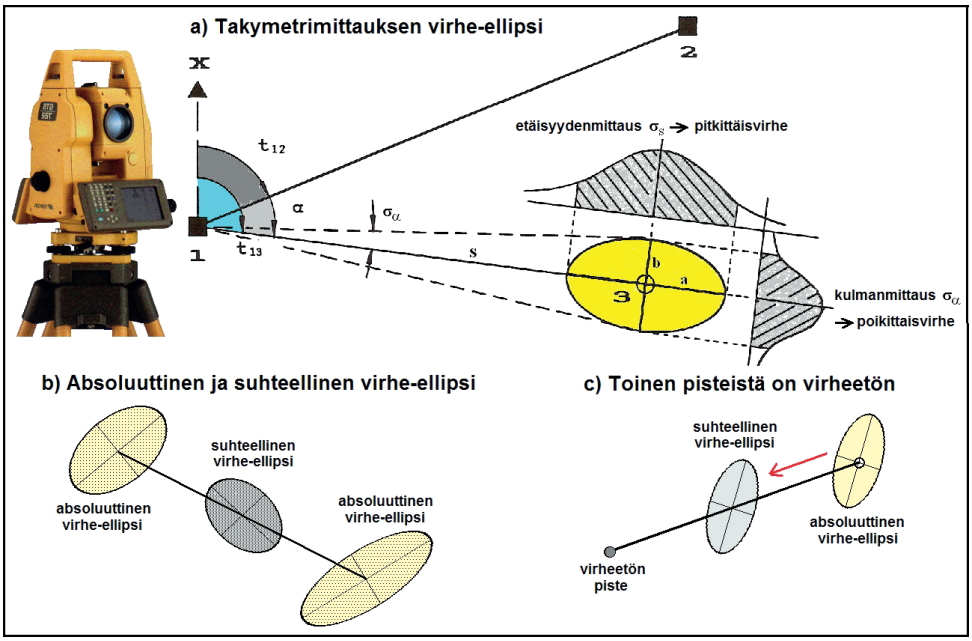
### 9.1.3 Absoluuttinen ja suhteellinen virhe-ellipsi

Runkomittauksissa kiinnitetään erityistä huomiota tulosten luotettavuuteen ja tarkkuuteen. Tasosijainnin tarkkuutta kuvataan virhe-ellipsien avulla. Virhe-ellipsejä on kahdenlaisia. Absoluuttinen virhe-ellipsi kuvaa koordinaattien arvioidut virheet virheettömien lähtöpisteiden suhteen. Suhteellinen virhe-ellipsi kuvaa pistevälin koordinaattierojen arvioidut virheet. Tällöin tarkastellaan pisteiden välisten koordinaattierojen $\Delta X = X_j - X_i$ ja $\Delta Y = Y_j - Y_i$ todennäköisiä virheitä ja niistä johdettua virhe-ellipsiä. Sen isompaa puoliakselia käytetään esimerkiksi kaavoitusmittausohjeissa (2003) mittausten luokittelussa. Standardivirhe-ellipsistä puhutaan, kun virhe-ellipsi määrittää koordinaattien tai koordinaattierojen vaihtelualueen 39 %:n todennäköisyydellä.

Takymetrimittauksessa virhe-ellipsien muodostuminen voidaan kuvat pitkittäis- ja poikittaisvirheiden avulla. Pitkittäisvirhe vaikuttaa tähtäyksen suunnassa ja sen suuruus on sama kuin etäisyydenmittauksen keskihajonta. Poikittaisvirhe vaikuttaa tähtäyssädettä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Sen suuruus on

$$b = s\sigma_\alpha , \qquad (153)$$

missä $b$ on poikittaisvirhe, $s$ on tähtäysmatka ja $\sigma_\alpha$ on kulmanmittauksen keskihajonta radiaaneina. Poikittaisvirhe on suoraan verrannollinen etäisyyteen. Tähtäysetäisyydestä riippuu onko virhe-ellipsin isoakseli pitkittäisvirheen vai poikittaisvirheen suuruinen. (Kuva 273, s. 327.)

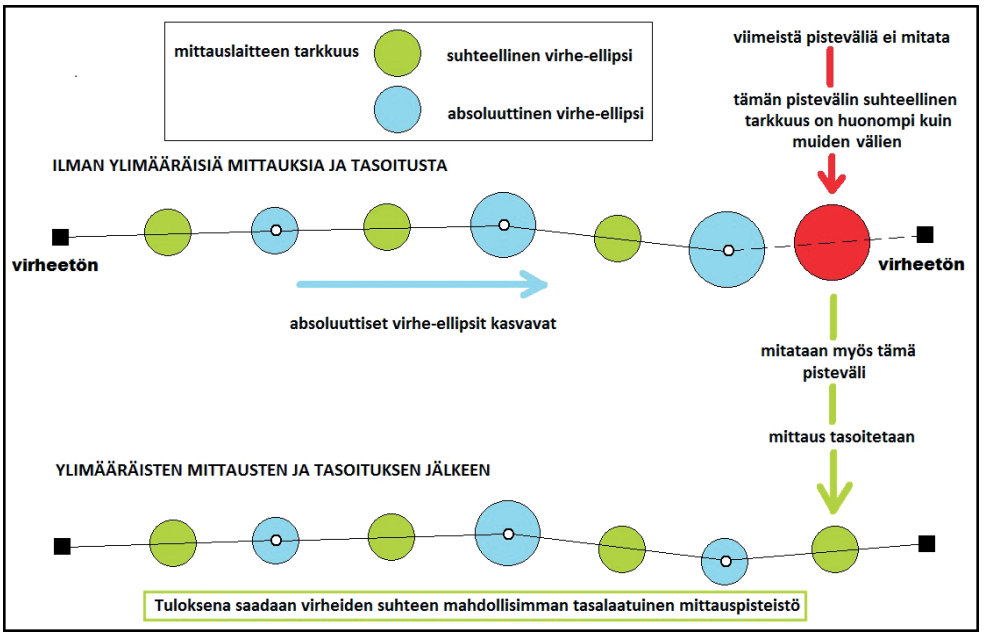



**KUVA 273** *a) Takymetrillä mitattaessa absoluuttinen virhe-ellipsi voidaan kuvata pitkittäis- ja poikittaisvirheiden avulla. Standardivirhe-ellipsi esittää mitatun pisteen (3) sijainnin 39 %:n todennäköisyydellä virheettöminä pidettyjen lähtöpisteiden (1 ja 2) suhteen. b) Koordinaattierojen tarkkuutta kuvaava suhteellinen virhe-ellipsi johdetaan absoluuttisista virhe-ellipseistä virheiden kasautumissääntöjen perusteella. c) Jos pistevälin toisessa päässä on virheetön piste, suhteellinen virhe-ellipsi on sama kuin virheellisen pisteen absoluuttinen virhe-ellipsi. Esimerkiksi a-kuvan absoluuttinen virhe-ellipsi on myös pistevälin suhteellinen virhe-ellipsi.*

Suhteellinen virhe-ellipsi voi olla oleellisesti pienempi kuin absoluuttiset virhe-ellipsit silloin, kun koordinaateilla on paljon yhteisiä virheitä. Suhteellinen tarkkuus voi siis olla hyvä vaikka absoluuttinen tarkkuus olisikin huono. Esimerkiksi rakentamisen mittauksissa, mutta myös monissa muissa paikallisissa mittauksissa, on tärkeämpää hyvä suhteellinen tarkkuus lähipisteiden suhteen kuin tarkkuus yleisen koordinaatiston suhteen.

### 9.1.4 Kiintopisteet mitataan ryhmänä

Seuraavaksi tarkastellaan todennäköisten virheiden käyttäytymistä ja tasoituksen merkitystä jonomittauksessa, jossa mittauskojeena on takymetri. Pistevälien suhteellinen tarkkuus määräytyy takymetrin tarkkuuden perusteella. Mittausten jälkeen havainnot tasoitetaan, jotta saadaan virheiden suhteen mahdollisimman tasalaatuinen mittauspisteistö. (Kuva 274, s. 238.)




**KUVA 274** *Tasosijainnin todennäköiset virheet jonomittauksessa ennen ja jälkeen tasoituksen. Kuva on periaatekuva, siihen ei liity mitään täsmällisiä lukuarvoja. Absoluuttiset virheet kasvavat mittauksen etenemissuunnassa. Viimeisen pistevälin suhteellinen tarkkuus on huonompi kuin muiden pistevälien, koska sitä rasittavat kaikki mittauksen virheet. Mittauksen tasoittaminen jakaa todennäköiset virheet uudelleen ja kaikkien pistevälien suhteellinen tarkkuus on mittauslaitteen tarkkuus.*

Luotettavuus kuvaa tarkasteltavan systeemin kykyä toimia oikein. Mittausten luotettavuudessa on kyse karkeiden virheiden paikannettavuudesta ja havaitsemattomien karkeiden virheiden vaikutusten arvioinnista. Ylimääräiset havainnot parantavat luotettavuutta. Pelkkä havaintojen toisto ei riitä vaan tarvitaan rakenteellista ylimääritystä, jossa mittausta toistetaan eri lähtöpisteiden kautta ja riippumattomien havaintojen kautta.

Ryhmänä mitattujen pisteiden luotettavuus on matemaattisesti arvioitavissa ja parempi kuin yksittäin mitattujen pisteiden luotettavuus. Ryhmänä mitaten saadaan myös tarkkuudeltaan homogeenisempi runkopisteistö kuin yksittäin mitattaessa. Runkomittausten suorittaminen suurehkoissa pisteryhmissä voidaan perustella lisäksi taloudellisiin syihin vedoten.

Mittausohjeet ja hyvä mittaustapa vaativat, että runkomittaukset dokumentoidaan huolellisesti. Laskenta-aineiston pitää olla niin hyvin dokumentoitu, että mittausta pystytään arvioimaan dokumenttien perusteella. Jos kiintopisteet mitataan yksittäin kartoitusmittauksen menetelmin, riittävää dokumentaatiota ei synny.

### 9.1.5 Tasorunkomittausten menetelmät

Tasorunkomittausten avulla mittauspaikalle muodostetaan halutun koordinaattijärjestelmän mukainen koordinaatisto. Koordinaatisto kiinnitetään tasokiintopisteisiin. Tasorunkomittauksissa käytettäviä mittausmenetelmiä ovat staattinen mittaus, kolmiomittaus ja jonomittaus. (Kuvat 13, s. 13, 272, s. 323, 288, s. 349 ja 295, s. 358.)

Tarkkuuden ja runkoverkon yhtenäisyyden vuoksi on tärkeää, että uudet kiintopisteet sidotaan havainnoin toisiin uusiin pisteisiin ja olemassa oleviin kiintopisteisiin. Joskus on kuitenkin perusteltua mitata yksittäisiä runkopisteitä. Yksittäisiä pisteitä voidaan mitata muun muassa geodeettisten leikkausten avulla, vapaan asemapisteen menetelmällä ja reaaliaikaisilla satelliittimittauksilla. Jos mittausalueella kuitenkin on käyttöä useille uusille kiintopisteille, ne on syytä mitata varsinaisia jono- ja verkkomuotoisia runkomittausmenetelmiä käyttäen

Satojen vuosien ajan vaativimmat tasorunkomittaukset suoritettiin kolmiomittauksella. Perinteisessä kolmiomittauksessa tehtiin pääasiassa kulmahavaintoja, koska tarkka pitkien matkojen etäisyydenmittaus ei ollut mahdollista ennen kuin käyttöön tuli radioteknisiä ja elektro-optisia etäisyydenmittauskojeita. Suomessa luovuttiin kolmiomittauksen käytöstä valtakunnallisissa runkomittauksissa jo 1990-luvun alussa, kun GPS-mittaus alkoi yleistyä. Takymetrillä tehtävä kolmiomittaus on mittauksen virheiden hallinnan näkökulmasta erittäin tehokas menetelmä, joten on tietyssä määrin valitettavaa, että sen merkitys runkomittauksissa on vähentynyt. Muun muassa erittäin vaativien rakennuskohteiden runkomittauksissa se on kuitenkin edelleen tarpeellinen menetelmä. Myös erilaisten valvontaverkkojen mittauksissa tarvitaan kolmiomittausta, kun seurataan esimerkiksi padon muodonmuutoksia.

1990-luvulla staattinen GPS-mittaus (nykyisin staattinen GNSS-mittaus) korvasi kolmiomittauksen valtakunnallisissa mittauksissa ja kunnan peruskiintopisteiden mittauksissa. Paikannussatelliitteihin perustuvan runkomittauksen verkko muistuttaa rakenteeltaan kolmiomittauksen verkkoa. Satelliitteihin perustuva staattinen mittaus on tämän päivän kolmiomittausta. Satelliittipaikantimien avulla mitataan kolmioverkon vektoreita eli sivujen pituuksia ja suuntia

Jonomittaukset ovat niin sanottuja alemman luokan tasorunkomittauksia. Jonomittausta käytetään pääasiassa kunnan ja rakennustyömaiden käyttökiintopisteiden mittauksissa. Jonomittaus tuottaa pistejonon, jota voidaan kutsua monikulmiojonoksi. Tämä vuoksi jonomittauksesta käytetään myös nimitystä monikulmiojonomittaus. Jonomittaus on ensisijaisesti tasorunkomittausmenetelmä, mutta jonossa voidaan mitata myös korkeudet trigonometrisen korkeudenmittauksen periaatteella.

Runkomittausten laskenta tapahtuu lähes poikkeuksetta pienimmän neliösumman periaatteen mukaisesti tasoituslaskentana. Kuitenkin jonomuotoisten mittausten (jonovaaitus ja jonomittaus) laskennassa voidaan käyttää pienimmän neliösumman periaatteella johdettuja hieman yksinkertaistettuja tasoitusmenetelmiä. Laskentamenetelmät on johdettu sellaiseen muotoon, että ne soveltuvat käsin laskentaan. Nykyiset mittausohjeet edellyttävät osaksi sellaisten tarkkuuden tunnuslukujen käyttöä, että niiden johtaminen on mahdollista vain tietokonelaskennassa pienimmän neliösumman ratkaisun yhteydessä. Nykyisin on aina perusteltua käyttää runkomittausten laskennassa nykyaikaisia laskentaohjelmia.

## 9.2 Takymetrihavaintojen korjaukset

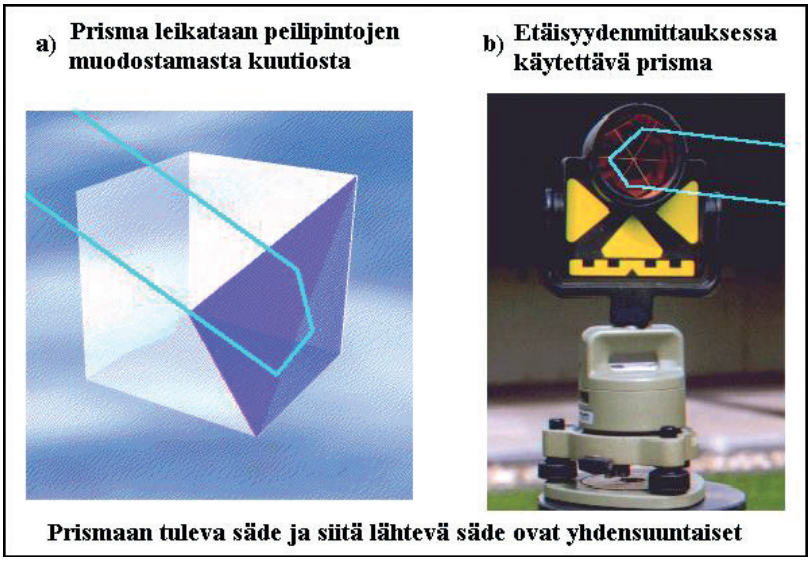
### 9.2.1 Havaintojen esikäsittely

Takymetrillä tehtävien mittausten tarkkuuteen vaikuttavat kojeen tekniset ominaisuudet, keskistys (luotiminen, kojekorkeuden mittaus), sääolosuhteet, havaintojen toisto ja koordinaattijärjestelmän huomiointi. Havaintokojeen ilmoitettua tarkkuutta ei ole mahdollista saavuttaa, jos mittausolosuhteisiin liittyviä korjauksia ei tehdä.

Runkomittausten laskennassa tarkkuuteen vaikuttavat tekijät pitää huomioida. Nämä huomioidaan havaintojen esikäsittelyn yhteydessä. Esikäsittelyn tarkoitus on laskea havaintojen keskiarvot, tehdä tunnettujen systemaattisten virheiden korjaukset, huomioida karttaprojektion vaikutukset ja arvioida havaintojen tarkkuus tasoituslaskennan alkupainojen (a priori tarkkuuden) määrittämistä varten. Havaintoihin tehtäviä korjauksia kutsutaan reduktioiksi. Vaakasuuntahavaintojen esikäsittelyyn liittyy erityinen laskentamenetelmä, jota kutsutaan asematasoitukseksi. Sen perusteella määritetään sarjahavaintoina tehtyjen suuntahavaintojen tarkkuus.

### 9.2.2 Prismavakio

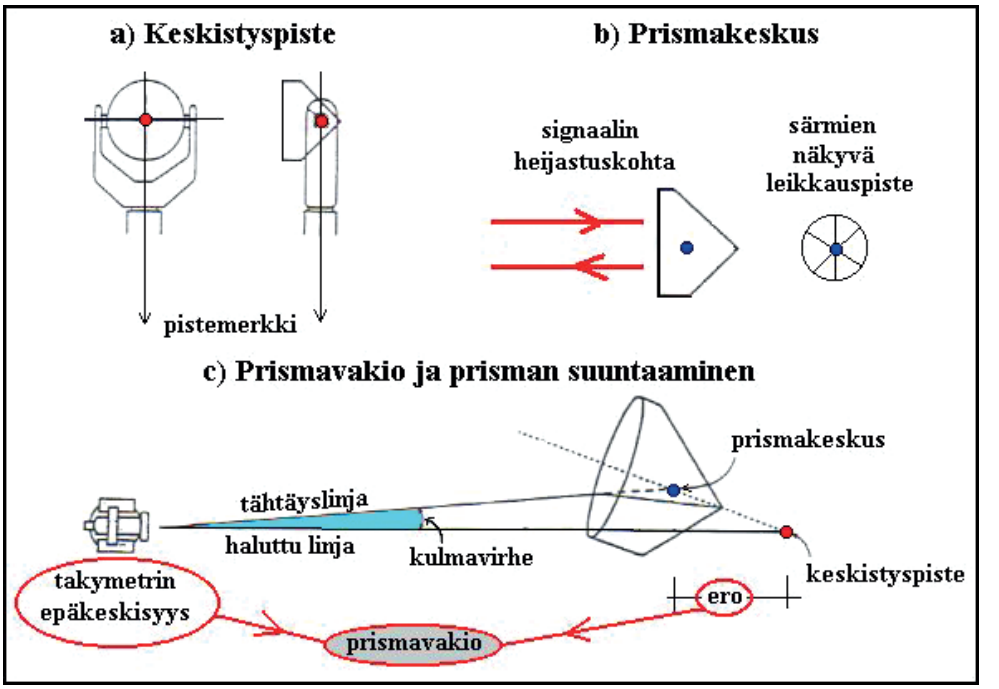
Elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa käytetään takymetrin lisäksi mittaussivun toisessa päässä olevaa heijastinta. Mittauksissa käytettävä heijastin ei ole tavallinen peili vaan prisma, joka heijastaa takymetrin lähettämän signaalin takaisin tulosuuntaan. Näin signaali palaa takaisin etäisyysmittariin. Jos etäisyydenmittauksessa käytettävä heijastin olisi tasopeili, se täytyisi suunnata aina täsmällisesti takymetriin. Prisman osalta kuitenkin riittää, että se suunnataan mahdollisimman hyvin takymetriin. Prisman tarkka suuntaaminen ei ole välttämätöntä etäisyydenmittauksen tarkkuuden kannalta, mutta suuntaamisella on merkitys kulmanmittauksen ja suuntien mittauksen tarkkuuden kannalta. (Kuva 275, s. 331.)




**KUVA 275** *a) Elektro-optisen etäisyydenmittauksen prisma muodostuu kolmesta heijastavasta pinnasta, jotka ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden. b) Prisman särmät muodostavat joka suuntaan näkyvän prismakeskuksen, johon mittauskaukoputki voidaan kohdistaa. Kuvan (b) prismasarja on tarkoitettu takymetrille, jossa on erillinen optiikka kaukoputkelle ja etäisyysmittarille.*

Takymetriä käytettäessä on aina muistettava prismavakioksi sanottu etäisyydenmittauksen korjaus. Etäisyyttä mitattaessa on tarkoitus mitata etäisyys takymetrin pystyakselilla olevasta pisteestä prisman pystyakselilla olevaan pisteeseen. Keskistyksen ja tasauksen yhteydessä kojeen ja prisman pystyakselit on asetettu kulkemaan maanpinnalla olevien mittauspisteiden kautta. Etäisyydenmittauksen aloituskohta takymetrissä ja signaalin heijastuskohta prismassa eivät kuitenkaan välttämättä sijaitse kojeiden pystyakseleilla. Kojeet ja prismat voivat olla etäisyydenmittauksen kannalta epäkeskisiä. Prismavakiolla korjataan laitteiden epäkeskisyys. Prismavakio on elektro-optisen etäisyydenmittauksen havaintojen vakiokorjaus. Jokaiseen mitattuun etäisyyteen tehdään samansuuruinen korjaus. (Kuva 276, s. 323.)

Kun elektro-optisen etäisyydenmittauksen tyypillinen tarkkuus on muutamia millimetrejä, väärä prismavakio voi aiheuttaa useiden senttimetrien systemaattisen virheen. Prismavakio liittyy siis sekä takymetriin että prismaan. Jos mittauksessa on mukana erilaisia kojeita ja prismoja, mittaajan tulee olla tarkkana prismavakioiden kanssa.




**KUVA 276** *a) Tähystä pystytettäessä prisman keskistyspiste ja pistemerkki asetetaan samalle pystysuoralle. b) Prismakeskus on joka suuntaan näkyvä prisman särmien leikkauspiste, josta etäisyydenmittauksen signaalin lasketaan heijastuvan. c) Prismavakion suuruuteen vaikuttavat prismakeskuksen ja keskistyspisteen ero ja takymetrin epäkeskisyys. Kulman- ja suuntien mittauksen virheiden välttämiseksi prisma pitää suunnata mahdollisimman tarkasti takymetriin.*

### 9.2.3 Sääkorjaus

Prismavakion ohella sääkorjaus on toinen elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa yleisesti käytetty korjaus. Sääkorjaus tehdään, koska etäisyydenmittauksessa käytettävän mittaussignaalin kantoaallon eli valon etenemiseen vaikuttaa ilman paine ja lämpötila. Sääkorjausta varten ilmanpaine ja lämpötila tulee mitata. Mittausten perusteella lasketaan korjaus. Takymetreissä ja mittausohjelmistoissa on toiminto ilmanpaineen ja lämpötilan kirjaamiseksi ja sääkorjauksen laskemiseksi. Ilmanpaineen mittauksessa käytettävää mittaria kutsutaan barometriksi. Usein ilmanpainemittareissa on myös lämpömittari, jolloin sääkorjauksen määritystä varten ei tarvita erillistä lämpömittaria. (Kuva 277, s. 333.)

**KUVA 277** *Kaksi ilmanpainemittaria eli barometria. Vasemmalla digitaalinen mittari (Suunto Escape 203). Sitä voidaan kutsua monipuolisten toimintojensa vuoksi sääasemaksi. Oikealla on perinteisempi rasiailmanpainemittari. Kummassakin kojeessa on lämpömittari.*

Ilmanpaineen yksikkönä käytetään takymetreissä joko millibaaria (mbar), hehtopascalia (hPa) tai elohopeamillimetriä (mmHg). Näiden yksiköiden välinen yhteys on seuraava:

1000 mbar = 1000 hPa = 750 mmHg.

Usein puhutaan normaalista ilmanpaineesta. Merenpinnan tasolla normaali ilmanpaine on 1013.3 mbar = 1013.3 hPa = 760 mmHg. Kun merenpinnan tasolta noustaan ylemmäksi, ilmanpaine laskee. Tämän vuoksi ilmanpaine-eroja mittaamalla voidaan myös arvioida paikkojen korkeuseroja. Ilmanpaineen mittaamiseen perustuvaa korkeudenmittausmenetelmää sanotaan barometriseksi korkeudenmittaukseksi. Barometrisen korkeudenmittauksen tarkkuus on huono verrattuna muihin korkeudenmittausmenetelmiin.

Sääkorjaus annetaan suhteellisena korjauksena, jolloin sen ”yksikkö” on ppm. Kyseessä on laaduton luku: ppm on parts per million eli miljoonasosa matkasta eli $10^{-6}$. Esimerkiksi, jos sääkorjaus on 10 ppm, sadan metrin matkaan tehdään 1 mm:n korjaus ja kilometrin matkaan tehdään 10 mm:n korjaus. (Taulukko 17, s. 334.)

**TAULUKKO 17** *Sääkorjauksen suuruus joillakin paineen ja lämpötilan arvoilla. Taulukko on laskettu erään takymetrin (Sokkisha SET 2 C) laskentatoiminnon avulla, mutta arvot pitävät hyvin paikkansa muillekin kojeille.*

| Paine/Lämpötila | -30°C | 0°C | +30°C |
|---|---|---|---|
| 960 mbar | -34 ppm | 0 ppm | +28 ppm |
| 1000 mbar | -47 ppm | -11 ppm | +17 ppm |
| 1040 mbar | -60 ppm | -27 ppm | +7 ppm |

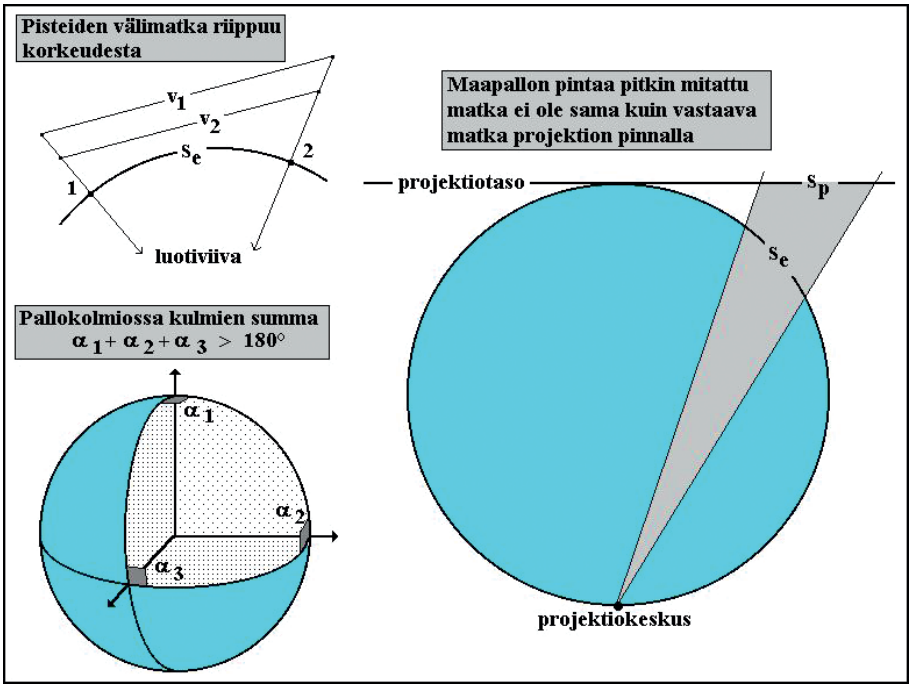
Mittausten yhteydessä ei kannata miettiä korjausten merkittävyyttä, vaan takymetrimittauksen yhteydessä on aina syytä tehdä sääkorjaus. Se määritetään normaalissa mittausrutiinissa takymetrin orientoinnin yhteydessä.

### 9.2.4 Korkeustason ja karttaprojektion huomiointi

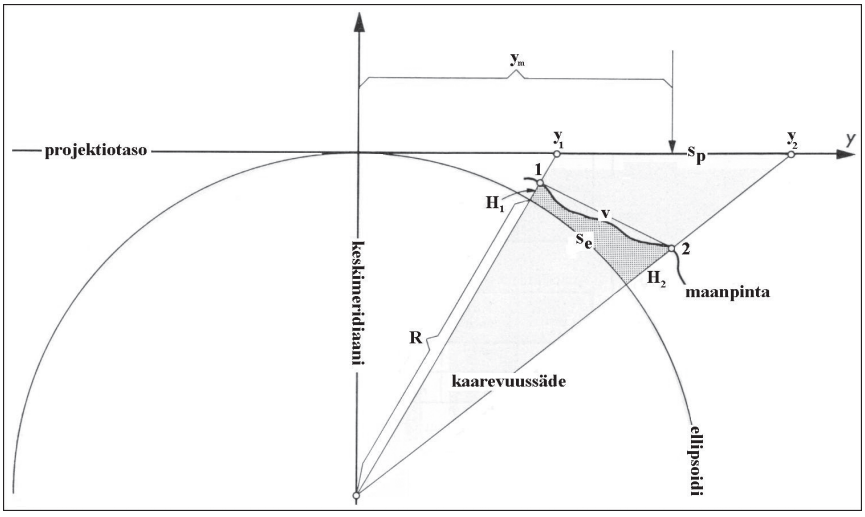
Kun mittaukset lasketaan karttaprojektiossa määritellyssä suorakulmaisessa koordinaatistossa, tulee huomioida maapallon muodon vaikutukset laskentasuureisiin. Kartoitusmittauksissa Maan pallonmuotoisuus jätetään joskus huomioimatta, mutta runkomittauksia tehtäessä asiaa ei saa unohtaa. Aihepiirin tietynlainen ongelmallisuus juontuu siitä, että mittaushavainnot tehdään kolmiulotteisen maapallon pinnalla, mutta laskenta suoritetaan projektiotasolla. Kolmiulotteisen maailman geometrisia ilmiöitä ei ole mahdollista kuvata ilman vääristymiä tasolle. (Kuva 278, s. 335.)

Suomessa käytettäviä suorakulmaisia karttakoordinaatistoja ovat kartastokoordinaattijärjestelmän ja ETRS89-järjestelmän suorakulmaiset koordinaatistot. Kartastokoordinaattijärjestelmän koordinaatistot määritellään Gauss-Krügerin projektiossa ja ETRS89-järjestelmän koordinaatistot UTM-projektiossa tai Gauss-Krügerin projektiossa. Molemmat projektiot ovat poikittaisasentoisia Mercatorin projektioita.

Seuraavassa tarkastellaan etäisyyksiin tehtäviä korjauksia eli reduktioita edellä mainituissa projektioissa. Karttaprojektioon liittyviä korjauksia kutsutaan projektiokorjauksiksi. Kulmien ja suuntien korjauksia ei käsitellä, koska ne ovat merkittäviä vasta useiden kilometrien pituisissa tähtäyksissä. Näin pitkiä tähtäyksiä tehdään harvoin tavanomaisten mittausten yhteydessä. Etäisyyksiinkin liittyvät projektiokorjaukset ovat sitä merkittävämpiä, mitä pidemmistä matkoista on kyse.




**KUVA 278** *Maan pallonmuotoisuus tulee huomioida suorakulmaisia tasokoordinaatteja laskettaessa. Mittaushavainnot tehdään maapallon pinnalla, mutta tasokoordinaattien laskenta tapahtuu projektiotasolla. Pallopinnan mittojen ja niitä vastaavien tason mittojen eroihin liittyy monenlaisia asioita. Mm. maapallon pinnalla olevan kolmion kulmien summa on yli 180°, mutta tasokolmiossa tasan 180°. Pisteiden välinen etäisyys puolestaan riippuu korkeustasosta ja pinnasta, jolla sitä tarkastellaan.*




**KUVA 279** *Etäisyydenmittausten korjausten laskennassa käytettävät suureet, kun projektiona on poikittaisasentoinen lieriöprojektio. (Perustuu Ternryd – Lundin 1970, s. 62.)*

Maanpinnalla mitataan pisteiden välinen vinoetäisyys ($v$). Etäisyyteen tehdään ensiksi sääkorjaus, sitten se korjataan havaintopaikan vaakatasoon ($s$), sieltä edelleen ellipsoidille ($s_e$) ja lopuksi projektiotasolle ($s_p$). Vasta näiden muunnosten jälkeen mitattua etäisyyttä voidaan käyttää koordinaattien laskennassa projektiotason suorakulmaisessa koordinaatistossa. (Kuva 279, s. 335.)

Sääkorjaus tehdään kojeen valmistajan ohjeiden mukaisesti joko laskennan yhteydessä tai suoraan kojeessa mittauksen yhteydessä ilmanpaineeseen ja lämpötilaan perustuen. Tuloksena on sääkorjattu vinoetäisyys ($v$). Se korjataan havaintopaikan vaakatasoon esimerkiksi pystykulman avulla. Vaakamatka on

$$s = v \sin z\,, \tag{154}$$

jossa $s$ on vaakamatka havaintopaikan vaakatasossa, $v$ on sääkorjattu vinomatka ja $z$ on pystykulma.

Korjaus vaakatasoon voidaan tehdä myös mittaussivun päätepisteiden korkeuksien avulla. Joka tapauksessa pisteiden korkeuksia tarvitaan seuraavassa vaiheessa, kun vaakatasoon korjattu etäisyys redukoidaan edelleen merenpinnan tasoon ellipsoidin kaareksi

$$s_e = \frac{Rs}{R + H_m}\,, \tag{155}$$

jossa $s_e$ on ellipsoidin kaari merenpinnan tasolla, $s$ on vaakamatka havaintopaikan vaakatasossa, $R$ on maapallon kaarevuussäde (noin 6380 km) ja $H_m$ on mittaussivun keskikorkeus.

Viimeiseksi tehdään ellipsoidin kaaren redukointi poikittaiseen Mercatorin projektioon, joko Gauss-Krügerin projektioon tai UTM-projektioon. Matka projektiotasolla on

$$s_p = m_0 (1 + \frac{{y_1}^2 + y_1 y_2 + {y_2}^2}{6R^2}) s_e\,, \tag{156}$$

jossa $s_p$ on matka projektiotasolla, $s_e$ on ellipsoidin kaari merenpinnan tasolla, $m_0$ on mittakaavakerroin keskimeridiaanilla, $R$ on maapallon kaarevuussäde ja $y_1$ ja $y_2$ ovat mittaussivun päiden etäisyydet keskimeridiaanista. Gauss-Krügerin projektiossa mittakaavakerroin on $m_0 = 1$ ja UTM-projektiossa se on $m_0 = 0.9996$ (kuva 129, s. 158). Vaikka kaavat 154–156 ovat enemmän tai vähemmän likimääräisiä kaavoja, niillä redukoituja etäisyyksiä voidaan käyttää vaativissakin mittauksissa suorakulmaisten koordinaattien laskentaan.

### 9.2.5 Trigonometrisen korkeudenmittauksen korjaukset

Trigonometrisessa korkeudenmittauksessa on kyse pystykulmien ja etäisyyksien mittaukseen perustuvasta. Mittausperiaatteen aikaisemman esittelyn yhteydessä todettiin, että trigonometrisen korkeudenmittauksen peruskaavaa (kaava 37, s. 61) voi käyttää luotettavasti ainoastaan lyhyillä etäisyyksillä (< 200 m), koska tätä pidemmillä matkoilla Maan kaarevuus ja ilmakehän refraktio aiheuttavat mittaustuloksiin merkittäviä systemaattisia virheitä. Refraktio tarkoittaa tähtäyssäteen taipumista ilmakehässä. Toisin sanoen valo ei etene ilmakehässä suoraviivaisesti, vaan sen etenemisreitti on kaareva viiva. Tässä luvussa esitellään trigonometrisen korkeudenmittauksen laajennettu kaava, jonka avulla laskennassa voidaan huomioida Maan kaarevuuden ja refraktion aiheuttamat systemaattiset virheet.

Tarkastellaan aluksi refraktiota eli tähtäyssäteen taipumista ilmakehässä. Refraktion vaikutuksesta tähtäyssäde kaareutuu ylöspäin asemapisteen ja tähtäyspisteen kautta kulkevaan jänteeseen nähden (kuva 280, s. 338). Tähtäyssäteen oletetaan muodostavan ympyrän kaaren. Tällöin tähtäyssäteen tangentin ja jänteen välinen refraktiokulma ($\alpha_R$) on sekä asemapisteellä että tähtäyspisteellä yhtä suuri. Refraktiokulman ja tähtäyssäteen kaarevuussäteen välinen yhteys on (ilman kaavan johtoa)

$$R_\alpha = \frac{v_{12}}{2\alpha_R}, \tag{157}$$

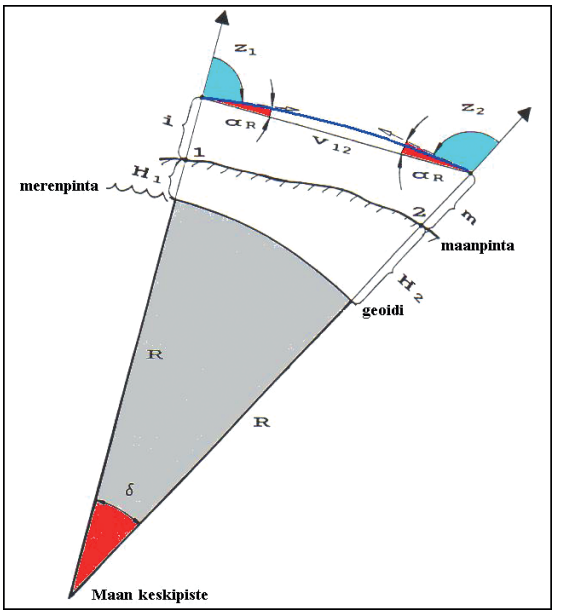
jossa $R_\alpha$ on tähtäyssäteen kaarevuussäde, $v_{12}$ on vinoetäisyys asemapisteeltä (1) tähtäyspisteeseen (2) ja $\alpha_R$ on refraktiokulma. Refraktiokulman yksikkö on radiaani.

Trigonometrisen korkeudenmittauksen yhteydessä refraktio huomioidaan refraktiokertoimen avulla. Se on Maan kaarevuussäteen ja tähtäyssäteen kaarevuussäteen suhde:

$$k = \frac{R}{R_\alpha}, \tag{158}$$

jossa $k$ on refraktiokerroin, $R$ on Maan kaarevuussäde (noin 6380 km) ja $R_\alpha$ on tähtäyssäteen kaarevuussäde.

Tavanomaisissa mittauksissa refraktiokertoimelle käytetään usein arvoa $k$ = 0.13. Arvo perustuu malli-ilmakehään. Tähtäyssäteen kaarevuussäde on tällöin noin 7.5-kertainen Maan kaarevuuteen nähden. Vaikka refraktio vaihteleekin sääolosuhteiden ja mittausajankohdan mukaan, keskimääräiseen arvoon voidaan yleensä tyytyä, sillä Maan kaarevuuden vaikutus on kuitenkin refraktiota merkittävämpi tekijä.




**KUVA 280** *Trigonometrisen korkeudenmittauksen periaatekuva, kun otetaan huomioon Maan kaarevuus ja ilmakehän aiheuttama refraktio. Refraktion vuoksi tähtäyssäde (sininen kaari) kaareutuu maanpinnasta ylöspäin.*

Kun Maan kaarevuus huomioidaan trigonometrisessa korkeudenmittauksessa, lähtöolettamus on, että korkeuden vertailupinta on pallopinta. Refraktion ja Maan kaarevuuden vaikutukset huomioiden trigonometrisen korkeudenmittauksen kaava voidaan johtaa muotoon

$$H_2 = H_1 + v_{12}\cos z_1 + i - m + v_{12}^2 \frac{(1-k)}{2R}, \qquad (159)$$

jossa $H_1$ on asemapisteen korkeus, $H_2$ on määritettävän pisteen korkeus, $v_{12}$ on havaittu vinomatka pisteeltä, $z_1$ on pystykulma asemapisteeltä määritettävään pisteeseen, $i$ on kojekorkeus, $m$ on tähyskorkeus, $k$ on refraktiokerroin (usein $k$ = 0.13) ja $R$ on maapallon kaarevuussäde (usein $R$ = 6380 km).

Trigonometrisen korkeudenmittauksen laajennettu kaava perustuu useisiin oletuksiin ja likimääräistyksiin. Se ei ole tarkka kaava. Kaavaa johdettaessa korkeuksien vertailupinta oletettiin pallopinnaksi vaikka todellisen vertailupinnan eli geoidin kaarevuus muuttuukin jatkuvasti. Myös tähtäyssäteen kaarevuuden oletettiin olevan sama koko matkalla, vaikka näin asia ei yleensä ole. Itse kaava perustuu Maan kaarevuuskeskipisteen, havaintokojeen ja tähtäyspisteen muodostaman kolmion ratkaisuun (kuva 280). Ratkaisussa päästään kaavan 159 esittämään muotoon, kun käytetään ongelman ratkaisuun sisältyvien funktioiden sarjakehitelmiä ja tehdään erilaisia käsiteltävien suureiden suuruusluokkaa koskevia rajauksia.

## 9.2.6 Tehtäviä

**182.** Suorakulmaisen tontin kaksi sivua mitattiin takymetrillä. Lyhyempi sivu oli $a$ = 65.046 m ja pidempi sivu oli $b$ = 89.533 m. Jälkeenpäin huomattiin, että kojeessa oli ollut väärä prismavakio. Sen vuoksi mitatut sivut olivat 30 mm liian pitkiä. Kuinka suuri virhe väärästä prismavakiosta aiheutui tontin pinta-alaan? Mikä oli tontin oikea pinta-ala?

**183.** Sääkorjaus oli +19 ppm. Laske sääkorjatut matkat, kun mitatut matkat olivat a) 45.234 m, b) 112.912 m ja c) 207.087 m.

**184.** Mitattu vinomatka on 145.467 m ja sivun päätepisteiden korkeudet ovat 176.45 m ja 186.60 m. Korjaa matka havaintopaikan vaakatasoon ja merenpinnan tasoon ellipsoidin kaareksi.

**185.** Pisteen koordinaatit Suomen kartastokoordinaattijärjestelmässä ovat $P$ = 7050230 m ja $I$ = 2447490 m. Mikä on pisteen etäisyys keskimeridiaanista?

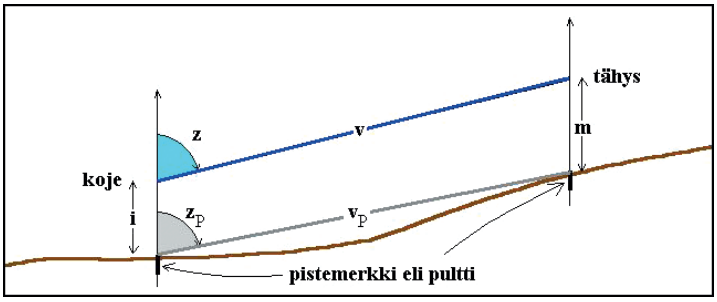
**186.** Mittaussivun keskimääräinen etäisyys keskimeridiaanista on 51 km ja sivun keskikorkeus on 210 m. Kun mitattu vaakamatka on 190.045 m, korjaa matka etäisyydeksi a) Gauss-Krügerin projektion projektiotasolle ja b) UTM-projektion projektiotasolle.

**187.** Pisteeltä 152 pisteelle 205 mitattu vaakamatka on $s_{152\text{-}205}$ = 159.922 m ja pisteeltä 104 pisteelle 205 mitattu vaakamatka on $s_{104\text{-}205}$ = 142.482 m. Piste 205 sijaitsee sivun 152–104 vasemmalla puolella. Piirrä mittauksen havainnekuva. Laske pisteen 205 peruskoordinaatit kartastokoordinaattijärjestelmässä. Pisteen 152 koordinaatit ovat $P_{152}$ = 6834068.332 m ja $I_{152}$ = 2484385.930 m, pisteen 104 koordinaatit ovat $P_{104}$ = 6834112.371 m ja $I_{104}$ = 2484670.255 m ja paikan keskimääräinen korkeus on 140 m. Laskennassa tulee ottaa huomioon etäisyyshavaintojen projektiokorjaukset.

**188.** Miksi tähtäyssäde kaareutuu ilmakehässä ylöspäin (kuva 280, s. 338)?

**189.** Laske tähtäyspisteen korkeus huomioiden ilmakehän aiheuttama refraktio ja Maan kaarevuus, kun asemapisteen korkeus on 117.890 m, pystykulma on 100.5031 gon, etäisyys on 359.174 m, kojekorkeus on 1.488 m ja tähyskorkeus on 1.342 m.

**190.** Joissakin laskentatilanteissa käytetään ns. pultista pulttiin mitattuja suureita. Tällöin havaitut pystykulmat ja vinomatkat redukoidaan mitoiksi, jotka lasketaan pistemerkistä pistemerkkiin. Laske pystykulma ja vinoetäisyys pultista pulttiin, kun havaittu vinomatka on $v$ = 87.593 m, pystykulma on $z$ = 90.0054 gon, kojekorkeus on $i$ = 1.520 m ja tähyskorkeus on $m$ = 1.703 m. (Kuva 281.)




**KUVA 281** *Tehtävä 190: pultista pulttiin korjaus.*

## 9.3 Sarjahavaintomenetelmä

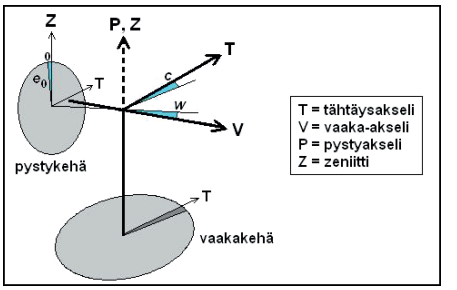
### 9.3.1 Kulmanmittauskojeen akselivirheet

Suuntien ja kulmien mittauksen tarkkuuteen vaikuttavat mittauskojeen (takymetrin tai teodoliitin) kulmanlukujärjestelmän tarkkuus, kojeen rakenteelliset tekijät, havaintojen suoritustekniikka ja havaitsija. Tarkkuuteen vaikuttavia rakenteellisia tekijöitä ovat kojeen akseli- ja epäkeskisyysvirheet. Jotta kulmanmittauskoje toimii rakenteensa puolesta virheettömästi, tulee seuraavien ehtojen täyttyä (kuva 282, s. 282):

- pystyakselin tulee olla tasauksen jälkeen pystysuorassa
- vaaka-akselin on oltava kohtisuorassa pystyakselia vastaan
- tähtäysakselin on oltava kohtisuorassa vaaka-akselia vastaan
- kaikkien akselien tulee leikata samassa pisteessä
- pystyakselin tulee kulkea vaakakehän keskipisteen kautta
- vaaka-akselin tulee kulkea pystyakselin keskipisteen kautta.

Jos vaaka-akseli ei ole kohtisuorassa pystyakselia vastaan, on kojeessa tappikaltevuusvirhe ($w$). Jos tähtäysakseli ei ole kohtisuorassa vaaka-akselia vastaan, on kojeessa kollimaatiovirhe ($c$). Jos akselit eivät leikkaa samassa pisteessä tai ne eivät kulje jakokehien keskipisteiden kautta, on kojeessa erilaisia epäkeskisyysvirheitä. Pystykulmanmittauksessa vaikuttava kulmanmittauskojeen rakenteellinen virhe on pystykehän nollapistevirhe eli pystykehän indeksivirhe. (Kuva 282, s. 282.)

Akseli- ja epäkeskisyysvirheet eivät aiheuta ongelmia, jos havainnot toistetaan kummassakin kojeasennossa ja lasketaan havaintojen keskiarvot. Kun havainnot tehdään kummassakin kojeasennossa, sanotaan, että tehdään sarjahavaintoja. Sarjahavaintoja käytetään erityistä tarkkuutta vaativissa mittauksissa, kuten runkomittauksissa. Sarjahavaintoja tehtäessä mittauksia toistetaan määrätyssä järjestyksessä kojeen I- ja II-asennoissa. Tarkoituksena on parantaa lopputulosten tarkkuutta sekä toistoon perustuen että eliminoimalla (poistamalla) kulmanmittauskojeen rakenteellisten virheiden vaikutukset.

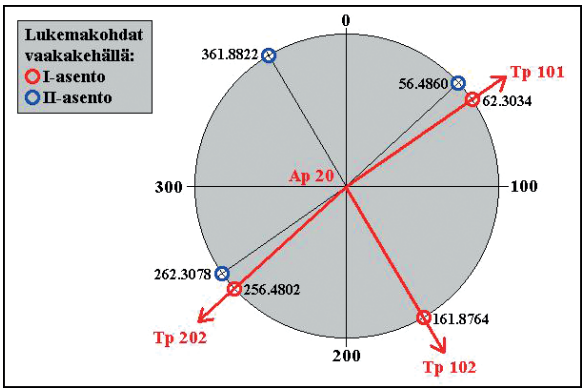



**KUVA 282** *Tasauksen jälkeen kulmanmittauskojeen pystyakselin (P) pitäisi olla pystysuorassa (Z) ja vaaka-akselin (V) vaakasuorassa. Tähtäysakselin (T) pitäisi olla kohtisuorassa vaaka-akseliin nähden. Vaaka-akselin pitäisi olla kohtisuorassa pystyakseliin nähden. Zeniitti (Z) on pystysuora suunta ylös.*

### 9.3.2 Perinteinen sarjahavaintomenetelmä

Aikaisemmin on puhuttu yksinkertaisesta kulmanmittauksesta (s. 242). Yksinkertaisessa kulmanmittauksessa suuntahavainnot tehdään vain kojeen I-asennossa. Seuraavassa tarkastellaan kuvan 283 esittämän havaintosarjan perusteella vaakasuuntien sarjahavaintojen suorittamista ja kirjaamista. Perinteisesti vaakasuuntien sarjahavainnot on suoritettu seuraavasti (taulukko 18, s. 342):

1. Valitaan vertailusuunta, jonka suhteen muunnoskulmat määritetään. Esimerkissä vertailusuunta on tähtäyspiste 101.
2. Havaitaan kojeen I-asennossa vertailusuunnasta alkaen myötäpäivään kiertäen kaikkien tähtäyspisteiden vaakakehälukemat. Nämä havainnot muodostavat 1. puolisarjan.
3. Käännetään koje II-asentoon ja havaitaan viimeisestä tähtäyspisteestä vastapäivään kiertäen kaikkien tähtäyspisteiden vaakakehälukemat. Nämä havainnot muodostavat 2. puolisarjan.
4. Lasketaan I- ja II-asentojen lukemien keskiarvot.
5. Lasketaan keskiarvoista muunnoskulmat vertailusuunnan suhteen vähentämällä vertailusuunnan keskiarvo muista keskiarvoista.
6. Mitataan tarvittaessa toinen tai useampi sarja ja lasketaan lopuksi muunnoskulmien keskiarvot. Muunnoskulmien keskiarvoja kutsutaan sarjakeskiarvoiksi.




**KUVA 283** *Asemapisteeltä 20 tähtäyspisteisiin 101, 102 ja 202 havaittu suuntasarja. Vaakakulmakehän nollapiste on kuvassa suoraan ylhäällä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita pohjoissuuntaa, vaan kojetta pystytettäessä nollapiste tulee mielivaltaiseen suuntaan.*

Taulukon 18 (s. 342) kulmahavaintokirja näyttää suuntahavaintojen kirjaamisen ja havaintokirjan laskentaan liittyvät asiat. Taulukkoon on ensiksi kirjattu kuvan 283 esittämä havaintosarja ja laskettu sen keskiarvot ja muunnoskulmat. Keskiarvoja laskettaessa II-asennon havainnot on muunnettu I-asennon havainnoiksi vähentämällä tai lisäämällä oikokulma. Keskiarvot ja muunnoskulmat esitetään kojeen I-asennon havaintoina. Taulukkoon on lisätty myös toinen havaintosarja, jota ei ole esitetty kuvassa 283.

Muunnoskulmien laskeminen on tärkeää havaintosarjojen vertailun vuoksi. Sarjojen vertailu on helpompaa, kun havainnot muunnetaan vertailusuunnan suhteen mitatuiksi kulmiksi. Havaintokirjan viimeiseen sarakkeeseen on lopuksi laskettu muunnoskulmien keskiarvot eli sarjakeskiarvot. Sarjakeskiarvot ovat mittauksen lopputulos.

**TAULUKKO 18** *Havaintojen kirjaaminen perinteiseen kulmahavaintokirjaan. Ensimmäisen sarjan havainnot on esitetty kuvassa 283 (s. 341).*

| Asema-piste | Tähtäys-piste | I-asento | II-asento | Keskiarvo | Muunnos-kulma | Sarja-keskiarvo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **20** | **101** | 62.3034 | 262.3078 | 62.3056 | 0.0000 | **0.0000** |
| | **102** | 161.8764 | 361.8822 | 161.8793 | 99.5737 | **99.5744** |
| | **202** | 256.4802 | 56.4860 | 256.4831 | 194.1775 | **194.1773** |
| | | **1. puolisarja** | **2. puolisarja** | | | |
| **20** | **101** | 62.3022 | 262.3082 | 62.3052 | 0.0000 | |
| | **102** | 161.8772 | 361.8834 | 161.8803 | 99.5751 | |
| | **202** | 256.4800 | 56.4844 | 256.4822 | 194.1770 | |

### 9.3.3 Piste pois -menetelmä

Perinteisen sarjahavaintomenetelmän rinnalla on alettu käyttämään myös piste pois –menetelmää. Sitä käytettäessä pisteen kaikki havainnot tehdään peräkkäin, vuorotellen I- ja II-asennoissa. Jos edellisen luvun kaksi havaintosarjaa olisi suoritettu piste pois –menetelmällä, ensiksi olisi havaittu tähtäyssuunnat pisteeseen 101 järjestyksessä 62.3034 (I-asento), 262.3078 (II-asento), 62.3022 (I-asento) ja 262.3082 (II-asento). Sitten olisi havaittu pisteet 102 ja 202 vastaavalla rytmillä. Tehdyt havainnot on kirjattu ja laskettu taulukkoon 19 (s. 343).

Laskennan lopputulokset ovat kummassakin tarkastellussa tapauksessa (perinteinen ja piste pois –menetelmä) täysin samat, koska havaintoarvot ovat täysin samat. Mittausolosuhteiden ja mahdollisten virheiden kompensoitumisen (korjautumisen) kannalta perinteinen sarjahavaintomenetelmä ja piste pois –menetelmä eivät kuitenkaan ole täysin samanarvoisia, koska havainnot muodostuvat erilaisella rytmillä. Tämä toteamus liittyy erityisesti mahdollisiin kojeen ja jalustan liikkeisiin mittauksen aikana.

Nykyisin havaintoja ei kirjata käsin havaintokirjaan. Tästä huolimatta on tarpeellista tuntea havaintojen muodostumistapa ja havaintoihin liittyvät laskennat.

**TAULUKKO 19** *Piste pois –menetelmällä tehtyjen havaintojen kirjaamisesimerkki. Ensimmäisen sarjan havainnot on esitetty kuvassa 283 (s. 341). Havainnot ja lopputulokset ovat samat kuin taulukossa 18 (s. 342).*

| Asema-piste | Tähtäys-piste | I-asento | II-asento | Keskiarvo | Sarja-keskiarvo | Muunnos-keskiarvo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **20** | **101** | 62.3034 | 262.3078 | 62.3056 | 62.3054 | **0.0000** |
| | **101** | 62.3022 | 262.3082 | 62.3052 | | |
| | **102** | 161.8764 | 361.8822 | 161.8793 | 161.8798 | **99.5744** |
| | **102** | 161.8772 | 361.8834 | 161.8803 | | |
| | **202** | 256.4802 | 56.4860 | 256.4831 | 256.4827 | **194.1773** |
| | **202** | 256.4800 | 56.4844 | 256.4822 | | |

### 9.3.4 Pystykulmien havaitseminen

Takymetrin pystykehä on orientoitu niin, että tasauksen jälkeen kehän 0-piste osoittaa suoraan ylöspäin eli zeniittiin. Vaakasuoraa tähtäystä vastaa kojeen I-asennossa lukema 100 gon ja II-asennossa lukema 300 gon. Jos pystykehän 0-piste tasauksen jälkeen kuitenkin poikkeaa zeniitistä, on kojeessa pystykehän nollapistevirhe (0-pistevirhe tai indeksivirhe). Tämä virhe voi näennäisesti johtua myös kaukoputken viivaristikon liikkumisesta pystysuunnassa. Nollapisteen paikkaan ja viivaristikon paikkaan liittyviä syitä ei ole kuitenkaan mahdollista erottaa havainnoissa toisistaan. (Kuva 284, s. 344.)

Nollapistevirheen vaikutus voidaan poistaa, kun havaitaan pystykulmat kummassakin kojeasennossa. Tiedetään, että virheettömässä mittauksessa I- ja II-asentojen pystykehälukemien summa on täysi kulma eli 400 gon. Mahdollisen nollapistevirheen ($e_0$) suhteen korjatut havainnot ovat $z_\mathrm{I} - e_0$ (I-asento) ja $z_\mathrm{II} - e_0$ (II-asento). Korjattujen havaintojen summa on

$$z_I + z_I - 2e_o = 400\ \mathrm{gon}\,. \tag{160}$$

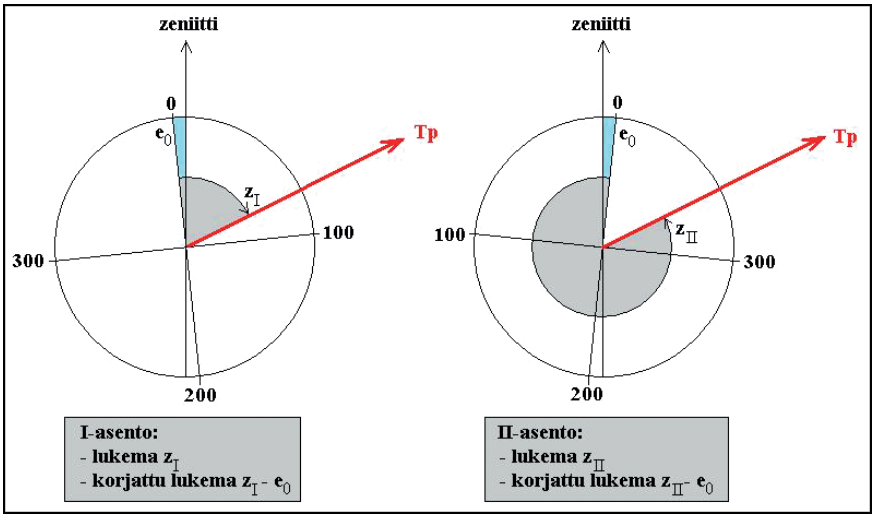
Lausekkeesta voidaan ratkaista nollapistevirhe

$$e_0 = \frac{z_I + z_I - 400\ \mathrm{gon}}{2}\,. \tag{161}$$

Kun nollapistevirhe tunnetaan, I-asennon korjattu pystykulma on

$$z = z_I - e_0 = \frac{z_I + (400\ \mathrm{gon} - z_I)}{2}\,, \tag{162}$$

Kaavoissa 160–162 $z$ on nollapistevirheen suhteen korjattu pystykulma kojeen I-asennossa, $e_0$ on pystykehän nollapistevirhe, $z_\mathrm{I}$ on I-asennossa tehty pystykulmahavainto ja $z_\mathrm{II}$ on II-asennossa tehty pystykulmahavainto.




**KUVA 284** *Pystykehän nollapistevirhe ($e_o$) ja sen vaikutus pystykulmahavaintoihin. Pystykehän nollapistevirhe johtuu joko kehän nollapisteen väärästä asennosta tai kaukoputken viivaristikon siirtymisestä pystysuorassa suunnassa. Näitä syitä ei voi erottaa toisistaan.*

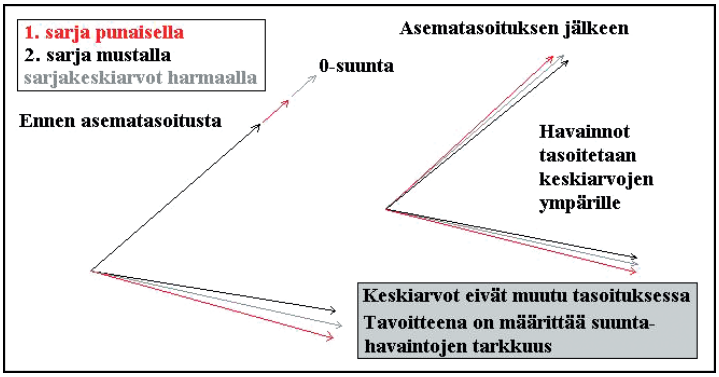
Seuraavassa havaintokirjaesimerkissä (taulukko 20) on mitattu asemapisteeltä 1 tähtäyspisteeseen 100 pystykulmat kahtena sarjana. Ensimmäisen sarjan havainnot ovat 87.5726 (I) ja 312.4246 (II) ja toisen sarjan havainnot ovat 87.5614 (I) ja 312.4212 (II). Havaintojen kirjaamiseen käytetty havaintolomake on periaatteessa sama kuin aikaisempi suuntahavaintojen sarjahavaintolomake (taulukko 18, s. 337). Kuitenkin sarakkeiden nimissä on joitakin pieniä eroja. Lomakkeelle on kirjoitettu näkyviin myös nollapistevirheen arvo, vaikka keskiarvon voikin laskea suoraan kaavalla 162 (s. 343). Koska nykyisin havaintokirjoja pidetään ja lasketaan harvoin käsin, kirjaamistavalla ei ole enää kovin suurta merkitystä. Kuitenkin tässäkin yhteydessä on tärkeää tunnistaa ja ymmärtää havaintojen käsittelyyn liittyvät periaatteet.

**TAULUKKO 20** *Pystykulmahavaintojen kirjaamis- ja laskentaesimerkki. Havainnot on tehty asemapisteeltä 1 pisteelle 100 kahtena sarjana.*

| Asema-piste | Tähtäys-piste | I-asento | II-asento | Keskiarvo | Sarja-keskiarvo |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 87.5726 | 312.4246 | 87.5740 | **87.5721** |
| | | 399.9972 | -0.0014 | | |
| | | **summa** | **o-pistevirhe** | | |
| | 100 | 87.5614 | 312.4212 | 87.5701 | |
| | | 399.9825 | -0.0087 | | |

## 9.3.5 Asematasoitus

Muunnoskulmahavaintojen vaihtelua analysoimalla voidaan arvioida muunnoskulmien ja sarjakeskiarvojen satunnaisten virheiden suuruus. Analysoinnissa käytettävää menettelyä kutsutaan asematasoitukseksi. Se perustuu pienimmän neliösumman periaatteeseen. Asematasoituksen tuloksena saadaan muunnoskulmahavaintojen ja sarjakeskiarvojen keskihajonnat. Asematasoituksessa havaintosarjat kierretään tasaisesti sarjakeskiarvojen ympärille ja lasketaan kierrettyjen sarjojen erot (jäännösvirheet) keskiarvoihin nähden. Keskihajonnat lasketaan näistä eroista. Asematasoituksen voi hyvin suorittaa taulukkolaskentana käsin tai taulukkolaskentaohjelmalla, mutta normaalisti se kuitenkin suoritetaan geodeettisella laskentaohjelmalla runkomittausten laskennan yhteydessä. (Kuva 285 ja taulukko 21.)




**KUVA 285** *Periaatekuva kahden suunnan asematasoituksesta.*

**TAULUKKO 21** *Asematasoituksen laskuesimerkki. Arvot ovat peräisin perinteiseen sarjahavaintomenetelmään liittyvästä taulukosta 18 (s. 337).*

| Ap | Tp | Muunnos | Sarjakeskiarvo | Poikkeama | Jäännösvirhe |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 101 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00017 |
| | 102 | 99.5737 | 99.5744 | -0.0007 | -0.00053 |
| | 202 | 194.1775 | 194.1773 | 0.0002 | 0.00037 |
| | | | Summa | -0.00050 | |
| | | | Kierto | 0.00017 | |
| 20 | 101 | 0.0000 | | 0.0000 | -0.00013 |
| | 102 | 99.5751 | | 0.0007 | 0.00057 |
| | 202 | 194.1770 | | -0.0003 | -0.00043 |
| | | | Summa | 0.00040 | |
| | | | Kierto | -0.00013 | |

Seuraavaksi suoritetaan taulukon 21 esittämän mittauksen asematasoitus. Laskentamenettely tukeutuu perinteisen sarjahavaintomenetelmän kirjaamistapaan, joka esiteltiin aikaisemmin (kuva 283, s. 341 ja taulukko 18, s. 342). Todetaan aluksi mittauksen tunnusluvut:

- sarjojen lukumäärä $n_s = 2$
- suuntien lukumäärä $n_t = 3$
- havaintojen lukumäärä $n = n_s n_t = 6$
- tuntemattomien lukumäärä $u = n_s + n_t - 1 = 4$
- havaintojen ylimäärä $r = n - u = 2$

Havainnoista lasketaan:

- poikkeama = muunnoskulma – sarjakeskiarvo
- summa = sarjan poikkeamien summa
- kierto = –summa / suuntien lukumäärä
- jäännösvirhe = poikkeama + kierto

Lopuksi lasketaan muunnoskulmahavainnon keskihajonta

$$s = \sqrt{\frac{v_i^2}{r}} = \sqrt{\frac{9.734 \times 10^{-7}}{2}} = 0.00070 \text{ gon} \qquad (163)$$

ja sarjakeskiarvon keskihajonta

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{n_s}} = \frac{0.00070}{\sqrt{2}} = 0.00049 \text{ gon} \qquad (164)$$

Kaavoissa 163–164 $s$ on muunnoskulmahavainnon keskihajonta, $v_i$ on jäännösvirhe, $r$ on havaintojen ylimäärä, $s_s$ on sarjakeskiarvon keskihajonta ja $n_s$ on sarjojen lukumäärä.

Asematasoituksella saadaan selville suuntahavaintojen tarkkuus (sarjakeskiarvon keskihajonta). Tarkkuusarvion perusteella määritetään suuntahavaintojen paino, jota tarvitaan takymetrillä tehtyjen tasorunkomittausten laskennassa.

### 9.3.6 Tehtäviä

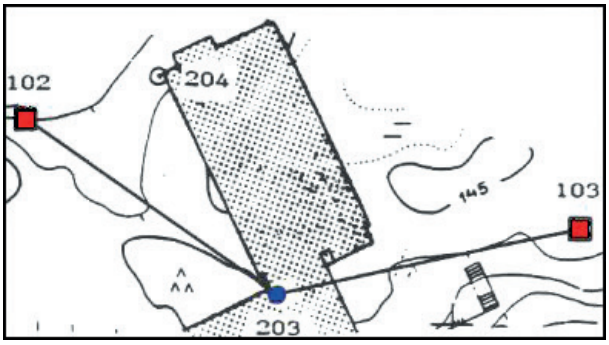
**191.** Laske seuraavien suuntahavaintojen muunnoskulmat ja sarjakeskiarvot. Taulukossa Ap on asemapiste, Tp on tähtäyspiste ja kulmayksikkö on gooni.

| Ap | Tp | I-asento | II-asento |
|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 001.1648 | 201.1592 |
| | 9 | 090.8436 | 290.8364 |
| | 2 | 154.3448 | 354.3406 |
| 8 | 7 | 101.4812 | 301.4784 |
| | 9 | 191.1586 | 391.1574 |
| | 2 | 254.6636 | 054.6584 |

**192.** Laske seuraavista pystykulmahavainnoista pystykehän nollapistevirheen suhteen korjatut pystykulmat. Ilmoita tulokset I-asennon kulmina. Laske myös keskimääräinen nollapistevirhe. Taulukossa Ap on asemapiste, Tp on tähtäyspiste ja kulmayksikkö on gooni.

| Ap | Tp | I-asento | II-asento |
|---|---|---|---|
| 4 | 101 | 79.6430 | 320.3512 |
| | 102 | 68.1288 | 331.8682 |
| | 103 | 87.3468 | 312.6494 |

**193.** Laske viereisen kuvan seinäpisteen 203 koordinaatit (kuva 286).




**KUVA 286** *Tehtävä 193.*

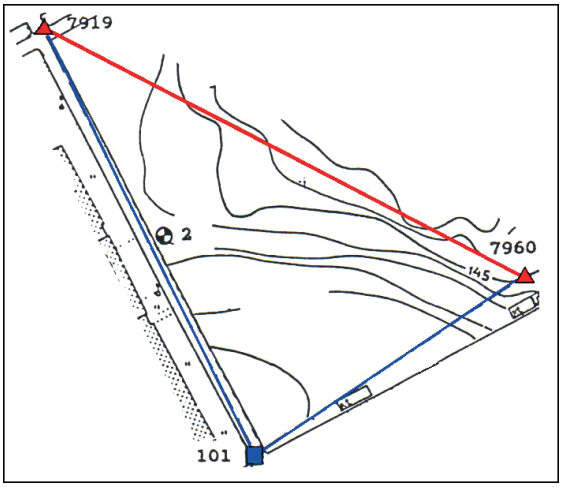
Lähtöpisteiden koordinaatit ovat:

| Piste | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|
| 102 | 15933.419 | 92729.648 |
| 103 | 15915.836 | 92820.576 |

Havaitut pystykulmat ja vinomatkat ovat:

| Asema-piste | Tähtäys-piste | I-asento | II-asento | Keskiarvo | Vinomatka |
|---|---|---|---|---|---|
| 102 | 203 | 97.6238 | 302.3732 | | 49.815 |
| 103 | 203 | 96.1538 | 303.8414 | | 51.271 |

**194.** Laske kuvassa näkyvän pisteen 101 koordinaatit ja korkeus (kuva 287).




**KUVA 287** *Tehtävä 194.*

Kulmahavainnot ovat gooneina:

| Ap | Tp | Muunnoskulma | Pystykulma |
|---|---|---|---|
| 7919 | 7960 | 0.0000 | |
| | 101 | 40.4170 | 102.0981 |
| 7960 | 101 | 0.0000 | 104.8254 |
| | 7919 | 66.1896 | |

Kojekorkeus on pisteellä 7919 $i$ = 1.546 m, pisteellä 7960 $i$ = 1.612 m ja pisteellä 101 $i$ = 1.618 m.

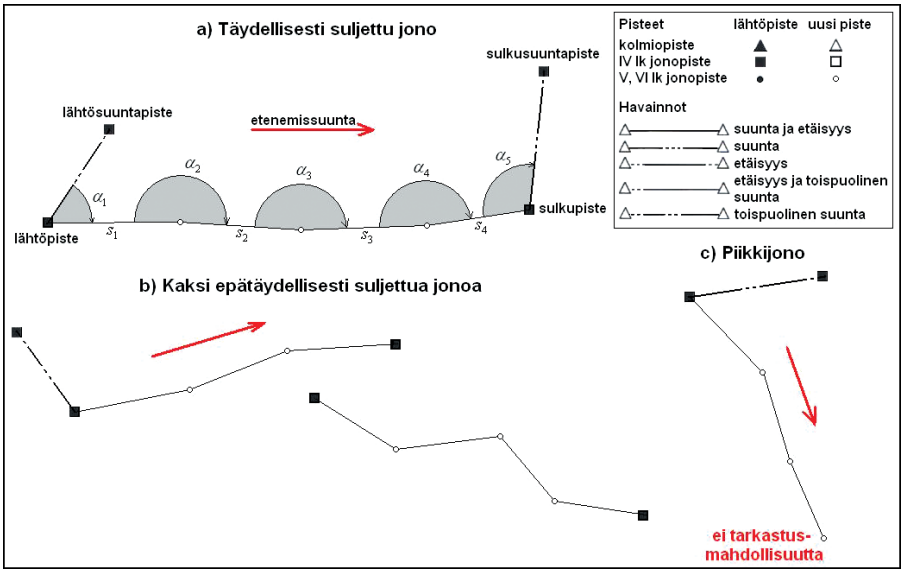
Lähtöpisteiden koordinaatit ovat:

| Piste | $X$ / m | $Y$ / m | $H$ / m |
|---|---|---|---|
| 7919 | 15984.915 | 92595.066 | 143.156 |
| 7960 | 15928.569 | 92696.682 | 145.048 |

## 9.4 Jonomittauksen esimerkki

### 9.4.1 Jonomittausten muodot

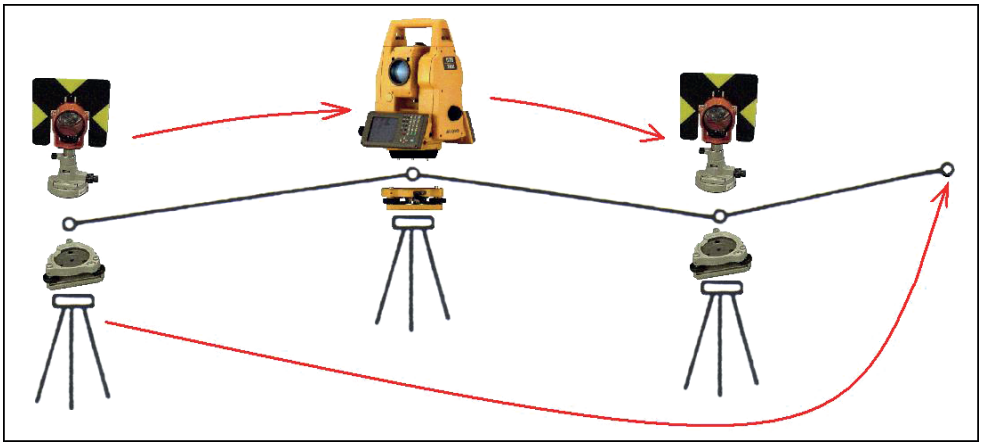
Jonomittaus on perinteinen tasorunkomittausmenetelmä. Geometrialtaan mittaus on murtoviiva. Jonossa koordinaatteja kuljetetaan pisteeltä toiselle säteittäisen mittauksen periaatteella. Mittaushavaintoja ovat siis tähtäyssuunnat (tai sivujen väliset taitekulmat) ja sivujen pituudet. Nykyisin jonomittaukset tehdään takymetrillä, mutta aikanaan mittaukset on tehty teodoliitilla ja mittanauhalla. Jonomittaus aloitetaan tunnetulta pisteeltä, jota sanotaan lähtöpisteeksi. Lähtösuunta otetaan toiselta tunnetulta pisteeltä. Sitä sanotaan lähtösuuntapisteeksi. Mittaus etenee uusien pisteiden kautta, kunnes päästään taas tunnetulle pisteelle. Jonon päätepistettä sanotaan sulkupisteeksi. Sulkupisteellä verrataan mitattuja koordinaatteja tunnettuihin koordinaatteihin. Koordinaattien erot ovat sulkuvirheitä. Niiden perusteella voidaan arvioida mittauksen tarkkuutta. Sulkupisteeltä voidaan havaita vielä suunta toiselle tunnetulle pisteelle. Sitä sanotaan sulkusuuntapisteeksi. Sulkusuuntapisteen avulla määritetään suuntasulkuvirhe, jonka perustella voidaan arvioida suuntahavaintojen tarkkuutta. Kun jono muodostuu edellä kerrotulla tavalla eli siihen kuuluu neljä lähtöpistettä, sanotaan jonoa täydellisesti suljetuksi jonoksi (kuva 288 a.)




**KUVA 288** *Erilaisia jonomittauksia. Jonomittauksessa kuljetetaan koordinaatteja eteenpäin toistamalla säteittäistä mittausta. a) Täydellisesti suljettu jono lähtee liikkeelle kahdelta tunnetulta pisteeltä ja päättyy kahdelle tunnetulle pisteelle. Siihen kuuluu siis neljä lähtöpistettä. b) Epätäydellisessä jonossa on kolme tai kaksi lähtöpistettä. c) Piikkijonon lopussa ei ole lähtöpistettä. Mittauksen lopputuloksia ei näin ollen voi tarkistaa. Tämän vuoksi piikkijonoa ei saa käyttö runkomittauksissa.*

Mittausjono voi olla myös epätäydellisesti suljettu jono (kuva 288 b, s. 349). Epätäydellisesti suljetussa jonossa on neljän lähtöpisteen sijasta joko kolme tai kaksi lähtöpistettä. Sulkusuuntapiste voi puuttua tai kumpikin suuntapiste voivat puuttua. Kuitenkin on tärkeää, että runkomittausta varten mitatussa jonossa on tunnettu piste kummassakin päässä jonoa. Piikkijonoksi sanotussa jonossa on lähtöpiste ja lähtösuuntapiste, mutta jonon lopussa ei ole sulkupistettä (kuva 288 c, s. 349). Mittauksen luotettavuuden ja tarkkuuden arviointi ei ole mahdollista piikkijonoa käytettäessä. Tämän vuoksi piikkijonoa ei saa käyttää runkomittauksissa.

Jonomittausten havainnot tehdään takymetrillä. Mittauksissa voidaan käyttää hyväksi pakkokeskistysperiaatetta. Ajatuksena on keskistää ja tasata kojeet (takymetri ja prismasarjat) kullekin jonopisteelle vain kerran. Mittauksen edetessä kojetta ja tähyksiä siirretään tasausalustalta toiselle mittauksen etenemisjärjestyksessä. Näin menetellen säästyy jonkin verran aikaa ja mittauksen sisäinen tarkkuus paranee. Pakkokeskistysperiaatteen noudattaminen ei kuitenkaan paranna mittausten luotettavuutta. Jos nimittäin jonon uudella pisteellä tehdään keskistysvirhe, virhe ei näy sulkuvirheissä. (Kuva 289.)



**KUVA 289** *Pakkokeskistysperiaatteen käyttö jonomittauksessa. Pakkokeskistysperiaate perustuu kojeen ja tähyksen vaihdettavuuteen tasausalustalla. Menettely nopeuttaa mittausten suoritusta ja sisäistä tarkkuutta. Se ei kuitenkaan paranna mittausten luotettavuutta.*

## 9.4.2 Esimerkkijono

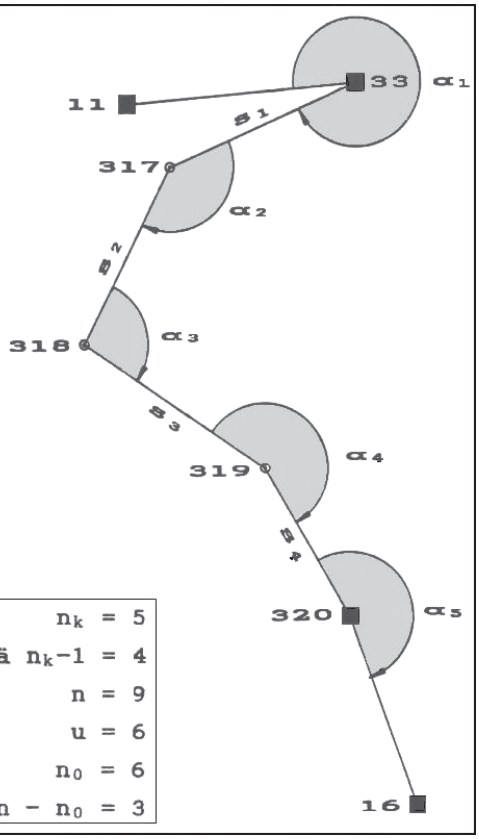
Seuraavaksi tarkastellaan täydellisesti suljetun jonomittauksen esimerkkiä (kuva 290, s. 351). Esimerkki on vanha, sillä se on esitetty jo Seppo Härmälän tehtäväkokoelmassa vuonna 1956. Esimerkin iällä ei kuitenkaan ole merkitystä asian esittelyn kannalta. Esimerkkimittaus on tarkkuuden arvioinnin kannalta sikäli ongelmallinen, että havaintojen tarkkuudesta ei ole dokumentoitua tietoa. Tämän vuoksi tarkkuus-

arvioiden osalta laskennassa lähdetään liikkeelle yleisistä virheolettamuksista ja arvauksista. Havaintojen virheet oletetaan satunnaisiksi virheiksi. Kulmahavaintojen arvioitu keskihajonta on $\sigma_\alpha$ = 0.0010 gon ja etäisyyshavaintojen arvioitu keskihajonta on $\sigma_s$ = 0.010 m. Lähtöpisteiden koordinaatteja pidetään virheettöminä

Tarkoitus on laskea esimerkkijono käsin laskentaan suunnitellulla perinteisellä tasoitusmenetelmällä, joka tunnetaan nimellä Bowditchin menetelmä. Se on johdettu pienimmän neliösumman periaatteita noudattaen. Bowditchin menetelmää on käytetty jo 1800-luvulta alkaen. Kulma- ja etäisyyshavaintojen arvioiduilla tarkkuuksilla ei ole Bowditchin menetelmän näkökulmasta merkitystä. Tarkasteltavaan esimerkkiin liittyvät lopputulosten virhearviot on kuitenkin laskettu pienimmän neliösumman periaatteella. Tässä tarkoituksessa tarvitaan havaintojen arvioituja tarkkuuksia, koska määritettävien suureiden tarkkuudet johdetaan havaintojen tarkkuuksista.

**Havainnot ja lähtöpisteet**

| Piste | Kulma (gon) | Etäisyys (m) | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|---|---|
| 11 | | | 43718.908 | 23950.562 |
| 33 | 378.9008 | | 43738.689 | 24167.835 |
| | | 192.315 | | |
| 317 | 155.4632 | | | |
| | | 181.624 | | |
| 318 | 109.0392 | | | |
| | | 206.514 | | |
| 319 | 228.2180 | | | |
| | | 157.664 | | |
| 320 | 212.6652 | | 43245.685 | 24165.683 |
| 16 | | | 43069.431 | 24227.548 |




| | | |
|---|---|---|
| Taitekulmahavaintojen lukumäärä | $n_k$ | = 5 |
| Sivunpituushavaintojen lukumäärä | $n_k-1$ | = 4 |
| Havaintojen lukumäärä | n | = 9 |
| Parametrien lukumäärä | u | = 6 |
| Havaintojen minimimäärä | $n_0$ | = 6 |
| Havaintojen ylimäärä | $r = n - n_0$ | = 3 |

**KUVA 290** *Esimerkkijonon lähtötiedot ja havainnekuva. Kulmahavaintojen arvioitu keskihajonta on $\sigma_\alpha$ = 0.0010 gon ja etäisyyshavaintojen keskihajonta on $\alpha_s$ = 0.010 m. Etäisyyshavaintojen keskihajonta osoittaa, että kyseessä ei ole nykyaikaisin kojein tehty mittaus. Esimerkki onkin peräisin 1950-luvulta.*

Esimerkkijonon lähtösuunta on

$$t_o = t_{11-33} = \arctan\frac{Y_{33} - Y_{11}}{X_{33} - X_{11}} = 94.22001 \text{ gon} \cdot \tag{165}$$

Mittauksen sulkusuunta on

$$t_S = t_{320-16} = \arctan\frac{Y_{16} - Y_{320}}{X_{16} - X_{320}} = 178.50997 \text{ gon} \cdot \tag{166}$$

Sulkusuunnan havaittu arvo on

$$t_S^{'} = t_0 + \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i - n_k 200 = 178.50641 \text{ gon} . \tag{167}$$

Suuntasulkuvirhe on

$$w_t = t_S^{'} - t_S = -0.00356 \text{ gon} . \tag{168}$$

Sulkupisteen havaitut koordinaatit lasketaan lähtöpisteeltä alkaen summaamalla havaituista suunnista ja etäisyyksistä laskettuja koordinaattieroja. Havaitut koordinaatit ovat

$$\begin{cases} X_{320}^{'} = 43245.6868 \text{ m} \\ Y_{320}^{'} = 24165.6561 \text{ m} \end{cases} . \tag{169}$$

Koordinaattisulkuvirheet ovat

$$\begin{cases} w_X = X_{320}^{'} - X_{320} = +0.0018 \text{ m} \\ w_Y = Y_{320}^{'} - Y_{320} = -0.0269 \text{ m} \end{cases} . \tag{170}$$

Pistesulkuvirhe on koordinaattisulkuvirheiden yhdistelmä:

$$w_p = \sqrt{w_X^2 + w_Y^2} = 0.0270 \text{ m} . \tag{171}$$

Jonon pituus on

$$L = \sum_{i=1}^{n_k - 1} s_i = 738.1 \text{ m} . \tag{172}$$

Mittauksen suhteellinen tarkkuus on

$$r = \frac{w_p}{L} = 36.6 \times 10^{-6} = 36.6 \text{ ppm} \cdot \tag{173}$$

Laskettu suhteellinen tarkkuus tarjoaa yleiskäsityksen tehdyn mittauksen tarkkuudesta ja yhteensopivuudesta lähtöpisteiden kanssa. Suhteellinen tarkkuus täyttää esimerkiksi kaavoitusmittausohjeiden (2003) käyttöpisteiden tarkkuusrajan mittausluokissa 1 ja 2.

Kaavoissa 165–173 $t_0$ on lähtösuunta, $t_S$ on sulkusuunta, $n_k$ on taitekulmahavaintojen lukumäärä, $\alpha_i$ havaittu taitekulma, $t'_S$ on sulkusuunnan havaittu arvo, $w_t$ on suuntasulkuvirhe, $w_X$ on X-suunnan koordinaattisulkuvirhe, $w_Y$ on Y-suunnan koordinaattisulkuvirhe, $w_p$ on pistesulkuvirhe, $L$ on jonon pituus ja $r$ on suhteellinen tarkkuus.

Jos pienimmän neliösumman menetelmää ei käytetä jonon tasoitukseen, voidaan täydellisesti suljettu jono tasoittaa Bowditchin menetelmällä. Laskenta tapahtuu vaiheittain seuraavasti:

1. Lasketaan sivujen havaitut suunnat ja suuntasulkuvirhe.
2. Jaetaan suuntasulkuvirhe tasakorjauksina mitatuille taitekulmille
3. Lasketaan tasoitetut suunnat, sivujen koordinaattierot ja koordinaattisulkuvirheet. Tasoitetuilla suunnilla lasketut koordinaattisulkuvirheet eroavat havaituilla suunnilla lasketuista sulkuvirheistä (vrt. kaava 170, s. 352 ja taulukko 22, s. 354).
4. Jaetaan koordinaattisulkuvirheet sivunpituuksien suhteessa laskettavina korjauksina mittaussivuille (pisteiden välisille koordinaattieroille).
5. Lasketaan uusien jonopisteiden tasoitetut koordinaatit.

Kuvan 290 (s. 351) esimerkkiin liittyvät laskennat on esitetty taulukossa 22 (s. 354).

### 9.4.3 Jonomittauksen virheet ja tarkkuus

Runkomittauksissa on tärkeää saada luotettava kuva mittausten virheistä ja tarkkuudesta. Tasoituslaskennassa mittaushavainnot pyritään ottamaan huomioon tasapuolisesti, havaintojen tarkkuuksien edellyttämällä tavalla. Määritettävien suureiden virheet arvioidaan havaintojen virheistä. Virheiden ja tarkkuuden arvioinnin vuoksi mittaajalla ja laskijalla tulee olla hyvä käsitys mittausten virheiden luonteesta ja havaintojen tarkkuudesta.

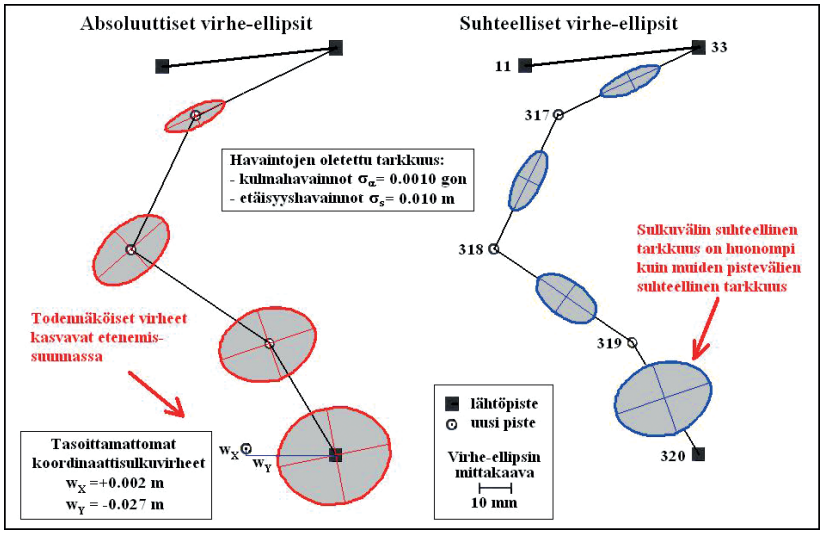
Jonomittausta tehdään takymetrillä säteittäisen mittauksen periaatteella. Tasosijainnin virheitä ja tarkkuutta kuvataan virhe-ellipsien avulla. Säteittäisessä mittauksessa absoluuttisen virhe-ellipsin muodostuminen voidaan kuvata pitkittäis- ja poikittaisvirheiden avulla (kuva 273, s. 327). Pitkittäisvirhe vaikuttaa tähtäyksen suunnassa. Pitkittäisvirheen suuruus on yhtä kuin etäisyydenmittauksen arvioitu keskihajonta. Poikittaisvirhe vaikuttaa tähtäyssädettä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Sen suuruus määräytyy kulmanmittauksen keskihajonnan perusteella (kaava 153, s. 326).

**TAULUKKO 22** *Esimerkkijonon tasoitus Bowditchin menetelmällä. Suunta-sulkuvirhe tasoitetaan ensiksi tasakorjauksen. Sitten lasketaan koordinaattisulkuvirheet. Ne tasoitetaan sivunpituuksien suhteessa.*

| Piste | Kulma (gon) | Korjaus (gon) | Suunta (gon) | Etäisyys (m) | $\hat{X}$ (m)<br>dX (m)<br>Korjaus (m) | $\hat{Y}$ (m)<br>dY (m)<br>Korjaus (m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | | | | | 43718.908 | 23950.562 |
| | | | 94.22001 | | | |
| 33 | 378.9008 | +0.000712 | | | 43738.689 | 24167.835 |
| | | | 273.12152 | 192.315 | -78.8057<br>+0.0010 | -175.4273<br>+0.0108 |
| 317 | 155.4632 | +0.000712 | | | 43659.8843 | 23992.4185 |
| | | | 228.58543 | 181.624 | -163.6202<br>+0.0009 | -78.8397<br>+0.0102 |
| 318 | 109.0392 | +0.000712 | | | 43496.2650 | 23913.5890 |
| | | | 137.62535 | 206.514 | -115.0709<br>+0.0011 | +171.4839<br>+0.0116 |
| 319 | 228.2180 | +0.000712 | | | 43381.1952 | 24085.0845 |
| | | | 165.84406 | 157.664 | -135.5110<br>+0.0008 | +80.5897<br>+0.0088 |
| 320 | 212.6652 | +0.000712 | | | 43245.685 | 24165.683 |
| | | tasakorjaus | 178.50997 | | korjaus sivunpituuksien suhteessa | |
| 16 | | | | | 43069.431 | 24227.548 |
| Suuntasulkuvirhe $w_t$ = -0.00356 gon<br>Koordinaattisulkuvirheet<br>$w_X$ = +0.0018 m<br>$w_Y$ = -0.0269 m | | | | | Suuntatasoituksen jälkeiset koordinaattisulkuvirheet<br>$w_X$ = -0.0038 m<br>$w_Y$ = -0.0414 m | |

Jonomittauksessa koordinaatteja kuljetetaan toistamalla säteittäistä mittausta jonopisteeltä toiselle. Matkan aikana yksittäisten mittausten virheet kasautuvat kulkusuunnassa (kuva 291, s. 355). Jos mittauksessa tyydyttäisiin suoraan havainnoista johdettuihin koordinaatteihin, ongelmaksi muodostuisi viimeisen pistevälin suhteellinen tarkkuus. Viimeistä pisteväliä, joka päättyy sulkupisteeseen, rasittavat kaikki mittauksen kuluessa kasautuneet todennäköiset virheet. Pistesulkuvirhe on yksi

arvio kasautuneiden virheiden suuruudesta. Virhe-ellipsit kuvaavat kasautuneita virheitä sulkuvirheitä teoreettisemmin. Kun mittaukset lasketaan pienimmän neliösumman periaatteella, voidaan nämä hieman eritasoiset virhenäkemykset yhdistää.



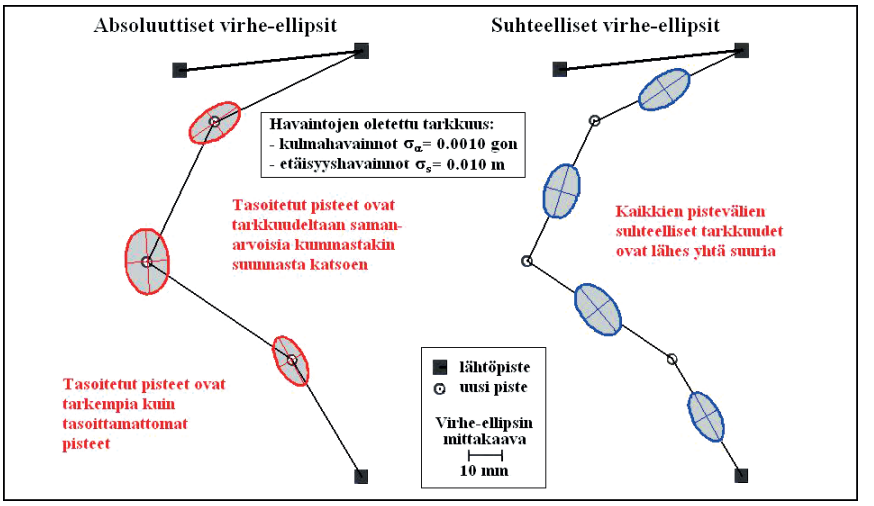

**KUVA 291** *Esimerkkijonon virhe-ellipsit ennen tasoitusta. a) Absoluuttiset virhe-ellipsit esittävät pisteiden todennäköisen sijainnin virheettöminä pidettyjen lähtöpisteiden suhteen. Tasoittamattomassa jonossa todennäköiset virheet kasvavat etenemissuunnassa. b) Suhteelliset virhe-ellipsit kuvaavat pistevälien eli peräkkäisten pisteiden koordinaattierojen todennäköisiä virheitä. Viimeisen pistevälin, uuden pisteen (319) ja virheettömän sulkupisteen (320) välisen sivun, suhteellinen tarkkuus on ongelma. Viimeistä pisteväliä rasittavat kaikki mittauksessa kasautuneet virheet. Tasoituslaskennan yhteydessä nämä virheet jaetaan uudestaan.*

Tasoituksen yhteydessä viimeistä pisteväliä rasittavat virheet jaetaan uudestaan. Virheiden uudelleenjako toimii samalla tavoin sekä Bowditchin että pienimmän neliösumman menetelmää käytettäessä. Tasoituslaskennassa virheet eivät poistu, vaan virheet jaetaan laskennallisesti uudelleen. Tässä mielessä tasoituslaskenta kuvaa nimenä hyvin käytettävää laskentamenetelmää. Laskennan jälkeen kaikkien pistevälien suhteellinen tarkkuus on suurin piirtein samaa suuruusluokkaa. (Kuva 292, s. 356.)

Jos mittauksen suhteellista tarkkuutta arvioidaan virhe-ellipsien perusteella, lähtökohtana ovat suhteelliset virhe-ellipsit. Pistevälin suhteellinen tarkkuus on

$$r = \frac{a}{s}, \tag{174}$$

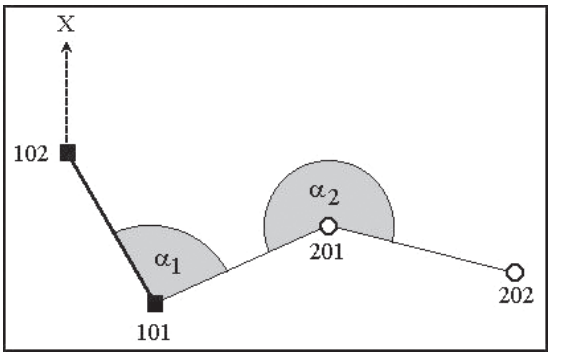
jossa $r$ on pistevälin suhteellinen tarkkuus, $a$ on suhteellisen virhe-ellipsin isoakselin puolikas ja $s$ on pistevälin pituus.




**KUVA 292** *Esimerkkijonon virhe-ellipsit tasoituksen jälkeen. a) Absoluuttiset virhe-ellipsit käyttäytyvät samalla tavoin jonoa kummastakin suunnasta tarkasteltaessa. b) Kaikkien pistevälien suhteelliset tarkkuudet ovat samaa suuruusluokkaa. Virheiden tasoitus ei ole häivyttänyt virheitä, vaan virheet on jaettu laskennassa uudestaan.*

## 9.4.4 Tehtäviä

**195.** Laske kuvan monikulmiojonon sivujen 101–201 ja 201–202 suuntakulmat, kun lähtöpisteiden 101 ja 102 koordinaatit ovat $X_{101}$ = 1210.130 m, $Y_{101}$ = 3811.919 m, $X_{102}$ = 1587.405 m, $Y_{102}$ = 3573.006 m ja mitatut taitekulmat ovat $\alpha_1$ = 106.5222 gon ja $\alpha_2$ = 251.0853 m (kuva 293).




**KUVA 293** *Tehtävä 195.*

**196.** Jonomittauksessa saadut koordinaattisulkuvirheet ovat $w_X$ = +0.012 m ja $w_Y$ = +0.023 m. Mikä on jonon suhteellinen tarkkuus, kun jonon pituus on $L$ = 861 m?

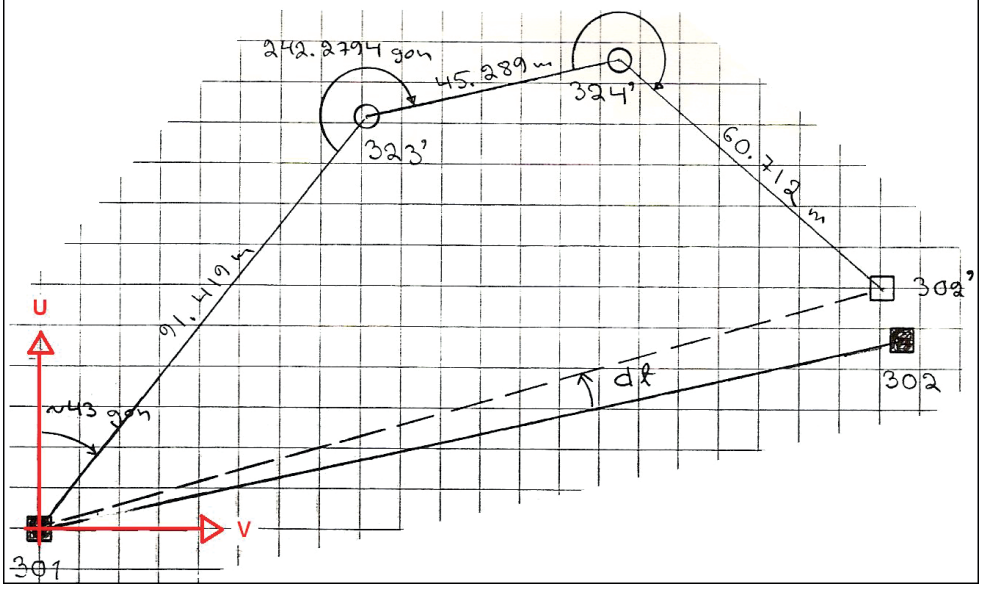
**197.** Arvioi kuvan 292 perusteella esimerkkijonon kaikkien pistevälien suhteelliset tarkkuudet. Miten arvioidut tarkkuudet sopivat yhteen sulkuvirheen (kaava 173, s. 352) perusteella tehdyn arvion kanssa?

**198.** Laske pisteen 286 koordinaatit Bowditchin menetelmällä.

| Piste | Taitekulma (gon) | Vaakaetäisyys (m) | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|---|---|
| 117 | | | 1587.405 | 3573.006 |
| 114 | 104.0168 | 213.425 | 1210.130 | 3811.919 |
| 286 | 191.6974 | 238.630 | | |
| 119 | 239.0042 | | 1453.665 | 4191.618 |
| 120 | | | 1459.070 | 4473.168 |

**199.** Laske pisteiden 323 ja 324 koordinaatit kuvan esittämässä jonomittauksessa. Kyse on epätäydellisesti suljetusta jonosta. Jono voidaan laskea Helmerin muunnoksella kuvan esittämällä tavalla. Mitä voidaan sanoa mittauksen suhteellisesta tarkkuudesta? (Kuva 294.)

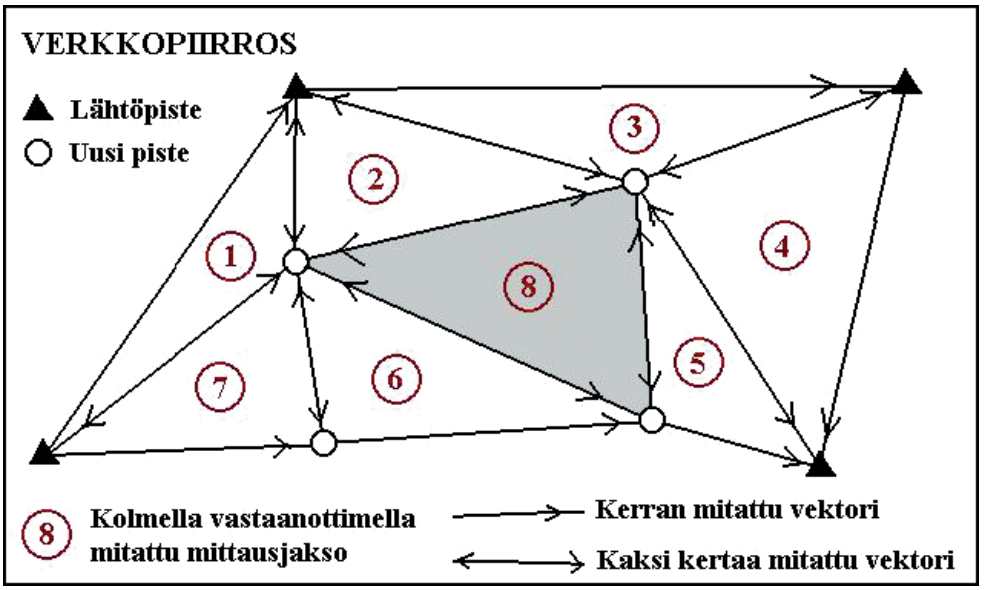
| Piste | Taitekulma (gon) | Vaakaetäisyys (m) | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|---|---|
| 301 | | | 2198.752 | 1535.451 |
| 323 | 242.2794 | 91.419 | | |
| 324 | 260.1186 | 45.289 | | |
| 302 | | 60.712 | 2231.149 | 1684.778 |




**KUVA 294** *Tehtävä 199: lähtötiedot, havainnot ja havainnepiirros.*

## 9.5 Runkomittausta satelliittien avulla

Paikannussatelliitteihin perustuvilla mittauksella voidaan määrittää tasorunkopisteitä kaikissa kiintopisteluokissa. Runkomittauksissa käytetään ensisijaisesti staattista GNSS-mittausta. Käyttökiintopisteitä voi mitata myös reaaliaikaisia GNSS-mittaustapoja käyttäen (RTK- ja verkko-RTK-mittaukset). Staattinen mittaus on paikannussignaalin kantoaallon vaiheen havaitsemiseen perustuva menetelmä. Staattisella mittauksella määritetään pistevälien kolmiulotteisia koordinaattieroja eli avaruusvektoreita. Mittauksissa käytettävien vastaanottimien ja vaihehavaintojen laskentaohjelmien on oltava geodeettisiin mittauksiin soveltuvia. Staattisen mittauksen verkko muistuttaa rakenteeltaan perinteisen kolmiomittauksen verkkoa. Staattisessa mittauksessa onkin kyse verkon sivujen pituuksien ja suuntien mittauksesta ja näihin havaintoihin perustuvasta kolmiomittauksesta. (Kuva 295.)




**KUVA 295** *Kolmella vastaanottimella mitatun runkoverkon mittausjaksot.*

Staattisen mittauksen havaintojen keruu tapahtuu mittausjaksoittain. Mittausjakso tarkoittaa samanaikaisesti havaitsevien vastaanottimien yhteistä havaintoaikaa. Mittausjakson havaintotiedostot prosessoidaan yhdessä mittausten jälkilaskennassa (post processing). Laskennan tuloksena saadaan vastaanottimien antennien väliset koordinaattierot. Ne ovat pisteiden välisten paikkavektorien komponentteja. Koordinaattierot lasketaan WGS84-järjestelmän maakeskisessä, suorakulmaisessa koordinaatistossa. Mittausten jälkilaskennassa on kyse havaintojen käsittelystä erotustekniikalla. Laskentatekniikalla pyritään hallitsemaan mittauksen systemaattisia virheitä.

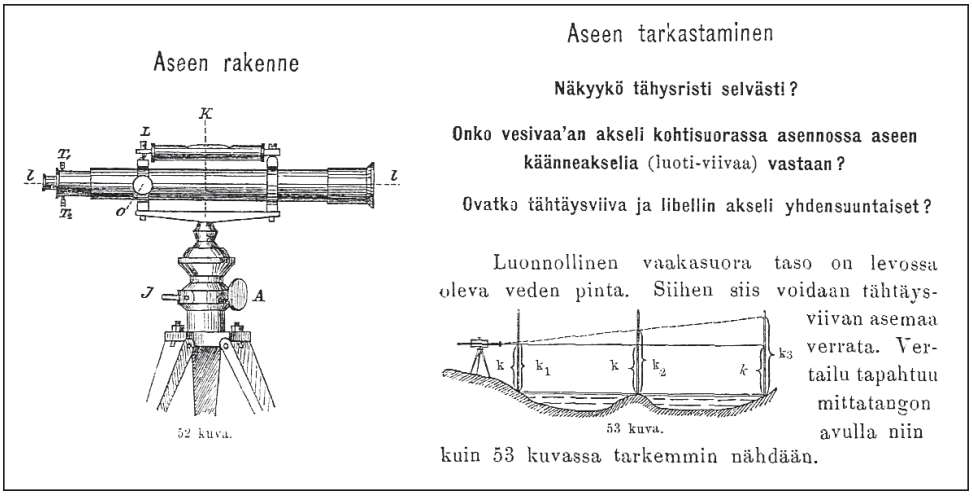
Jälkilaskennan jälkeen suoritetaan vapaa verkkotasoitus. Vapaa verkko ei sisällä riittävästi tietoja, jotta verkon pisteet voitaisiin paikantaa koordinaatistossa. Laskennassa vapaan verkon geometria (sivujen pituudet, korkeuserot ja koordinaatit) määräytyy ainoastaan havainnoista. Vapaalla tasoituksella paikannetaan karkeita virheitä ja arvioidaan havaintojen satunnaisten virheiden suuruutta. Virheellisesti mitatut antennikorkeudet ja keskistysvirheet ovat tyypillisiä vapaassa tasoituksessa havaittavia virheitä.

Lopuksi havaitut vektorit pakotetaan lähtöpisteiden määrittämään tilaan eli suoritetaan pakotettu verkkotasoitus. Pakotettua tasoitusta varten kiinnitetään riittävä määrä koordinaateiltaan ja korkeudeltaan tunnettuja pisteitä lähtöpisteiksi. Lähtöpisteiden avulla siirrytään haluttuun koordinaatti- ja korkeusjärjestelmään. Laskentojen eri vaiheet raportoidaan niin, että raporttien perusteella voidaan todeta mittauksen laatu ja mittausohjeiden mukainen suoritus.

Nykyisin pääosa runkomittauksista tehdään satelliittipaikannuksen keinoin. Takymetrillä tehtäviä runkomittauksia ei pidä kuitenkaan väheksyä. Esimerkiksi rakentamisen ja kaivosteollisuuden eri mittaustehtävissä tehdään runkomittauksia, joihin takymetri soveltuu satelliittipaikanninta paremmin.

# 10 KOJEIDEN KÄSITTELY JA KALIBROINTI

Kirjan viimeisessä luvussa tarkastellaan mittauslaitteiden käsittelyyn liittyviä yleisiä ohjeita ja kalibrointitoimintaa. Asiat liittyvät kojeiden käyttökunnon ja tarkkuuden ylläpitoon. Nämä ovat tärkeitä asioita, koska mittauslaitteilla pitää pystyä tekemään erittäin tarkkoja mittauksia pitkienkin matkojen yli. Mittauskojeet ovat arvokkaita, hienomekaanisia, optisia ja elektronisia kojeita. Mittauskojeita tulee käsitellä asianmukaisesti, jotta ne säilyvät toimintakuntoisina ja tarkkoina. (Kuva 296.)

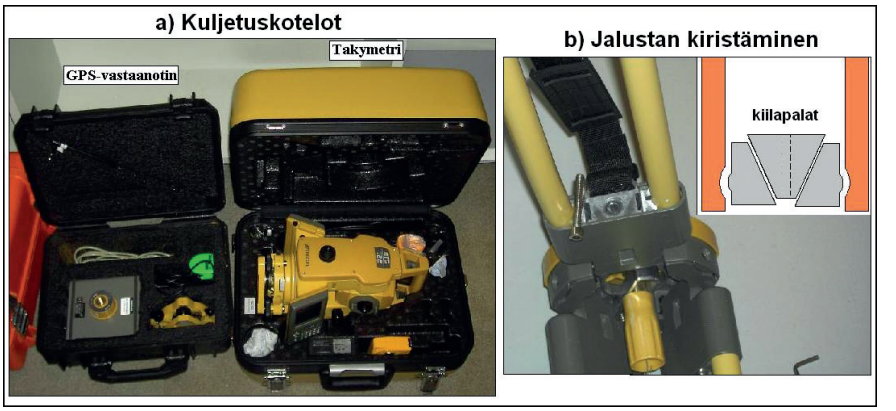



**KUVA 296** *1800-luvun loppupuolella julkaistussa todennäköisesti ensimmäisessä suomenkielisessä maanmittaustekniikan oppikirjassa esitellään vaaituskojeen tarkastukseen liittyvät asiat lähes samalla tavoin kuin nykyisissä oppikirjoissa (Karlsson 1889, kooste sivuista 64–67.)*

## 10.1 Mittausvälineiden käsittely

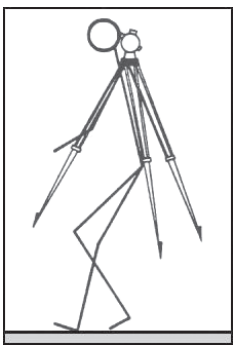
Teknisten laitteiden käyttöön liittyvä yleinen ohje on, että niiden käsittelyssä tulee noudattaa valmistajan ohjeita. Tämä pitää paikkansa myös mittauskojeiden osalta. Mittauskojeen käyttöohjeista löytyy yleensä kojeen tekniset tiedot, huolto-ohjeet, toimintojen tarkastusmenettelyt ja säätöohjeet. Ohjeiden perusteella mittaaja pystyy toteamaan kojeen toimintakunnon ja tarkkuuden, pitämään yllä kojeen toimintakuntoa ja pystyy arvioimaan kojeen huoltotarpeen.

Mittauslaitteita tulee aina käsitellä varovasti. Erityistä varovaisuutta on noudatettava otettaessa laite kuljetuskotelosta ja laitettaessa se takaisin kuljetuskoteloon tai muuten laitetta liikuteltaessa. Esimerkiksi takymetriä kuljetuskoteloon laitettaessa sen telkiruuvit avataan. Koje asetetaan koteloon ohjeiden mukaiseen asentoon. Kuljetusasento kerrotaan yleensä koteloon liimatussa tarrassa. (Kuva 297.)




**KUVA 297** *a) Mittauskojeita ja niiden varusteita säilytetään ja kuljetetaan tätä varten rakennetuissa kuljetuslaukuissa. Kuljetuskoteloon mahtuu kojeen käytön kannalta tärkeimmät varusteet. b) Kojejalustan jalkojen kiristäminen on yleinen huoltotoimenpide. Erityisesti puujalustoja joutuu säätämään.*

Kevyttä laitetta, kuten vaaituskojetta, saa siirtää lyhyitä matkoja kiinnitettynä kolmijalkaan. Siirron voi tehdä olkapäällä tai niin, että kolmijalka on koottuna kainalossa ja itse koje etupuolella. Takymetriä ei ole syytä kuljettaa lyhyitäkään matkoja kolmijalkaan kiinnitettynä. Ennen kojeen liikuttelua (jalustassa, ilman jalustaa, kuljetuskotelossa) kojeen telkiruuvit saa kiristää vain kevyesti. Mahdollisen iskun sattuessa kojeen osat pääsevät liikkumaan, kun telkiruuvit eivät ole kiinni. Satelliittipaikanninta ja etäisyydenmittausprismoja kuljetetaan usein kartoitussauvaan kiinnitettynä. Näissä kojeissa ei ole liikkuvia osia, joten ne eivät voi vioittua kovin herkästi. (Kuva 298.)



**KUVA 298** *Vaaituskojetta saa siirtää jalustaan kiinnitettynä olkapäällä tai kainalossa. Jos kojetta kuljetetaan jalusta kainaloon koottuna, pidetään koje etupuolella.*

Mittauslaitteita ei ole koskaan syytä jättää vartioimatta kadulle, rakennustyömaalle tai muuhun paikkaan, jossa liikutaan. Vaikkei mitään vakavampaa tapahtuisikaan, ihmiset voivat uteliaisuudesta siirtää laiteita. Asiaton välineiden siirtely riittää pilaamaan mittaukset.

Ennen käyttöä mittauskojeiden tulee antaa tasaantua ympäristön lämpötilaan. Tähän voi kojeen koosta, valmistusmateriaaleista ja lämpötilaerosta riippuen kulua jopa puoli tuntia aikaa. Nopeat lämpötilan muutokset ja kojeiden epätasainen lämpeneminen häiritsevät erityisesti kojeiden tasausta. Esimerkiksi aurinko lämmittää kojetta epätasaisesti. Tämän vuoksi kesällä, aurinkoisella ilmalla voi tarkoissa mittauksissa joutua käyttämään aurinkovarjoa. Talvella kolmijalka ei pysy jään ja lumen päällä pitkiä aikoja tasattuna

Lämpimällä säällä ilman väreily saattaa estää mittaukset. Väreily on erityisen haitallista lähellä maanpintaa tai lähellä rakenteita kulkevissa tähtäyksissä. Myös sisä- ja ulkotilojen väliset tähtäykset ovat ilman väreilylle alttiita.

Havaintoja tehtäessä mittauslaitteisiin ei saa koskea tarpeettomasti. Ainoastaan kaukoputken kohdistukseen, mitta-asteikkojen lukemiseen ja näppäimistön käyttöön liittyvät toimenpiteet ovat tarpeellisia mittauksen aikana. Kokonaisuudessaan havainnot on pyrittävä tekemään rauhallisesti, mutta nopeasti.

Käytössä likaantuneet kojeet ja kojejalustat puhdistetaan irtonaisesta liasta, kun ne tuodaan varastopaikkaan. Kostunutta kojetta ei saa säilyttää kuljetuskotelossaan vaan se pidetään sisätiloissa, ilmavassa ja kuivassa paikassa.

Laitteiden optisia osia on käsiteltävä erityisen varovasti. Niihin ei saa koskea paljain sormin. Optisia osia kemiallisin ainein puhdistettaessa on aina tiedettävä osien valmistusmateriaali ja mahdollinen pinnoitus, jotta puhdistusaineet eivät naarmuttaisi tai syövyttäisi niitä.

Mittaustuloksissa on aina virheitä. Erityisesti systemaattisten virheiden välttämiseksi mittauslaitteet on tarkastettava ja kalibroitava säännöllisesti laitevalmistajan ohjeiden ja mittaustöistä annettujen yleisten ohjeiden mukaisesti.

## 10.2 Kalibrointitoiminta

### 10.2.1 Kalibrointi

Kalibroinnilla tarkoitetaan mittauslaitteen näyttämän oikeellisuuden testausta. Se käsittää kaikki toimenpiteet, joiden tarkoituksena on laitteen virheiden määrittäminen. Kalibrointiin voi kuulua myös kalibroitavan laitteen säätö. Kalibroinnilla saadaan selville mittauslaitteen tarkkuus. Kalibroinnin tarkoitus voi olla myös edellistä määrittelyä laajempi. Tällöin kalibroinnin kohde voi olla paitsi mittauslaite myös mittausmenetelmä ja laskentaohjelma tai näiden muodostama mittausjärjestelmä. Tällöin puhutaan järjestelmäkalibroinnista. Siinä kalibroinnin kohteeksi voi tulla myös mittausvälineitä käyttävä henkilöstä. Suomessa on suoritettu muun muassa fotogrammetrisiin mittauksiin, runkomittauksiin ja kartoitus- ja merkintämittauksiin liittyviä järjestelmäkalibrointeja. Järjestelmäkalibrointiin liittyvä toiminta on kuitenkin viime vuosina vähentynyt.

Kalibrointi on vertausmittausta. Kalibroinnissa määritetään kuinka paljon tutkittavan laitteen tai menetelmän antamat lukemat poikkeavat normaalista, johon lukemia verrataan. Normaalin muodostaa tarkemmin tunnetun mittauslaitteen lukema tai kalibroinnin ajan vakiona pysyvä vertaussuure.

Mittauksissa edellytetään käytettävän kalibroituja mittausvälineitä. Geodeettisten kojeiden (esimerkiksi mittanauhan, vaituskojeen, takymetrin ja satelliittipaikantimen) kalibroinnista on maininta esimerkiksi kaavoitusmittausasetuksessa ja kaavoitusmittausohjeissa. Ilman virallisia määräyksiäkin on selvää, että mittauslaitteiden tarkkuudesta on pidettävä huolta. Ilman kalibrointia mittauskojeiden tarkkuutta ei voi taata. Kalibroinnissa on kyse mittausten laadunvalvonnasta ja siihen liittyvän hyvän mittaustavan noudattamisesta.

### 10.2.2 Kalibrointilajit

Kalibrointitoiminta voidaan jakaa kahteen osaan. Nämä ovat määrityskalibrointi ja seurantakalibrointi. Lisäksi voidaan ajatella, että mittauskojeiden ohjeiden mukainen käyttö on kalibrointitoiminnan kolmas taso, eräänlainen kalibrointitoiminnan minimitaso.

Määrityskalibroinnissa määritetään mittauslaitteen kojevirheiden arvot tarkoituksena todeta

- onko kojeen mittaustarkkuus määräysten mukainen
- vastaako kojeen mittaustarkkuus mittaustehtävien edellyttämää tarkkuutta
- onko kojeen mittaustarkkuus valmistajan ilmoituksen mukainen?

Määrityskalibrointi suoritetaan laboratorio-olosuhteissa. Sen suorittajalla tulee olla jonkin kansallisen tai kansainvälisen mittausalan organisaation valtuutus. Suomessa Mittatekniikan keskus (MIKES) on keskeinen kalibrointipalveluita välittävä ja koordinoiva organisaatio. Määrityskalibrointeja voidaan teknisesti suorittaa laitteiden huoltopaikoissa, mutta niillä ei ole välttämättä virallisen, puolueettoman kalibrointipaikan asemaa. Kuitenkin laitevalmistajien valtuuttamia huoltopaikkoja voidaan pitää luotettavina toimijoina kalibrointiasioissa. Määrityskalibroinnit ovat maksullista toimintaa. Määrityskalibrointi on hyvä tehdä kojeen hankinnan yhteydessä, suurempien huoltotoimenpiteiden jälkeen ja kojeille, joiden tarkkuuden on todettu oleellisesti muuttuneen.

Seurantakalibrointi on niin sanottua kenttäkalibrointia, jota tekee kojeen käyttäjä. Siinä ei määritetä kojevirheiden arvoja vaan ainoastaan seurataan pysyvätkö kojeen ominaisuudet ja mittaustulokset samoina kuin ne olivat edeltävässä määrityskalibroinnissa. Erilaisia seurantakalibroinnin menetelmiä on kuvattu kojeiden käyttöohjeissa, mittausohjeissa ja -standardeissa ja yleisessä ammattikirjallisuudessa.

Varsinaisten kalibrointien (määritys- ja seurantakalibrointien) lisäksi mittauskojeiden valmistajien antamien ohjeiden mukainen käyttö, tarkastaminen ja säätö ovat kalibrointitoimintaan kuuluvia asioita. Ohjekirjan mukaiset tarkastus- ja säätömenettelyt voidaan rinnastaa seurantakalibrointiin. Kojeiden ohjeiden mukainen käyttö on kalibrointitoimintaa minimitasolla.

### 10.2.3 Kalibrointi- ja huoltorytmi

Suurin osa mittauskojeissa ilmenneistä huoltotarpeista voitaisiin välttää, mikäli laitteiden ylläpidossa noudatettaisiin säännöllistä kalibrointi- ja huoltorytmiä. Seuraavassa taulukossa on esitetty vaaituskojeiden ja takymetrien ohjeelliset kalibrointi- ja huoltovälit. Taulukossa mainittu helppo ympäristö tarkoittaa, että kojetta käytetään normaaleissa mittausolosuhteissa. Vaativassa ympäristössä esiintyy tavallista enemmän kosteutta, pölyä ja tärinää. Tällaiset vaativat olosuhteet liittyvät yleensä rakennustyömaihin. (Taulukko 23, s. 366.)

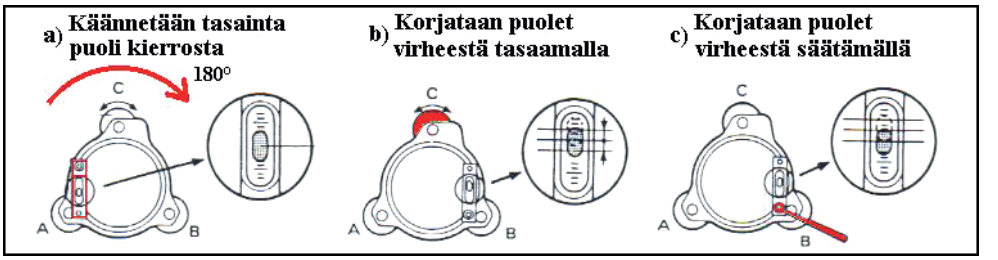
**TAULUKKO 23** *Vaaituskojeiden ja takymetrien ohjeellinen kalibrointi- ja huoltorytmi. Vaativassa ympäristössä on tavallista enemmän kosteutta, pölyä ja tärinää.*

| Käyttökohde | Toimenpide | Vaaituskoje | Takymetri |
|---|---|---|---|
| Helppo ympäristö | Kalibrointi | 2 kertaa/vuosi | kerran vuodessa |
| | Ulkoinen puhdistus | kerran vuodessa | kerran vuodessa |
| | Täydellinen puhdistus | joka kolmas vuosi | joka viides vuosi |
| Vaativa ympäristö | Kalibrointi | 4 kertaa/vuosi | 2 kertaa/vuosi |
| | Ulkoinen puhdistus | 2-3 kertaa/vuosi | 2 kertaa/vuosi |
| | Täydellinen puhdistus | joka toinen vuosi | kerran vuodessa |

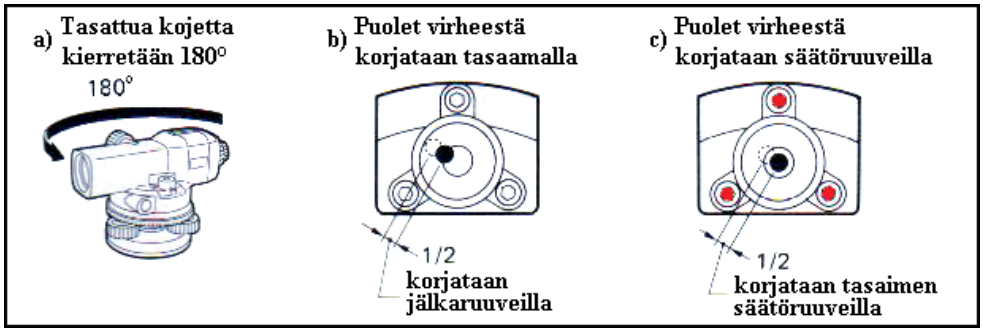
## 10.3 Mittauskojeiden tarkastusmenetelmät

### 10.3.1 Tasainten tarkastus

Erilaisia tasaimia löytyy useimmista mittauskojeista ja kartoitussauvoista. Niitä käytetään kojeiden tasaukseen. Takymetrin ja vaaituskojeen nestetasainten kunto tulisi tarkistaa aina tasauksen yhteydessä. Tarkastusmenettely on hyvin yksinkertainen. Koje tasataan yhdessä asennossa ja sitten kojetta ja tasainta sen mukana käännettään 180°. Jos tasaus säilyy käännön jälkeen, tasain on kunnossa. Jos tasaimen kupla kuitenkin poikkeaa keskiasennosta, tasainta tulee säätää. Säätö tapahtuu korjaamalla puolet poikkeamasta tasaamalla koje jalkaruuveilla. Toinen puoli korjataan tasaimen säätöruuveilla. Jos kojeessa on sekä putkitasain että rasiatasain, ensiksi tarkastetaan ja säädetään tasaimista tarkin eli putkitasain. Kun se on kunnossa, koje tasataan huolellisesti ja rasiatasain säädetään suoraan tasaimen säätöruuveilla näyttämään oikein. (Kuvat 299 ja 300, s. 367.)




**KUVA 299** *Putkitasaimen tarkastus ja säätö. a) Tasain tasataan kuvan asennossa (tasain on käännetty jalkaruuvin C suuntaan). Tasainta käännetään 180°. b) Jos tasaimen kupla pysyy keskellä, tasain on kunnossa. Jos kupla kuitenkin poikkeaa keskiasennosta, puolet poikkeamasta poistetaan tasaamalla jalkaruuvilla C. c) Toinen puoli poikkeamasta poistetaan kiertämällä tasaimen säätöruuvia. (Geostar Oy:n esite.)*

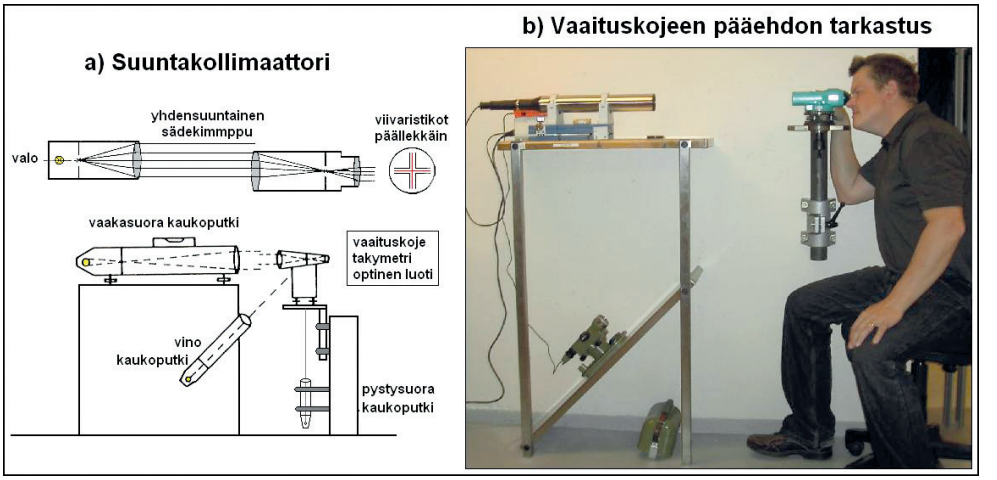



**KUVA 300** *Rasiatasaimen tarkastus ja säätö. a) Tasattua kojetta kierretään 180°. b) Puolet mahdollisesta virheestä korjataan tasaamalla jalkaruuveilla. c) Toinen puoli mahdollisesta virheestä korjataan tasaimen säätöruuveilla. Rasiatasaimen säätöön liittyvät toimenpiteet eivät ole yhtä täsmällisiä kuin putkitasaimen säädöt, koska rasiatasaimen säädöt joudutaan tekemään kahdella jalka- ja säätöruuvilla. (Geostar Oy:n esite.)*

### 10.3.2 Suuntakollimaattori

Suuntakollimaattori on laboratoriokoje, jonka avulla voidaan määrittää tietyt vaaituskojeiden ja kulmanmittauskojeiden kojevirheet. Osa kojevirheistä voidaan myös säätää pois määrityksen yhteydessä. Kollimaattori on pitkäpolttovälinen kaukoputki. Okulaarin polttopisteessä on pistemäinen valolähde. Valolähteestä lähtevät valonsäteet läpäisevät polttotasossa olevan viivaristikon ja jatkavat objektiivin läpäistyään matkaansa yhdensuuntaisena sädekimppuna. Kollimaattori on siis fokusoitu äärettömyyteen. Tutkittava koje asetetaan kojepöydälle, suunnataan kollimaattorin viivaristikkoon ja fokusoidaan niin, että sekä kojeen että kollimaattorin viivaristikot näkyvät terävinä. Jos kummankin kojeen viivaristikot näkyvät päällekkäin, ovat kaukoputkien tähtäysakselit yhdensuuntaiset. (Kuva 301 a, s. 368.)

Tarkastellaan tilannetta, jossa kollimaattori on asetettu tarkasti vaakasuoraan ja siihen tähdätään tasatulla vaituskojeella. Havaitaan, että kollimaattorin ja vaituskojeen viivaristikot eivät osu päällekkäin. Tämä tarkoittaa, että vaituskojeen tähtäysakseli ei ole vaakasuorassa. Vaituskojeen tähtäysakseli voidaan asettaa kollimaattorin avulla vaakasuoraan siirtämällä vaituskojeen viivaristikkoa pystysuunnassa kunnes se osuu päällekkäin kollimaattorin viivaristikon kanssa. (Kuva 301, s. 368.)




**KUVA 301** *a) Kolmella kaukoputkella varustetun suuntakollimaattorin periaatekuva. Vaakasuoraa kaukoputkea käytetään vaaituskojeiden tarkastukseen. Vaakasuoran ja vienon kaukoputken avulla voidaan määrittää kulmanmittauskojeen akselivirheet. Pystysuoran kaukoputken avulla voidaan tarkastaa optinen luoti. b) Vaaituskojeen pääehdon tarkastus meneillään vaakasuoran kollimaattorin avulla. Pääehto tarkoittaa, että vaaituskojeen tähtäysakselin pitää olla vaakasuorassa. Kuvan kollimaattori on Rovaniemen ammattikorkeakoulun maanmittaustekniikan laboratorion laite. Kuvassa Timo Karppinen.*

Teodoliitin ja takymetrin akselivirheitä tarkastettaessa kollimaattorin päätehtävä on tarjota äärettömän kaukana oleva täsmällinen tähtäyspiste. Kollimaattorin valaistu viivaristikko muodostaa täsmällisen tähtäyspisteen. Akselivirheiden määrittämiseksi tarvitaan sekä vaakasuorassa että vinossa olevat kaukoputket. Akselivirheitä määritettäessä vaakasuoran kollimaattorin ei tarvitse olla täsmälleen vaakasuorassa. Myöskään vinon kollimaattorin ei tarvitse olla missään määrätyssä kaltevuudessa.

### 10.3.3 Vaaituskojeen tarkastus

Ennen kuin vaaituskojeella voidaan saada luotettavia tuloksia, on se tarkastettava. Vaaituskojeet ovat rakenteeltaan melko yksinkertaisia kojeita, joten todetut virheet voidaan yleensä säätää pois kojeesta. Suurta tarkkuutta vaativissa mittauksissa, kuten korkeusrunkopisteiden vaaituksissa ja monissa rakentamisen mittauksissa, kojevirheiden tarkastukset tulee suorittaa jopa päivittäin.

Jotta vaaituskoje näyttäisi oikeita lukemia, tulee sen täyttää seuraavat ehdot:

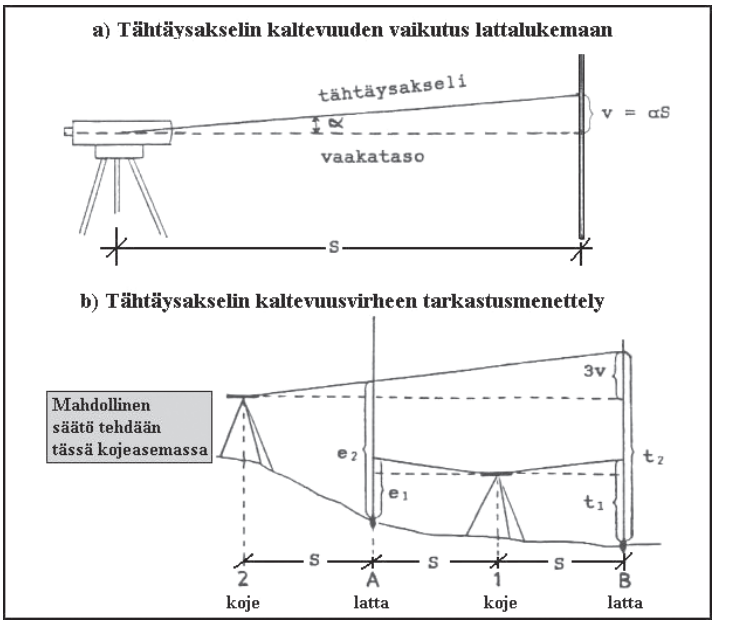
– Itsetasaavan vaaituskojeen rasiatasaimen kuplan tulee pysyä kaikissa kojeen asennoissa kohdistusrenkaan keskellä. Rasiatasaimen mahdollinen virhe säädetään pois.

- Viivaristikon vaakaviivan tulee tasauksen jälkeen olla vaakasuorassa. Asennon tarkastus suoritetaan tähtäämällä lattaan. Tähtäyskohtaa liikutetaan sivusuunnassa täsmäruuvilla ja katsotaan muuttuuko tähtäyksen korkeus latassa. Viivaristikon vinous voidaan mahdollisesti korjata viivaristikon asentoa säätämällä.
- Vaaituskojeen tähtäysakselin tulee olla tasauksen jälkeen vaakasuorassa. Tätä vaatimusta sanotaan vaaituskojeen pääehdoksi. Jos se ei toteudu, kojeessa on tähtäysakselin kaltevuusvirhe.

Tähtäysakselin kaltevuusvirhe aiheuttaa lattalukemiin etäisyyteen suoraan verrannollisen virheen. Virhe voidaan poistaa viivaristikon asentoa pystysuorassa suunnassa säätämällä. (Kuvat 302 a, s. 370 ja 303, s. 371.)

Vaaituskojeen pääehdon toteutuminen on kojeen tarkan käytön kannalta kriittinen asia. Jos kojeasemasta tehdyt taakse- ja eteentähtäykset ovat yhtä pitkiä, pääehdon toteutuminen ei aiheuta ongelmia. Jos tähtäysetäisyydet vaihtelevat ja pääehto ei toteudu, mitatut korkeuserot ovat auttamatta virheellisiä. Tämän vuoksi pääehto pitää tarkastaa säännöllisesti. Se voidaan tarkistaa niin sanotulla tarkalla mittausmenetelmällä. Menetelmän tarkkuus tarkoittaa itse tarkastusmenetelmän periaatteellista oikeellisuutta. Tarkastuksen vaatimien mittausten virheet toki vaikuttavat lopputuloksen oikeellisuuteen. Vaihtoehtoisesti pääehto voidaan tarkistaa vaakasuoran kollimaattorin avulla (edellä kuva 301, s. 368). Kollimaattori on kuitenkin harvinainen koje, joten yleensä käytetään tarkkaa mittausmenetelmää. Tarkasta mittausmenetelmästä tunnetaan useita toisistaan yksityiskohdissa eroavia menetelmiä.

Tarkan menetelmän yhdessä suoritustavassa tarkastettava vaaituskoje tasataan ja keskistetään kahden vaaittavan pisteen puoliväliin etäisyydelle $s$ vaaittavista pisteistä. Vaaittavat pisteet voidaan merkitä esimerkiksi latta-alustoja käyttämällä. Tähtäysetäisyyden on hyvä olla noin 10 - 20 m. Koska mahdollinen virhe on suoraan verrannollinen tähtäysetäisyyteen, tähtäysakselin kaltevuusvirhe näkyy sitä suurempana mitä pidempi tähtäysetäisyys on. Toisaalta tähtäysetäisyys ei saa olla liian suuri, sillä ylipitkiä etäisyyksiä käytettäessä latan lukematarkkuus heikkenee. (Kuva 302 b., s. 370)




**KUVA 302** *a) Vaaituskojeen tähtäysakselin kaltevuus aiheuttaa lattalukemaan etäisyyteen suoraan verrannollisen virheen. b) Tähtäysakselin kaltevuusvirhe tarkastetaan vaaitsemalla kahden pisteen (A ja B) korkeuserot kahdesta kojeasemasta (1 ja 2). Tarkastukseen liittyvät laskut yksinkertaistuvat, kun pisteiden välimatkat ovat yhtä pitkiä. Tarvittaessa vaaituskojetta säädetään kojeasemassa 2.*

Ensimmäisessä kojeasemassa latoista otetaan lukemat $t_1$ (taakselukema) ja $e_1$ (eteenlukema). Näissä lukemissa mahdollinen tähtäysakselin kaltevuusvirhe ($v$) ilmenee yhtä suurena ja kumoutuu korkeuseroa laskettaessa:

$$\Delta h_1 = (t_1 - v) - (e_1 - v) = t_1 - e_1 \,. \qquad (175)$$

Lattojen puolivälistä mitattu korkeusero ($\Delta h_1$) on siis virheetön tähtäysakselin kaltevuusvirheen suhteen ja se muodostaa tarkastusmittauksen ajan vakiona pysyvän normaalin, johon seuraavan mittauksen tulosta verrataan.

Seuraavaksi vaituskoje viedään toisen latan taakse etäisyydelle $s$ ja havaitaan lukemat $t_2$ ja $e_2$ (kuva 302). Näissä lukemissa mahdollinen tähtäysakselin virhe näkyy suoraan verrannollisena etäisyyksiin $3s$ ja $s$. Mahdollinen tähtäysakselin kaltevuusvirhe ($v$) näkyy lasketussa korkeuserossa seuraavasti:

$$\Delta h_2 = (t_2 - 3v) - (e_2 - v) = t_2 - e_2 - 2v \,. \qquad (176)$$

Kummastakin kojeasemasta mitattujen korkeuserojen tulisi olla yhtä suuria eli $\Delta h_1 = \Delta h_2$. Tähtäysakselin kaltevuusvirhe voidaan tämän perusteella laskea seuraavasti:

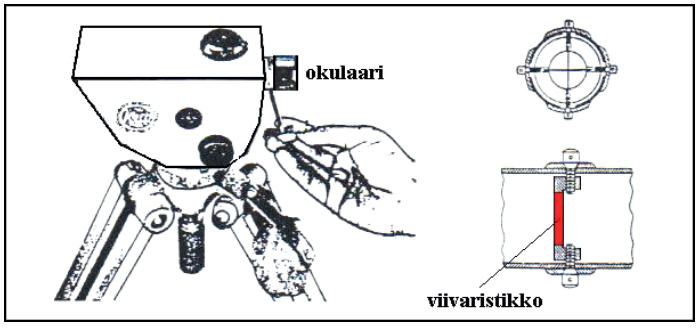
$$v = \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{2} = \frac{(t_2 - e_2) - (t_1 - e_1)}{2}. \qquad (177)$$

Tarkastuksessa todettu tähtäysakselin kaltevuusvirhe voidaan poistaa kojeesta viivaristikkoa pystysuorassa suunnassa siirtämällä. Mahdollisen säädön vuoksi vaaituskojetta ei saa liikuttaa viimeisestä kojeasemasta ennen kuin säätötarve on selvitetty. Säätämiseen ei kannata ryhtyä, jos virhe on pienempi kuin 1 mm/$s$, jossa $s$ on tarkastuksessa käytetty lyhin tähtäysmatka. Muutaman millimetrin virhe voi helposti aiheutua lattalukemien kirjaamisen epävarmuudesta, kun pienin lukemayksikkö on millimetri.

Säätöä varten lasketaan etäisyydeltä 3$s$ tehtyä taaksetähtäystä vastaava korjattu lukema ($t'_2$):

$$t'_2 = t_2 - 3v\,. \qquad (178)$$

Kojeen säädössä tulee noudattaa laitevalmistajan ohjeita. Yleensä itsetasaavissa vaaituskojeissa säätö suoritetaan okulaarin silmäkappaleessa olevien ruuvin tai kahden ruuvin avulla. Säätö on kaikkein yksinkertaisinta suorittaa yhdellä säätöruuvilla varustetulle kojeella. Jos joutuu käyttämään kahta säätöruuvia, toista ruuvia löysätään ja toista kiristetään. Säätö pitää tehdä huolellisesti, jotta viivaristikko pysyy paikallaan myös säädön jälkeen. (Kuva 303.)




**KUVA 303** *Tähtäysakselin kaltevuutta säädetään siirtämällä viivaristikkoa pystysuunnassa. Säätöruuvit sijaitsevat okulaarin ympärillä ja niitä voi olla yhdestä neljään. Neljällä säätöruuvilla varustetussa kojeessa voidaan tähtäysakselin kaltevuuden lisäksi säätää viivaristikon asentoa myös pystysuunnan suhteen. Tällöin viivaristikon mahdollinen vinous voidaan korjata.*

### 10.3.4 Akselivirheiden määritys

Teodoliitilla ja takymetrillä tehtävien kulmanmittausten tarkkuuteen vaikuttavia kojevirheitä ovat akselivirheet ja epäkeskisyysvirheet. Kojevirheillä ei ole merkitystä, kun tähtäyssuunnat mitataan kojeen I- ja II-asentojen keskiarvona eli sarjahavaintoina. Takymetrin normaali käyttöasento on kuitenkin I-asento. I-asennossa mitattaessa akselivirheet voivat aiheuttaa ongelmia jyrkissä tähtäyksissä. Epäkeskisyysvirheillä voi olla merkitystä lyhyillä tähtäyksillä.

Nykyaikaisia takymetrejä käytettäessä kojeeseen on mahdollista määrittää ja tallentaa akselivirheiden arvot. Takymetri käyttää akselivirheiden arvoja havaintojen korjaamiseen. Korjausten pitää perustua oikeisiin virhearvoihin. Koska osa kojevirheistä voi muuttua kojetta käytettäessä, pitää korjauksien perusteena olevat kojevirheet määrittää säännöllisesti.

Epäkeskisyysvirheitä ei ole mahdollista määrittää muutoin kuin laboratoriossa erikoisvälinein. Sen sijaan akselivirheet (kollimaatiovirhe $c$, tappikaltevuus $w$ ja pystykehän nollapistevirhe $e_0$) on mahdollista määrittää normaalissa käyttöympäristössä. Akselivirheiden määritys perustuu kohteen havaitsemiseen I- ja II-asennoissa. Ensiksi määritetään kollimaatiovirhe ja pystykehän nollapistevirhe käyttäen lähellä vaakatasoa olevaa mittauskohdetta. Toiseksi mitataan jokin jyrkässä kulmassa näkyvä kohde. Sen avulla määritetään tappikaltevuus. (Kuva 304.)

Rovaniemen ammattikorkeakoulu
University of Applied Sciences

Tekniikka ja liikenne
Maanmittaustekniikka
Jokiväylä 11
96300 Rovaniemi
www.ramk.fi

Pasi Laurila, puh. 020 798 5353
Jaakko Lampinen, puh. 020 798 5350

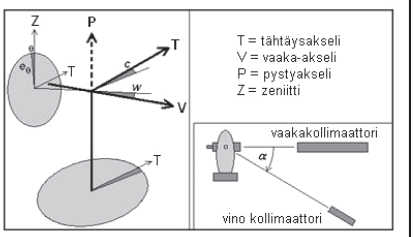
**AKSELIVIRHEET**

Koje: _____

Sarjanumero: _____

Päiväys: _____

Havaitsija: _____




I-asennossa vaakasuoran tähtäyksen pystykulmalukema on 100 gon.

**VAAKAKOLLIMAATTORI**

Vaakakehä:

$\ell'_I =$ _____

$\ell'_{II} =$ _____

$\Delta\ell' = \ell'_I - \ell'_{II} + 200 =$ _____

Pystykehä:

$z'_I =$ _____

$z'_{II} =$ _____

$e'_0 = (z'_I + z'_{II} - 400)/2 =$ _____

**Kollimaatiovirhe:**

$c = \Delta\ell'/2 =$ _____

**VINO KOLLIMAATTORI**

Vaakakehä:

$\ell''_I =$ _____

$\ell''_{II} =$ _____

$\Delta\ell'' = \ell''_I - \ell''_{II} + 200 =$ _____

Pystykehä:

$z''_I =$ _____

$z''_{II} =$ _____

$e''_0 = (z''_I + z''_{II} - 400)/2 =$ _____

**Tappikaltevuus:**

$$w = \frac{\Delta\ell'' - \frac{2c}{\cos\alpha}}{2\tan\alpha} =$$ _____

$\alpha = 100 - z''_I + e''_0 =$ _____

**Pystykehän nollapistevirhe:**

$e_0 = (e'_0 + e''_0)/2 =$ _____

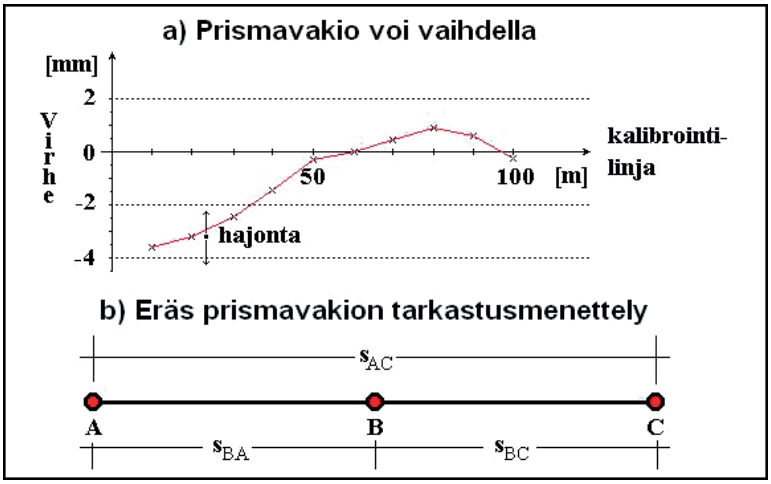
**KUVA 304** *Akselivirheiden määrittämiseen ja laskentaan suunniteltu havaintolomake. Lomake on tarkoitettu suuntakollimaattorilla tehtäviin mittauksiin, mutta sitä voi käyttää myös normaalissa mittausympäristössä.*

Normaalissa mittausympäristössä voi olla vaikeaa löytää riittävän jyrkässä kulmassa näkyvä mittauskohde etenkin, kun kohteen pitäisi olla myös mahdollisimman kaukana. Määrityksessä käytettävien mittauskohteiden tulisi olla mahdollisimman kaukana, koska tällöin kojeen epäkeskisyysvirheillä ei ole merkitystä mittaustulosten kannalta. Jos akselivirheiden määrityksessä on mahdollista käyttää suuntakollimaattoria, ei pisteiden valintaan liittyviä ongelmia ole (kuva 301, s. 368).

### 10.3.5 Prismavakion tarkastus

Prismavakio on elektro-optisen etäisyydenmittauksen korjaus, joka riippuu takymetristä ja etäisyydenmittauksessa käytettävästä prismasta. Virheellinen prismavakio voi aiheuttaa senttimetrien virheitä mitattuihin etäisyyksiin. Tämän vuoksi prismavakion arvo pitää pystyä tarkistamaan. Tarkastus voidaan tehdä tunnetun vertailumatkan avulla. Vertailumatka voidaan mitata esimerkiksi kalibroitua mittanauhaa käyttäen. Tarkastus voidaan tehdä myös ilman tunnettua vertailumatkaa.

Tarkastuksen periaate ilman tunnettua vertailumatkaa on yksinkertainen (kuva 305 b). Mitataan matka AC ensiksi yhdessä osassa ja sitten kahdessa osassa (BA ja BC) ja verrataan tuloksia. Pisteiden A, B ja C tulee olla samalla suoralla ja samalla korkeustasolla. Näin menetellen vertailtavat matkat ovat vaakamatkoja. Tarkastusta varten ei tarvitse tuntea pisteiden oikeita välimatkoja. Riittää, kun välimatkat pysyvät tarkastuksen ajan vakiona. Aluksi mitataan matka AC yhdessä osassa (tulos $s_{AC}$). Sitten takymetri tasataan sivun puoliväliin pisteelle B ja mitataan osamatkat AB (tulos $s_{BA}$) ja BC (tulos $s_{BC}$). Mittaukset on syytä toistaa useita kertoja ja laskea niistä keskiarvot. Havaintoihin tulee tehdä myös sääkorjaus.




**KUVA 305** *a) Prismavakion määritetty arvo voi vaihdella matkan mukaan vaihe-eromittauksen jaksollisen virheen vuoksi. b) Prismavakio voidaan tarkastaa mittaamalla matka AC sekä yhtenä kokonaisuutena että kahdessa osassa. Tarkastusta varten kullekin pisteelle (A, B ja C) tasataan tasausalustat. Alustalle laitetaan mittausvaiheen mukaan joko takymetri tai prisma.*

Merkitään, että mittauksessa käytetty prismavakion arvo on $e_{\text{vanha}}$. Jos yhdessä osassa mitattu matka ($s_{AC}$) on yhtä kuin osamatkojen summa ($s_{BA}+s_{BC}$), käytetty prismavakio on oikea. Jos vertailtavat matkat kuitenkin eroavat, prismavakion virhe on

$$\Delta e = s_{BA} + s_{BC} - s_{AC} . \tag{179}$$

Uusi korjattu prismavakio on

$$e_{uusi} = e_{vanha} - \Delta e . \tag{180}$$

Prismavakion määrityksessä tällä keinoin saatava arvo riippuu jossain määrin käytetyistä matkoista, koska elektro-optisen etäisyydenmittauksen kaikkia virheitä ei voi hallita näin yksinkertaisella tarkastuksella. Erityisesti elektro-optisen etäisyydenmittauksen jaksolliset virheet aiheuttavat sen, että prismavakiolle ei voida määrittää kovin tarkkaa arvoa edellä kuvatulla menettelyllä. (Kuva 305 a, s. 373.)

### 10.3.6 Optisen luodin tarkastus

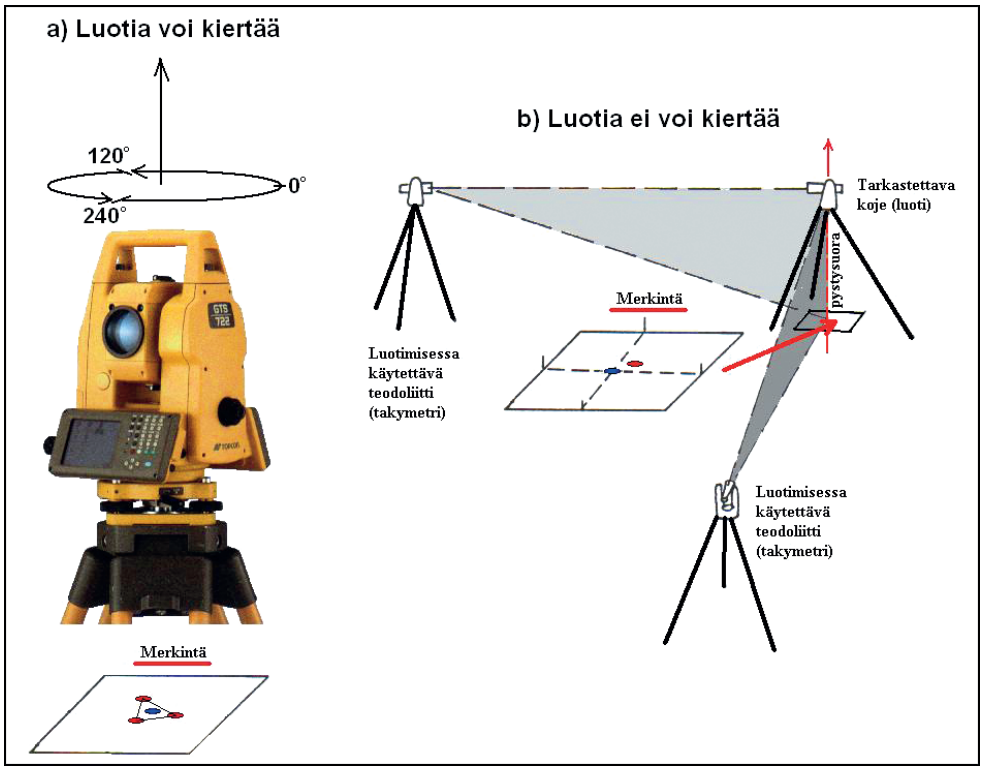
Teodoliitti, takymetri ja tähykset keskistetään optisen luodin avulla mittauspisteille. Jos optinen luoti ei näytä oikein, tästä aiheutuu virheitä sekä tähtäyssuuntiin että etäisyyksiin. Erityisesti lyhyillä tähtäysetäisyyksillä keskistyksestä aiheutuvat virheet ovat usein keskeinen mittausten virhelähde. Tämän vuoksi takymetrien, teodoliittien ja tähysten optiset luodit tulee tarkastaa ja säätää säännöllisesti.

Optisen luodin tarkastusmenettelyitä on erilaisia. Jos optinen luoti sijaitsee takymetrin alhidadissa, jolloin se pyörii kojeen pystyakselin ympäri, voidaan tarkastus suorittaa merkitsemällä luotimispiste tasatun kojeen alle asetetulle paperille kolmessa asennossa (kuva 306 a, s. 375). Luotiminen voidaan suorittaa esimerkiksi jokaisen jalkaruuvin kohdalta. Jos luoti näyttää joka suunnasta samaan pisteeseen, luoti on kunnossa. Jos paperille saadaan kolme luotimispistettä, oikea piste on merkittyjen pisteiden muodostaman kolmion painopisteessä. Luoti voidaan säätää näyttämään tähän pisteeseen. Säätö tulee tehdä laitevalmistajan ohjeiden mukaisesti. Säätötoimenpide ei ole aivan yksinkertainen, joten varminta on antaa laitevalmistajan huollon suorittaa optisen luodin säätäminen.

Jos luotia ei voi kiertää kojeen pystyakselin ympäri, optisen luodin tarkastus voidaan tehdä luotimalla vertailupiste takymetrillä tai teodoliitilla kahdesta kohtisuorasta suunnasta (kuva 306 b, s. 375). Tähdätään tarkastettavan kojeen viivaristikkoon tai tasausalustalla olevaan tähykseen, siirretään tähtäys alas ja merkitään tähtäyslinja kojeen alapuolelle asetettuun paperiin. Kojeiden viivaristikot saadaan näkyviin fokusoimalla kaukoputket äärettömyyteen. Tähtäys viivaristikkoon pitää tehdä huolellisesti objektiiviaukon keskelle, koska suoraan viivaristikkoon tähtäämällä on mahdollista

tehdä objektiivin halkaisijan suuruinen virhe. Tähtäyksen siirto lattiaan eli luotiminen tehdään tappikaltevuuden eliminoimiseksi kummassakin kojeasennossa.

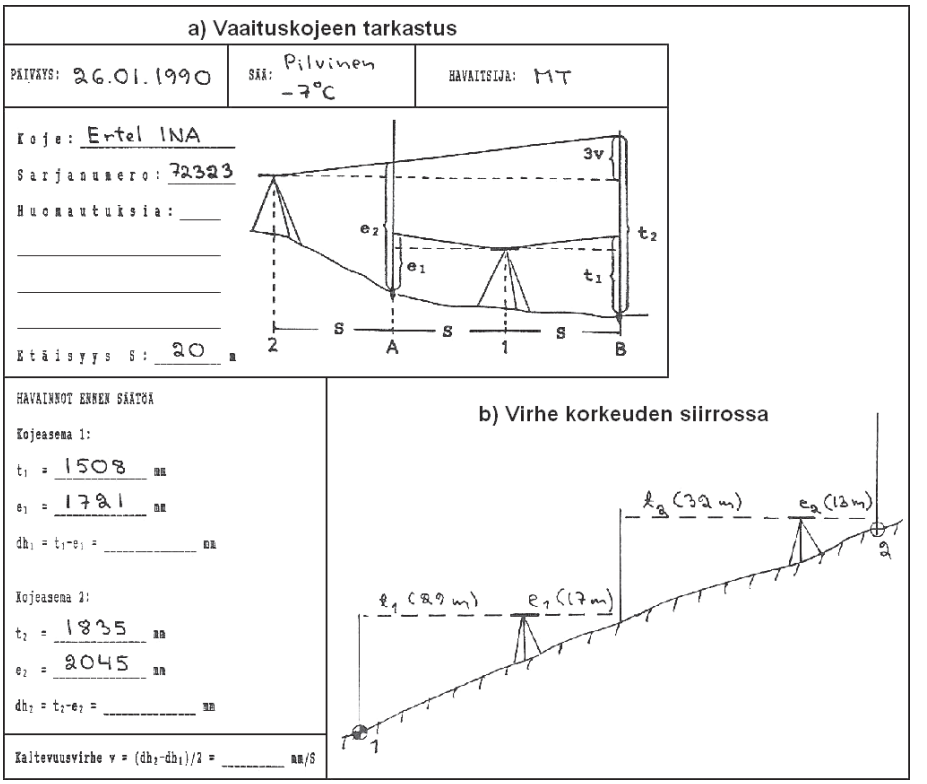
Jos tarkastettavan kojeen optinen luoti osoittaa luodittujen tähtäyslinjojen leikkauspisteeseen, luoti on kunnossa. Jos luodin näyttämä kuitenkin poikkeaa leikkauspisteestä, se tulee säätää näyttämään leikkauspisteeseen tai lähettää laitevalmistajalle säädettäväksi.




**KUVA 306** *Optinen luodin tarkastus a) Tarkastus on yksinkertainen toimenpide, jos luotia voi kiertää pystyakselin ympäri. b) Jos luotia ei voi kiertää, voidaan luodin tarkastus tehdä esim. luotimalla vertailupiste huolellisesti kahdesta kohtisuorasta suunnassa teodoliitilla tai takymetrillä.*

## 10.4 Tehtäviä

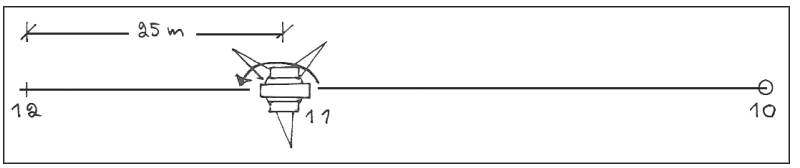
**200.** a) Vaaituskoje tarkastettiin ns. tarkalla mittausmenetelmällä kuvan 307 a (s. 376) esittämällä tavalla. Laske tähtäysakselin kaltevuusvirhe. b) Jos tarkastetulla vaaituskojeella suoritettaisiin kuvan 307 b (s. 376) esittämä korkeuden siirto, kuinka suuri virhe pisteen 2 korkeuteen tulisi? Oletuksena on, että kojetta ei säädetä tarkastuksen yhteydessä.




**KUVA 307** *Tehtävät 200: a) vaaituskojeen tarkastus, b) tähtäysakselin kaltevuusvirheen vaikutus korkeuden siirrossa.*

**201.** Takymetrin kollimaatiovirheen määrittämiseksi mitattiin lähes vaakatasossa olevaan pisteeseen suunnat kummassakin kojeasennossa viisi kertaa. Laske kollimaatiovirhe, kun havainnot olivat 32.6694, 232.6650, 32.6692, 232.6660, 32.6692, 232.6656, 32.6692, 232.6654, 32.6686 ja 232.6660.

**202.** Takymetrillä merkittiin piste 12 samalle linjalle pisteiden 10 ja 11 kanssa kuvan 308 esittämällä tavalla. Koje keskistettiin pisteelle 11 ja sillä tähdättiin pisteelle 10. Kaukoputki käännettiin vaaka-akselin ympäri ja piste 12 merkittiin tähtäyslinjalle 25 m päähän. Jälkeenpäin suoritetussa tarkastuksessa todettiin, että takymetrin kollimaatiovirhe oli -3.5 mgon. Jos tämä virhe vaikutti kojeessa merkintää tehtäessä, kuinka suuri virhe siitä aiheutui pisteen 12 sijaintiin? Kummalle puolelle linjaa kojeesta katsoen merkintä tehtiin?




**KUVA 308** *Tehtävä 202: linjan merkintä.*

# 11 KIRJALLISUUTTA

Seuraaville sivuille on koottu erilaisia kirjallisia lähteitä ryhmiteltynä sen mukaan, mikä niiden suhde tähän kirjaan on. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirja perustuu suoraan kirjoittajan Tampereen teknillisessä korkeakoulussa ja Rovaniemen ammattikorkeakoulussa kirjoittamiin oppimateriaaleihin. Osaa materiaaleista ei ole enää yleisesti saatavilla. Kaikki Rovaniemen ammattikorkeakoulussa kirjoitetut oppimateriaalit ovat kuitenkin saatavissa sähköisessä muodossa kirjoittajalta.


Laurila, P. 1992a. Mittausvälineiden käsittely ja mittausten suoritus. Luentomoniste. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

--- 1992b. Rakennusteknillisten mittausten laskuharjoitustehtäviä. Opintomoniste 157. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

--- 1992c. Satunnaisvirheiden kasautuminen ja tasoituslaskenta. Luentomoniste. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

--- 1992d. Jonomittauksen laskuesimerkki. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

Laurila, P. 2002a. Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmät. Luentomoniste. Rovaniemen ammattikorkeakoulu, Rovaniemi.

--- 2002b. Koordinaattijärjestelmien matematiikkaa. Luentomoniste. Rovaniemen ammattikorkeakoulu, Rovaniemi.

Laurila, P. 2005a. Geodeettisen laskennan perusteet. Luentomoniste. Rovaniemen ammattikorkeakoulu, Rovaniemi.

--- 2005b. Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet. Luentomoniste. Rovaniemen ammattikorkeakoulu, Rovaniemi.

--- 2005c. GPS-paikannuksen perusteet. Luentomoniste. Rovaniemen ammattikorkeakoulu, Rovaniemi.


Seuraavat kirjat ovat olleet kirjoittajan oman näkemyksen kehittymisen kannalta tärkeitä ulkomaisia teoksia.


Anderson, J. M. – Mikhail, E. M. 1998. Surveying: Theory and Practice. 7. painos. The McGraw-Hill Companies, Inc., USA.

Blachut, T. J. – Chrzanowski, A. – Saastamoinen, J. 1979. Urban Surveying and Mapping. Springer-Verlag, New York.

Kahmen, H. 2006. Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde. 20. painos. Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Mikhail, E. M. – Gracie, G. 1981. Analysis and Adjustment of Survey Measurements. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Seuraavassa luettelossa on eräitä vanhoja julkaisuja, jotka ovat joko historiallisesti jollakin tavoin merkittäviä kirjoja ja/tai joita on käytetty kuvien lähteenä.

Heck, J. G. 2001. Iconographic Encyclopædia. L'Aventurine, Pariisi. Alkuperäisteos *Systematischer Bilder-Atlas zum Conversations-Lexikon, Ikonographische Encyklopädie der Wissenschaften und Künste*: Julkaistu 1844, Brockhaus, Leipzig.

Heinonen, A. A. 1987. Karttatekniikka. Valtion painatuskeskus, Helsinki.

Heiskanen, V. A. 1937. Pallotähtitieteen perusteet. WSOY, Porvoo.

Hirvonen, R. A. 1965. Tasoituslasku. Teknillisten tieteiden akatemia, Helsinki.

Härmälä, S. – Heiskanen, V. A. 1972. Maastomittaus ja kartoitus. WSOY, Porvoo.

Karlsson, K. J. 1889. Maanmittaus-Oppi. Kuopio.

Maanmittaushallitus 1944**.** Ohjeet rakennusretkikuntia varten. Maanmittaushallituksen julkaisuja n:o 33. Valtioneuvoston kirjapaino, Helsinki.

Maanmittaushallitus 1951**.** Maanmittaushallituksen ohjeet asemakaavamittauksia varten. Maanmittaushallituksen julkaisuja n:o 28, 3. painos. Valtioneuvoston kirjapaino, Helsinki.

Stigzelius, H. 1959. Kaivosmittaus. Kauppa- ja teollisuusministeriön ammattikasvatusosasto, Helsinki.

Ternryd, C. – Lundin, E. 1970. Mätningsteknik och fotogrammetri. Akademieförlaget, Göteborg.

Th. Wulff Oy**.** Luettelo geodeettisista, metsätieteellisistä ja matemaattisista koneista – Piirustustarpeita. Th. Wulff Osakeyhtiön myyntiluettelo 1920-luvulta.

Lopuksi on yleinen luettelo maanmittaustekniikkaan liittyvistä suomalaisista ja ulkomaisista kirjoista, joita kirjoittaja ei ole välttämättä käyttänyt suoranaisina lähteinä Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -kirjaa tehdessään, mutta ne tarjoavat kuitenkin hyödyllistä tietoa ja tekemistä geodesiasta ja mittaustekniikasta kiinnostuneille.

Bauer, M. 2003. Vermessung und Ortung mit Satelliten: GPS und andere satellitengestützte Navigationssysteme. 5. painos. Herbert Wichmann Verlag, Augsburg.

Benning, W. 2011. Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen. 4. painos. Wichmann, Berlin.

Bilker, M. – Kaartinen, H. 2001. The Quality of realtime kinematic (RTK) GPS Positioning. Geodeettinen laitos, tiedonanto 2001:1, Kirkkonummi.

Bilker-Koivula, M. – Ollikainen, M. 2009. Suomen geoidimallit ja niiden käyttäminen korkeuden muunnoksissa. Geodeettinen laitos, tiedote 29, Kirkkonummi.

Defence Mapping Agency 1984. Geodesy for the Layman. Defence Mapping Agency Technical Report 80-003. Osoitteessa http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/geolay/Geo4lay.pdf. 10.5.2012

El-Rabbany, A. 2006. Introduction to GPS: The Global Positioning System. 2. painos. Artech House, Inc., Norwood, MA.

Gross, G. 2004. Vesmessungstechnische Berechnungen: Aufgabensammlung mit Lösungen. 3. painos. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden.

Groves, P. 2008. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensot Integrated Navigation Systems. Artech House, London.

Gruber, F. J. – Joeckel, R. 2007. Formelsammlung für das Vermessungswesen. 13. painos. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden.

Heikkilä, R. – Jaakkola, M. 2004. Johdatus tienrakentamisen automaatioon. Tiehallinnon selvityksiä 61/2004. Edita Prima Oy, Helsinki.

Hofmann-Wellenhof, B. – Lichtenegger, H. – Wasle, E. 2008. GNSS – Global Navigation Satellite Systems. Springer Verlag, Wien.

Honkanen, P. 2010. Lahden kaupungin taso- ja korkeusjärjestelmien vaihtaminen EUREF-FIN- ja N2000-järjestelmiin. Diplomityö. Aalto-yliopisto, insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta, maanmittaustieteiden laitos, Espoo.

Huhtamies, M. 2008. Maan mitta – Maanmittauksen historia Suomessa 1633-2008. Edita Publishing Oy, Helsinki.

Häkli, P. – Puupponen, J. – Koivula, H. – Poutanen, M. 2009. Suomen geodeettiset koordinaatistot ja niiden väliset muunnokset. Geodeettinen laitos, tiedote 30, Kirkkonummi.

Härmälä, O. – Wikman, O. 2009. Kaivosmittaus. In: Hakapää, A. – Lappalainen, P. (toim.). Kaivos- ja louhintatekniikka. Opetushallitus, Helsinki.

JUHTA 2008a. JHS 153: ETRS89-järjestelmän mukaiset koordinaatit Suomessa. Julkisen hallinnon suositus, JUHTA - julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta. Osoitteessa http://www.jhs-suositukset.fi/web/guest/jhs/recommendations/153. 10.5.2012.

--- 2008b. JHS 154: ETRS89-järjestelmään liittyvät karttaprojektiot, tasokoordinaatistot ja karttalehtijako. Julkisen hallinnon suositus, JUHTA - julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta. Osoitteessa http://www.jhs-suositukset.fi/web/guest/jhs/recommendations/154. 10.5.2012.

JUHTA 2010. JHS 160: Paikkatiedon laadunhallinta. Julkisen hallinnon suositus, JUHTA - julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta. Osoitteessa http://www.jhs-suositukset.fi/web/guest/jhs/recommendations/160. 10.5.2012.

--- 2010b. JHS 163: Suomen korkeusjärjestelmä N2000. Julkisen hallinnon suositus, JUHTA - julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta. Osoitteessa http://www.jhs-suositukset.fi/web/guest/jhs/recommendations/163. 10.5.2012.

JUHTA 2012. JHS-suosituksen luonnos: Kiintopistemittaus EUREF-FIN -koordinaatistossa. JUHTA - julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta. Osoitteessa http://www.jhs-suositukset.fi/web/guest/jhs/projects/gnss_measuring_in_euref-fin/palautepyynto_26032012. 10.5.2012.

Kakkuri, J. 1991. Planeetta Maa. Ursan julkaisuja 42. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Helsinki.

Kallio, U. 1998. Tasoituslasku. Otatieto, julkaisu 587, Helsinki.

Kuparinen, A. 1992. Mittamiehen käsikirja. Gummerus, Jyväskylä.

Kyyrönen, K. 2000. Talonrakennus 2. Otava, Helsinki.

Maanmittaushallitus 1983. Kaavoitusmittausohjeet 1983. Maanmittaushallituksen julkaisu n:o 49.

Maanmittauslaitos 2003. Kaavoitusmittausohjeet 2003. Maanmittauslaitos. Osoitteessa http://www.finlex.fi/data/normit/13750-Kaavoitusmittausohjeet_2003.pdf. 10.5.2012.

Manninen, P. 1992. Ammattikorkeakoulun deskriptiivinen geometria. Tammertekniikka, Jyväskylä.

Mansfeld, W. 2010. Satellitenortung und Navigation. 3. painos. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Martikainen, M. – Santala, J. 1990. Rakennusmittaus. Rakennuskirja, Helsinki.

Miettinen, S. 2006. GPS Käsikirja. Genimap Oy, Porvoo.

M-Mies Oy 2007. Tietokoneavusteinen rakennustyömaan mitta- ja määrätiedon hallinta. M-Mies Oy, Turku.

Niemelä, O. 2004. Maasto ja kartta – Kartanvalmistajan ja kartankäyttäjän käsikirja. Maanmittauslaitos, Genimap Oy ja Suomen Kartografinen Seura, Helsinki.

Ollikainen, M – Koivula, H - Poutanen, M. 2001. EUREF-FIN –koordinaatisto ja EUREF-pistetihennykset Suomessa. Geodeettisen laitoksen tiedote 24.

Poutanen, M. 1998. GPS-paikanmääritys. Ursan julkaisuja 64. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Hämeenlinna.

Poutanen, M. (toim.). 2003. Maan muoto. Ursan julkaisuja 86. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Helsinki.

Punkari, M. (toim.) 1984. Suomi avaruudesta. Ursan julkaisuja 24. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Helsinki.

Rantanen, P. 2006. Maanmittauslaskennan perusteet. 2. painos. Opetushallitus, Helsinki.

Rantanen, P. 2006. Maastomittauksen perusteet. Opetushallitus, Helsinki.

Resnik, B. – Bill, R. 2009. Vermessungskunde für den Planungs-, Bau- und Umweltbereich. 3. painos. Wichmann, Heidelberg.

RICS 2007. EDM Calibration. RICS guidance note, 2nd edition. Royal Institution of Chartered Surveyors (RICS), United Kingdom, Coventry.

RICS 2010. Guidelines for the use of GNSS in land surveying and mapping. RICS guidance note GN 11/2010. Royal Institution of Chartered Surveyors (RICS), United Kingdom, Coventry.

Robinson, A. 2008. Mittaamisen historia. Multikustannus Oy, Helsinki.

Salmenperä, H. 1993. Maa-, vesi- ja kalliorakentamisen mittaukset. Opintomoniste 164. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

Salmenperä, H. 2001. Virheteorian ja tasoituslaskun alkeet. Opetusmoniste 2/2001. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere.

Salmenperä, H. 2003. Runko- ja kartoitusmittaukset. Opetusmoniste 1/2003. Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere.

Salmenperä, H. 2004. Maasto- ja rakennusmittausten perusteet. Opetusmoniste 5/2004. Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere.

Scherer, M. 1999. Vermussungswesen Multimedial 2.0. Wichmann Verlag, Heidelberg. CD-tallenne.

Shofield, W. – Breach, M. 2007. Engineering surveying. 6. painos. Elsevier Ltd, Oxford.

Tekniikan sanastokeskus 2002. TSK 30: Paikannussanasto. Tekniikan sanastokeskus ry. Osoitteessa http://www.tsk.fi/tiedostot/pdf/paikannussanasto.pdf. 10.5.2012.

Tekniikan sanastokeskus 2011. TSK 22: Geoinformatiikan sanasto. Sanastokeskus TSK ry. Osoitteessa http://www.tsk.fi/tiedostot/pdf/GeoinformatiikanSanasto.pdf. 10.5.2012.

Teknillinen korkeakoulu 1991. Numeerisen kartoituksen maastomittausohjeet. Teknillinen korkeakoulu, Geodesian laboratorion julkaisu 20/1991, Otaniemi.

Tikka, M. 1992. Käytännön geodesia II: Mittauskojeet. 2. painos. Otatieto, julkaisu 439, Hämeenlinna.

Torge, W. 2003. Geodäsie. 2. painos. Walter de Gruyter GmbH & Co., Berlin.

Valtanen, E. 2007. Matematiikan ja fysiikan käsikirja. Genesis-Kirjat Oy, Jyväskylä.

van den Berg, J. – Lindberg, Å. 1983. Measuring practice on the building site. 2. painos. CIB/FIG Report No. 69. The National Swedish Institute for Building Research, Gävle.

Vermeer, M. 2010a. Matemaattinen geodesia Maa-6.3230. Luentomoniste. Aalto-yliopisto, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

--- 2010b. Tilastolliset menetelmät geodesiassa Maa-6.3282. Luentomoniste. Aalto-yliopisto, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

Vermeer, M. 2011a. Fysikaalinen geodesia Maa-6.3271. Luentomoniste. Aalto-yliopisto, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

--- 2011b. Johdanto geodesiaan. Luentomoniste. Aalto-yliopisto, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

--- 2011c. Moderni geodesia. Luentomoniste. Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

Vermeer, M. 2012. Käytännön geodesia Maa-6.2222. Luentomoniste. Aalto-yliopisto, Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi. Osoitteessa http://users.tkk.fi/mvermeer/. 10.5.2012.

# 12 INTERNETSIVUSTOJA

@Fokus DGNSS palvelu http://www.indagon.com/fi/tuotteet-ja-palvelut/11a-fokus. @Fokus on Indagon Oy:n tarjoama differentiaalisen satelliittipaikannuksen korjauspalvelu. 10.5.2012.

Avoimet aineistot https://tiedostopalvelu.maanmittauslaitos.fi/tp/kartta. Maanmittauslaitoksen tarjoama palvelu, jonka kautta voi ladata maanmittauslaitoksen tuottamia avoimeksi määriteltyjä paikkatietoaineistoja. 13.5.2012.

Eranto http://www.ngdc.noaa.gov/geomagweb/#declination. Palvelu, jonka avulla voi laskea erannon eli magneettisen deklinaation missä tahansa maapallolla. Palvelun tarjoaa NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), joka on Yhdysvaltain hallituksen organisaatio. 13.5.2012.

Galileo http://www.esa.int/esaNA/galileo.html. Galileo on kehitteillä oleva eurooppalainen GPS-tyyppinen satelliittipaikannusjärjestelmä. 11.5.2011.

Geodeettinen laitos http://www.fgi.fi/. Geodeettinen laitos on suomalainen geodesian ja kartoitusalan tutkimus- ja asiantuntijaorganisaatio. 11.5.2012.

Geostar Oy http://www.geostar.fi/. Geostar on maanmittaustekniikan laitteita ja ohjelmistoja myyvä yritys. 10.5.2012.

Geotrim Oy http://www.geotrim.fi/. Geotrim on maanmittaustekniikan laitteita ja ohjelmistoja myyvä yritys. 10.5.2012.

Glonass http://www.glonasscenter.ru/en/. Glonass on venäläinen GPS-tyyppinen satelliittipaikannusjärjestelmä. 11.5.2012.

International Federation of Surveyors (FIG) http://www.fig.net/. FIG on kansainvälinen mittaus- ja kartoitustekniikan insinöörien organisaatio. 11.5.2012.

Karttapaikka http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/karttapaikka. Maanmittauslaitoksen ylläpitämä Internetin karttapalvelu, jossa pääsee tutustumaan maanmittauslaitoksen tuottamiin maastokarttoihin ja ilmakuviin. 13.5.2012.

Koordinaattimuunnospalvelu http://coordtrans.fgi.fi/. Geodeettisen laitoksen tarjoamassa muunnospalvelussa on mahdollista muuntaa Suomessa käytössä olevia koordinaatteja ja korkeuksia järjestelmästä ja esitystavasta toiseen. 11.5.2012.

Leica Geosystems Oy http://www.leicageosystems.fi/. Leica Geosystems on maanmittaustekniikan laitteita ja ohjelmistoja myyvä yritys. 11.5.2012.

Maanmittari http://www.maanmittari.fi/. Suomalaisten maanmittausalan järjestöjen yhteinen kotisivu, josta voi siirtyä haluamansa järjestön kotisivulle. 13.5.2012:

- Suomen Maanmittausinsinöörien Liitto (MIL)
- Maanmittausalan ammattikorkeakoulu- ja opistoteknisten Liitto (MAKLI)
- Suomen Kartoittajayhdistys (SKY)
- Maankäyttö-lehti
- Suomen Kartografinen Seura
- Maanmittaustieteiden Seura
- maanmittausalan koulutusta järjestävät oppilaitokset
- maanmittausalan järjestöt ja kerhot

Maanmittauslaitos http://www.maanmittauslaitos.f/. Maanmittauslaitos huolehtii maanmittaustoimituksista, kiinteistötiedoista, kartta-aineistoista sekä lainhuudoista ja kiinnityksistä. 13.5.2012.

Mittatekniikan keskus (MIKES) http://www.mikes.fi/. Mittatekniikan keskus toteuttaa SI-järjestelmän mittayksiköt Suomessa, tekee metrologista tutkimusta, kehittää mittaussovelluksia ja tarjoaa kalibrointipalveluita. 13.5.2012.

SmartNet http://smartnet.leicageosystems.eu/spiderweb/smartnet.html. SmartNet on Suomen kattava Leica Geosystems Oy:n ylläpitämä satelliittipaikannuksen tarkkuutta parantava vekkopalvelu. 13.5.2012.

Topgeo Oy http://www.topgeo.fi/. Topgeo on maanmittaustekniikan laitteita ja ohjelmistoja myyvä yritys. 13.5.2012.

USCG Navigation Center http://www.navcen.uscg.gov/. Yhdysvaltain rannikkovartioston (United States Coast Guard) ylläpitämä paikannusjärjestelmiin, erityisesti GPS-järjestelmään, liittyvä sivusto. 13.5.2012.

VRSnet.fi http://vrsnet.fi/. VRSnet.fi on Suomen kattava Geotrim Oy:n ylläpitämä satelliittipaikannuksen tarkkuutta parantava verkkopalvelu. 13.5.2012.

# 13 TEHTÄVIEN VASTAUKSET

## Perusteet

1. Kuvan 3 (s. 4) perusteella.
2. Maan säde on noin 6 400 km ja ympärysmitta on noin 40 000 km.
3. Zeniitti on pystysuoraan ylhäällä ja nadiiri pystysuoraan alhaalla oleva suuntapiste.
4. Runkopisteiden avulla kiinnitytään mittauspaikan koordinaatistoon ja korkeustasoon.
5. Kuvan 11 (s. 11) pistekortista ei löydy esim. järjestelmätietoja ja mittaus- ja laskentamenetelmien tietoja.
6. Kummassakin mittauksessa on mitattu suuntia ja etäisyyksiä. Kolmiomittauksen pisteet ovat kolmiopisteitä. Jonomittauksen lähtöpisteet ovat IV luokan jonopisteitä ja uudet pisteet ovat V luokan jonopisteitä.
7. Alhaalla olevan prisman liikkeet ovat pienempiä kuin ylhäällä olevan prisman liikkeet.

## Mittaustekninen laskenta

8. Metrin määrittely on perustunut meridiaanin kaaren puolikkaaseen, metrin prototyyppiin, valon aallonpituuteen ja valon kulkuaikaan.
9. Radiaani on laaduton luku, koska se on kahden etäisyyden suhde (ympyrän kaaren suhde säteeseen).
10. Kulma 110°16’25” on: a) 110°16.42’, b) 110.2736°.
11. Kulma 65.29981° on: a) 65°17.9886’, b) 65°17’59.32”.
12. Summa on 166°47’49” ja erotus on 28°54’43”.
13. a) 14.3 mgon = 0.0143 gon, b) $20.9^{c}$ = 0.209 gon, c) $190^{cc}$ = 0.0190 gon.
14. Matka on 265 m.
15. Ilmakuvan mittakaava on 1:14 600.
16. Kun ajatellaan koko täyden kulman aluetta, 0.0001 goonin erotuskyvyllä ilmaistuissa kulmissa pitää olla vähintään seitsemän merkitsevää numeroa.
17. a) 90°25’26” = 100.4710 gon, b) 143.3724 gon = 129° 02’07”, c) 0.40324 rad = 29.9418 gon, d) $18^{v}$ = 1.08°.
18. Hyväksyttäviä vastauksia ovat 1139.9 m ja 1140 m.
19. Tulo on 301 400.
20. Osamäärä on 25.2.
21. Tähtäyspiste siirtyy 100 metrin päässä 1.6 mm.
22. Keskiarvo on 47.612 m, keskihajonta on 0.004 m ja keskiarvon keskihajonta on 0.001 m.

**23.** Suureen $x_1$ keskihajonta on 0.064 m ja suureen $x_2$ keskihajonta on 0.092 m.

**24.** Kolmion pinta-ala on 735.4 m² ja sen keskihajonta 1.2 m².

**25.** Jos havaintojen vaihtelua ei lainkaan esiinny, on mittaus jossain määrin epäilyttävä.

**26.** Vastaus riippuu tekijästä.

**27.** Useissa laskimissa on mahdollista käyttää kulmayksikköjä DEG (aste), RAD (radiaani) ja GRA (gooni eli graadi).

**28.** a) $\sin\alpha$=0.709951, b) $\cos\beta$ = –0.996826, c) $\tan y$ = –1.504464, d) $\arccos x$ = 141.1499 gon + $n$ x 400 gon ja 258.8501 gon + $n$ x 400 gon, e) $\arctan x$ = –34.5118 gon + $n$ x 200 gon.

**29.** Kolmas kulma on 117°00’ 00”.

**30.** Neljäs kulma on 110.5421 gon.

**31.** Havainnekuvalle sopiva mittakaava on esim. 1:500. Annetun kulman vastainen sivu on 35.231 m ja puuttuvat kulmat ovat 41°05’25” ja 113°31’ 19”.

**32.** a) Tehtävällä on kaksi ratkaisua. b) Ensimmäinen ratkaisu on 63.4°, 64.7° ja 70.7 m ja toinen ratkaisu on 116.6°, 11.5° ja 15.6 m.

**33.** a) $\alpha$ = 28 gon, $\beta$ = 28 gon ja $y$ = 172 gon, b) $\alpha$ = 32 gon, $\beta$ = 68 gon ja $y$ = 75 on.

**34.** Ratkaisu perustuu sinilauseeseen. Kysytty sivun pituus on $s_{3\text{-}4}$ = 141.289 m.

**35.** Puuttuvat lävistäjät ovat 518.24 m ja 372.80 m, puuttuva sivu on 222.53 m ja puuttuvat kulmat ovat 88.195° ja 99.076°.

**36.** Suuntakulma ja matkat pisteestä 1 katsoen ovat:

| **Piste** | ***t* / gon** | ***s* / m** |
|---|---|---|
| 11 | 24.4281 | 76.548 |
| 12 | 294.5060 | 73.313 |
| 13 | 394.2215 | 108.203 |
| 14 | 114.2369 | 104.656 |

**37.** Kolmion sivut ovat 571.096 m, 268.023 m ja 431.863 m ja kulmat ovat 51.4505 gon, 29.6246 gon ja 118.9249 gon.

**38.** Paluumatka on 104.34 m ja paluusuunta on 162.28°. Vaihtoehtoisia ratkaisutapoja voidaan kutsua geometriseksi ja analyyttiseksi ratkaisuksi. Geometrinen ratkaisu perustuu purjehduksen kolmion ratkaisuun. Analyyttinen ratkaisu perustuu koordinaattien käyttöön.

**39.** a) Kartan mittakaava on 1:1540. b) ja c) Arvioidut suuntakulmat ja mitatut matkat ovat:

| **Väli** | ***t* / gon** | ***s* / m** |
|---|---|---|
| 50501–50502 | 205 | 105 |
| 50501–95007 | 270 | 85 |
| 50503–50502 | 30 | 112 |
| 50503–50504 | 315 | 66 |

d) Kartalle piirretään koordinaattiviivat $P$ = 7 377 100 m, $P$ = 7 377 200 m, $P$ = 7 377 300 m, $I$ = 3 443 200 m ja $I$ = 3 443 300 m. e) Pisteen 50501 koordinaatit ovat $P$ = 7 377 311 m ja $I$ = 3 443 292 m ja pisteen 50504 koordinaatit ovat $P$ = 7 377 120 m ja $I$ = 3 443 171 m.

**40.** a) $\beta$ = 25.7839 gon, b) $\beta$ = 120.1827 gon.

**41.** Suuntakulmat ovat $t_{BC}$ = 296.7044 gon ja $t_{CA}$ = 35.6716 gon.

**42.** Kolmion kulmat ovat 109.7244 gon, 8.4871 gon ja 81.7885 gon.

**43.** a) Kuvan mittakaava on 1:1470. b) Koordinaattiakselit piirretään mittojen ja suuntakulman $t_{12}$ = 18.4° perusteella.

**44.** Pisteen 4 koordinaatit ovat $X$ = 1724.966 m ja $Y$ = 2637.908 m ja pisteen 5 koordinaatit ovat $X$ = 1614.897 m ja $Y$ = 2698.710 m.

**45.** Ratkaisu perustuu tasakylkiseen kolmioon. Reitti kulkee alimman saaren (kuva 42, s. 58) oikealta puolelta.

**46.** Ratkaisua varten piirretään havainnekuva ja orientoidaan havaitut suunnat suuntakulmiksi. Koordinaateiksi saadaan:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 1001 | 2239.155 | 3971.888 |
| 1002 | 2151.727 | 3964.423 |

**47.** Vinomatkat muunnetaan vaakamatkoiksi. Pisteiden 71 ja 72 välinen vaakamatka on 41.463 m. Korkeuserot lasketaan havaintokojeen vaaka-akselin suhteen. Pisteen 72 korkeusero pisteen 71 suhteen on +1.872 m.

**48.** Tähtäyspisteen korkeus on 94.857 m.

**49.** Ensiksi lasketaan nurkat 1 ja 2. Nurkat 3 ja 4 lasketaan ensiksi lasketuilta nurkilta olettaen rakennus suorakulmaiseksi. Koordinaateiksi saadaan:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 1 | 1189.27 | 2452.35 |
| 2 | 1165.98 | 2461.42 |
| 3 | 1171.43 | 2475.40 |
| 4 | 1194.72 | 2466.32 |

**50.** Havainnekuvan mittakaava on esim. 1:1 000. Pisteen 45 koordinaatit ovat joko $X$ = 15899.285 m ja $Y$ = 92793.757 m tai $X$ = 15814.485 m ja $Y$ = 92819.720 m.

**51.** Havainnekuvan mittakaava on esim. 1:5000. Pisteen 5 koordinaateiksi saadaan $X$ = 810.281 m ja $Y$ = 1983.218 m.

**52.** Kolmio ei ole aina määräinen, vaikka sen kaksi sivua ja yksi kulma tunnetaan: kuva 28, s. 45 ja tehtävä 32, s. 46.

**53.** a) Collinsin ympyrässä samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria. b) Cassinin ympyrässä puoliympyrän kaarta vastaava kehäkulma on suora kulma.

**54.** Pisteen 3 koordinaatit ovat $X$ = 1151.185 m ja $Y$ = 1133.091 m.

**55.** Mittausta ei voida pitää virheettömänä, koska virheiden yhdistelmä voi olla sellainen, että virheet kumoavat toisensa.

**56.** Kaarileikkauksessa havaintojen minimimäärä on kaksi ($n_0$ = 2). Ylimääräisiä havaintoja tehdään, kun etäisyydet mitataan useampaan kuin kahteen lähtöpisteeseen.

**57.** a) Kolmion muoto on määrätty, kun tunnetaan sen kaksi kulmaa. Tehtävän nelikulmiossa havaintojen minimimäärä on $n_0$ = 4 ja havaintojen ylimäärä on $r$ = 4.
b) Kolmion muoto ja koko on määrätty, kun tunnetaan sen sivu ja kaksi muuta osaa. Tehtävän nelikulmiossa havaintojen minimimäärä on $n_0$ = 5 ja havaintojen ylimäärä on $r$ = 9.

**58.** Muunnosyhtälöt johdetaan kuvan 62 (s. 82) perusteella.

**59.** Kaavaparin 59 kaavat johdetaan kaavaparista 57 (s. 83).

**60.** Sivujärjestelmän koordinaatisto sijoitetaan vapaalle asemapisteelle. Vapaan asemapisteen koordinaatit ovat $X$ = 2537.319 m ja $Y$ = 4358.087 m. Mittakaavakerroin 0.9989951 poikkeaa paljon (1005 ppm) perusarvosta yksi. Tämä viittaa mittaus- tai lähtöpistevirheisiin.

**61.** Excel-ohjelma sopii hyvin tämän tehtävän laskentaan. Sivujärjestelmän koordinaatit lasketaan käyttäen muunnoskulmia suuntakulmina. Vapaan asemapisteen koordinaateiksi saadaan $X$ = 2841.486 m ja $Y$ = 1115.195 m. Mittakaavakerroin $m$ = 1.000030 = 1 + 30 ppm kertoo aivan laadukkaasta mittauksesta.

**62.** Muodostetaan muunnosyhtälöt viitelinjojen leikkauspisteeseen siirretystä mitoituskoordinaatistosta kunnalliseen koordinaatistoon. Siirretyn mitoituskoordinaatiston origon koordinaatit lasketaan rajamitoista. Muut muunnosparametrit saadaan lähtötiedoista. Käyttöpisteiden kunnalliset koordinaatit ovat:

| Piste | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|
| 1 | 15724.301 | 92338.037 |
| 2 | 15725.525 | 92342.887 |
| 3 | 15726.742 | 92347.736 |

## Suunnittelutekninen laskenta

**63.** Lasketaan koordinaatit murtoviivajonona pisteeltä 14 alkaen:

| Piste | $X$ / m | $Y$ / m |
|---|---|---|
| 1 | 15544.166 | 92667.214 |
| 2 | 15572.447 | 92708.448 |
| 3 | 15543.583 | 92728.244 |
| 4 | 15515.303 | 92687.011 |

**64.** Aluksi lasketaan rajan 1-4 suuntakulma. Rakennuksen Nurkkapisteiden (A-D) koordinaatit lasketaan jonona pisteeltä 1 alkaen. Kun jono päätetään pisteelle 4, saadaan myös tarkistus laskuille. Koordinaateiksi saadaan:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| A | 1410.723 | 2324.810 |
| B | 1420.713 | 2324.370 |
| C | 1421.593 | 2344.351 |
| D | 1411.603 | 2344.791 |

**65.** Leikkauspisteen koordinaatit ovat $X$ = 1242.70 m ja $Y$ = 2305.16 m. Myös eteenpäinleikkaus (s. 67–68) voidaan laskea tällä tavoin.

**66.** Ratkaisu perustuu suorakulmaiseen kolmioon, jonka hypotenuusa on sivu 1–2. Tangentin pituus on $s_{34}$ = 377.176 m. Tangentin suuntakulma on $t_{34}$ = 100.1832 gon. Tangentti-pisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 3 | 599.331 | 825.416 |
| 4 | 598.246 | 1202.590 |

**67.** Kyse on kulman pyöristämisestä ympyrän kaarella. Pääpisteiden (tangenttipisteiden) 4 ja 6 koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 4 | 1929.578 | 1483.317 |
| 6 | 1462.224 | 1512.678 |

Pääpisteiden paaluluvut ovat:

| **Piste** | $L$ **/ m** |
|---|---|
| 1 | 0.000 |
| 4 | 488.192 |
| 6 | 988.435 |
| 3 | 1424.690 |

**68.** Aluksi lasketaan suorien väliset taitekulmat. Pyöristysympyröiden säde voidaan ratkaista tarkastelemalla suoran 2–3 osapituuksia. Säteeksi saadaan 154.885 m. Tämän jälkeen lasketaan pääpisteiden paaluluvut:

| **Piste** | $L$ **/ m** |
|---|---|
| 1 | 0.000 |
| 5 | 480.117 |
| 6 | 696.283 |
| 7 | 796.283 |
| 8 | 1093.587 |
| 4 | 1215.470 |

**69.** Tangenttien suuntakulmat pääpisteissä 3, 5 ja 7 ovat $t_3$ = 112.6523 gon, $t_5$ = 40.5042 gon ja $t_7$ = 138.2004 gon. Pääpisteiden paaluluvut ovat:

| **Piste** | $L$ **/ m** |
|---|---|
| 11 | 0.000 |
| 1 | 51.500 |
| 3 | 105.592 |
| 5 | 150.924 |
| 7 | 172.869 |
| 16 | 241.669 |

**70.** Kaavan 76 (s. 99) johto perustuu kuvaan 71 (s. 98).

**71.** Tehtävä on erittäin vaativa. Aluksi lasketaan suorien leikkauspisteen (10) koordinaatit ja pyöristettävä kulma. Klotoidit lasketaan omissa klotoidikoordinaatistoissaan (sivujärjestelmät). Ympyräelementin kaarevuuskeskipisteen (4) klotoidikoordinaatit ovat jatkolaskennan kannalta tärkeät. Pääpisteet 2 ja 6 lasketaan leikkauspisteeltä 10 käsin:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 2 | 15694.642 | 23958.421 |
| 6 | 15535.074 | 24193.154 |

Loput pääpisteet lasketaan Helmertin muunnoksella:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 3 | 15670.191 | 24067.827 |
| 4 | 15486.563 | 23988.575 |
| 5 | 15627.812 | 24130.168 |

Tämän jälkeen lasketaan pääpisteiden paaluluvut:

| **Piste** | $L$ **/ m** |
|---|---|
| 1 | 0.000 |
| 2 | 68.556 |
| 3 | 181.056 |
| 5 | 256.891 |
| 6 | 369.391 |
| 7 | 449.147 |

Lopuksi lasketaan paalupisteet 100 metrin välein:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 100 | 15690.457 | 23989.584 |
| 200 | 15661.872 | 24084.839 |
| 300 | 15594.611 | 24157.579 |
| 400 | 15508.255 | 24207.907 |

**72.** a) 2506.06 a, b) 25.0606 ha, c) 0.250606 km$^2$.

**73.** Inarinjärven pinta-ala on 1100 km$^2$.

**74.** Kolmion pinta-ala on 1626 m$^2$.

**75.** Nelikulmion pinta-ala on 11.7 km$^2$.

**76.** a) Säännöllisen kuusikulmion pinta-ala on 1374 m$^2$. Säännöllinen kuusikulmio piirretään ympyrän kehälle, niin että kunkin sivun pituus on ympyrän säde. b) Nelikulmion pinta-ala on 1812 m$^2$.

**77.** Ympyrän segmentin pinta-ala on 168.6 m$^2$.

**78.** Johdetaan ensiksi kaava 85 (s. 103), jolloin kolmion 3. nurkka on origossa. Kolmion pinta-ala lasketaan sopivien osakuvioiden avulla ja huomioidaan determinantin laskusääntö. Yleinen laskukaava 86 (s. 103) saadaan origon siirron avulla.

**79.** Kolmion pinta-ala on 55336 m$^2$.

**80.** Monikulmion pinta-ala on 5623 m$^2$.

**81.** Rajapyykkien 3 ja 4 koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 3 | 1062.278 | 1548.494 |
| 4 | 1052.225 | 1666.587 |

Tontin pinta-ala voidaan laskea ainakin kahdella tavalla. Ensimmäinen ratkaisu perustuu koordinaatteihin ja toinen osakolmioihin. Tontin pinta-alaksi saadaan 9012 m$^2$.

**82.** Tontin uusien pyykkien 5 ja 6 koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 5 | 3527.013 | 5916.859 |
| 6 | 3474.528 | 5940.357 |

Tontti muodostuu monikulmiosta ja segmentistä. Tontin pinta-ala on 2562 m$^2$.

**83.** Tontin pinta-ala on 32497 m$^2$.

**84.** b) Pyykkien lyhennetyt koordinaatit ovat ($X$-koordinaattiin pitää lisätä 6 675 000 m ja $Y$-koordinaattiin 2 552 000 m):

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 1 | 118.677 | 816.390 |
| 2 | 155.958 | 919.796 |
| 3 | 80.969 | 947.986 |
| 4 | 50.858 | 838.956 |

Tontin pinta-ala on koordinaattien perusteella 8440 m$^2$. c) Asemapisteeltä katsoen tontti voidaan muodostaa neljästä kolmiosta. Tontin pinta-ala voidaan laskea suoraan havainnoista, ilman koordinaatteja.

**85.** Vaativa tehtävä. Jaetaan tontti pisteen 3 kautta kolmioihin, joiden pinta-alat lasketaan. Saadaan selville, että uusi rajapiste tulee linjalle 4–5. Uuden pisteen koordinaatit voidaan laskea joko analyyttisesti tai kolmion pinta-alan perusteella. Uuden pisteen koordinaatit ovat $X$ = 3181.368 m ja $Y$ = 4570.328 m.

**86.** Valitaan pääjärjestelmäksi linjan 11–12 koordinaatisto ja sivujärjestelmäksi linjan 11–10 koordinaatisto. Helmertin muunnoksen muunnosparametrit sivujärjestelmästä pääjärjestelmään saadaan lähtötiedoista. Tontin pinta-alaksi saadaan 1008 m$^2$.

**87.** Jaetaan Lapin läänin alue silmämääräisesti yksinkertaisiksi geometrisiksi kuvioiksi, yhdeksi tai useammaksi kuvioksi. Mittakaavajanan perusteella kartan mittakaava on 1: 4 444 000. Lapin läänin pinta-alaksi pitäisi tulla noin 100 000 km$^2$.

**88.** Kaavaan 91 (s. 117) liittyvän määrätyn integraalin laskennassa noudatetaan laskusääntöjä ja ollaan huolellisia.

**89.** Laskennassa käytetään kolmea poikkileikkausta. Keskimmäinen poikkileikkaus halkaisee kappaleen keskeltä kahtia ja uloimmat poikkileikkaukset sijoitetaan kappaleen päihin, joten niiden pinta-alat ovat nollia. Simpsonin kaava antaa tarkat pallon ja ellipsoidin tilavuuskaavat, koska poikkileikkausten alat muuttuvat toisen asteen funktiona.

**90.** Katkaistun kartion tilavuuskaava antaa yleensä keskiarvokaavaa oikeamman tuloksen. Siihen nähden keskiarvokaavan virhe on 50 %.

**91.** Tehtävä on vaativa, kun se tehdään huolellisesti. Poikkileikkausten rajoittama tilavuus voidaan laskea keskiarvokaavalla (1930 m$^3$), katkaistun kartion kaavalla (1895 m$^3$), Simpsonin kaavalla (1900 m$^3$) ja integroimalla (1900 m$^3$). Tehtävän

tilanteessa tuloksissa ei ole suuria eroja. Simpsonin kaavalla ja integroimalla laskettua arvoa voidaan pitää parhaana tilavuusarviona.

**92.** Kaava 96 (s. 116) on melko helposti johdettavissa integroimalla.

**93.** Täytön tilavuus on 360 $m^3$ ja leikkauksen tilavuus on 160 $m^3$.

**94.** Penkereessä 1 metrin korkeusero vastaa 2 metrin etenemää. Ylin poikkileikkaustaso on +23.00 m ja muut tasot muodostetaan tästä alaspäin metrin välein. Alueen täyttömassa jaetaan näin ollen osiin neljällä nollasta eroavalla poikkileikkauksella. Tasolle +19.00 m voidaan sijoittaa viides poikkileikkaus, mutta sen pinta-ala on nolla. Täytön tilavuudeksi saadaan noin 1050 $m^3$.

**95.** Simpsonin kaavan antama tilavuus on 2016 $m^3$ ja katkaistujen kartioiden tilavuuskaavan antama tilavuus on 2145 $m^3$.

**96.** Laskettavat massat jakautuvat pisteestä A alkaen neljään osaan: leikkaus, täyttö, leikkaus ja täyttö. Osien vaihtumiskohtien paikat arvioidaan kuvasta 106 (s. 130). Osien tilavuudet arvioidaan mahdollisimman hyvin. Leikkausten yhteistilavuus on noin 8000 $m^3$ ja täyttöjen noin 900 $m^3$.

**97.** Tehtävä on huolellisesti tehtynä melko vaativa. Keskiarvokorkeuseron (kaava 105, s. 124) antama tilavuus on 798 $m^3$. Kaavan 104 (s. 124) antama tulos on 1590 $m^3$. Hila-menetelmän (kaavat 106 ja 107, s. 125) antama tilavuus on 714 $m^3$. Kaavan 104 antama tulos on poikkeava ja sitä voidaan pitää tässä tapauksessa virheellisenä. Kahden muunkin laskennan ero on yllättävän suuri, noin 10 %.

**98.** Kolmioprisman tilavuuskaavan (108, s. 125) johto on vaativa tehtävä. Kaavan johto suoritetaan integroimalla. Kolmioprisman ylä- ja alapinnat voidaan kuvata yksikäsitteisesti tasoilla. Sen sijaan neliöprisman ylä- ja alapinnat voidaan kuvata tasojen avulla kahdella tavalla. Tämän vuoksi neliöprisman tilavuuskaava (106, s. 125) ei ole yksikäsitteinen.

**99.** Kolmioprisman tilavuus on 727 $m^3$.

**100.** Tehtävä on huolellisesti tehtynä vaativa. Vaakasuorien poikkileikkausten perusteella tilavuus on 177 $m^3$. Nollapoikkileikkauksen (A9) avulla arvioidaan tason +143.0 m yläpuolinen tilavuus. Maastomallin perusteella tilavuus on 183 $m^3$.

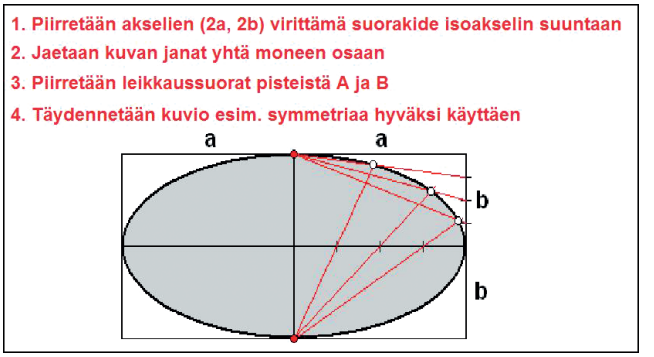
## Koordinaatti- ja korkeusjärjestelmät

**101.** Maan pallonmuotoisuuteen liittyviä havaintoja ovat Auringon ja Kuun muoto, Maan varjo Kuun pinnalla, Auringon ja tähtien korkeuden vaihtelut, päivän pituuden vaihtelut ja aavalla merellä nähtävät asiat.

**102.** Pannukakkumaassa Aurinko nousisi ja laskisi kaikkialla samaan aikaan. Päivän pituuden ja vuodenaikojen vaihtelut riippuisivat pannukakkumaan pyörimisliikkeestä. Jos pannukakkumaa säilyttäisi asentonsa avaruudessa, kuten fysiikan lait määräävät, vuosi jakautuisi kaikkialla yöhön ja päivään, talveen ja kesään.

**103.** Ratkaisun perusoletuksia ovat, että Assuan ja Aleksandria sijaitsevat samalla meridiaanilla ja havainnot tehdään samanaikaisesti. Annetuilla lähtötiedoilla Maan ympärysmitta on 38400 km ja säde on 6110 km.

**104.** Ellipsi on niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta polttopisteestä laskettujen etäisyyksien summa on vakio. Ellipsi voidaan piirtää esim. suorakulmiomenetelmällä:




**105.** Tehtävän lähtötiedot löytyvät taulukosta 6 (s. 132). GRS80-ellipsoidin pienempi puoliakseli on 6 356 752.314 m.

**106.** Hayfordin ellipsoidi on voimakkaammin litistynyt kuin WGS84-ellipsoidi.

**107.** Hayfordin ellipsoidia tilavuudeltaan vastaavan pallon säde on 6 371 221 m.

**108.** Jos maapallon säde on 6380 km, on maapallon a) ympärysmitta 40 087 km ja b) pinta-ala 512 miljoonaa km$^2$.

**109.** Maapalloa sivuavan ja sen korkuisen lieriön pinta-ala on sama kuin maapallon pinta-ala.

**110.** Maantieteelliset leveys- ja pituuskäsitteet ovat peräisin antiikin Kreikasta Välimeren alueelta. Välimeri on pitkä itäsuunnassa (pituus) ja kapea pohjois-suunnassa (leveys).

**111.** Suomi sijaitsee suurin piirtein 19.5° – 31.6° itään Greenwichistä ja 59.8° – 70.1° pohjoiseen päiväntasaajalta.

**112.** Rovaniemen antipodin koordinaatit ovat $\varphi$ = 66°29'E ja $\lambda$ = 154°16'L. Paikka on eteläisellä Tyynellä valtamerellä.

**113.** Rovaniemeltä on a) pohjoisnavalle 2619 km ja b) päiväntasaajalle 7403 km.

**114.** Leveyspiiri a) 0°P eli ekvaattori on 40087 km pitkä, b) 10°P on 39478 km pitkä ja c) 60°E on 20043 km pitkä.

**115.** Annetuilla lähtötiedoilla kaariminuuttia vastaava matka meridiaanin suunnassa on 1856 m. Vertaa tulosta merimailin (meripeninkulman) pituuteen, joka on 1852 m. Kaariminuuttia vastaava matka leveyspiirin $\varphi$ = 66°P suunnassa on 755 m.

**116.** Greenwichin meridiaanin suhteen aarteen sijainti oli noin $\varphi$ = 20.6°N ja $\lambda$ = 68.5°W. Paikka löytyy Karibian mereltä, Dominikaanisen tasavallan pohjois-puolelta. Aarre ei kuitenkaan löytynyt lasketusta paikasta, vaan se oli siirretty Moulinsartin linnaan Pariisin lähelle.

**117.** Lähteenä on Kodin käyttökartasto (1996, Otava). Kirjassa käytetään mm. Lambertin oikeapintaista suuntaisprojektiota, erilaisia kartioprojektioita ja Millerin lieriöprojektiota. Yksityiskohtaisimmat kartat ovat Delislen oikeapituisessa kartioprojektiossa.

**118.** Valitaan kaksi aluetta, joiden pinta-alat tunnetaan. Mitataan alueiden pinta-alat kartalta. Jos tunnettujen ja mitattujen alojen suhde on sama, on kartta oikeapintainen.

**119.** Kuvautumisvirheet ovat aina pienimmät projektiopinnan ja maapallon pinnan sivuamiskohdissa, koska sivuamiskohdassa pintojen ero on pienimmillään.

**120.** Stereografisessa projektiossa meridiaanit kuvautuvat pohjoisnavalta alkavina puolisuorina ja leveyspiirit ympyröinä, joiden keskipiste on pohjoisnapa. Stereografinen projektion on oikeakulmainen ja atsimutaalinen projektio.

**121.** Tehdään pyydetyt merkinnät kuvaan 125 (s. 153). Päiväntasaaja ja keskimeridiaani kuvautuvat suorina.

**122.** Pisteen A koordinaatit ovat noin $\varphi$ = 17°P ja $\lambda$ = 25°P. Pisteen B koordinaatit ovat noin $\varphi$ = 53°P ja $\lambda$ = 21°I.

**123.** Pisteiden A ja B välimatka a) pohjoiseteläsuunnassa on 4000 km ja b) itälänsisuunnassa joko 4900 km tai 3100 km. Itälänsisuunnan välimatkan osalta tehtävä ei siis ole yksikäsitteinen.

**124.** Oikeakulmaisella kartalla pituus- ja leveyspiirien leikkauskulmat ovat suoria kulmia, kuten tehtävän kartalla näyttää olevan.

**125.** Likimääräinen mittakaava keskimeridiaanilla on 1: 95 miljoonaan.

**126.** Kartta ei ole vakiomittakaavassa, koska leveyspiirien välimatka ei ole vakio. Myöskään leveyspiiriä pitkin kuljettaessa pituuspiirien välimatka ei ole vakio.

**127.** Paikkakunnat ovat a) Turku, b) Joensuu, c) Kajaani, d) Muonio, e) Joensuu, f) Kotka, g) Muonio ja h) Kuopio.

**128.** Maantieteellisessä koordinaatistossa tasokiintopisteiden koordinaatit tulee antaa viidellä sekunnin desimaalilla.

**129.** Paikan UTM-koordinaatit ovat $N$ = 6 983 306 m ja $E$ = 732 207 m.

**130.** UTM-projektiossa tontin pinta-ala on 3406 m$^2$.

**131.** Suoritus on henkilökohtainen.

**132.** Likimääräiset geoidin korkeudet ovat a) Helsingissä 18.0 m, b) Tampereella 19.0 m, c) Oulussa 18.0 m, d) Rovaniemellä 20.0 m ja e) Utsjoella 24.5 m.

**133.** Tehtävä on vaativa ja yksityiskohtaiset tulokset riippuvat käytetyistä ohjelmista ja muunnosparametreista. Tulosten arvioinnissa pitää käyttää harkintaa.

**134.** Tehtävä on huolellisen raportoinnin näkökulmasta erittäin vaativa ja yksityiskohtaiset tulokset riippuvat käytetyistä ohjelmista ja muunnosparametreista.

**135.** Tehtävä liittyy edellisen tehtävän tuloksiin. Vaakamatkan 50501–50503 erot on laskettu KKJ:n 3. kaistan suhteen:

| **Projektio** | **Matka / m** | **Ero / m** |
|---|---|---|
| KKJ2 | 213.706 | +0.007 |
| KKJ3 | 213.699 | 0.000 |
| UTM35 | 213.611 | –0.088 |

Erot johtuvat projektioiden mittakaavakertoimien eroista. UTM-projektiossa ero on merkittävä.

## Apumittaukset

**136.** Etäisyydelle voidaan johtaa kaava $s = \Delta L/2/\tan(p/2)$.

**137.** Painumakorjauksen määritys tehdään vaakasuoralla alustalla. Vaakamatka mitataan lattiaa pitkin. Sama matka mitataan vapaasti riippuvalla nauhalla pitäen nauhan päät samalla korkeudella. Nauha jännitetään vakiojännityksellä. Painuma mitataan nauhan keskeltä taskumitalla.

**138.** Painumakorjaus nauhan pituudelle 30.015 m on –0.008 m.

**139.** Mitattu vaakamatka on 94.348 m.

**140.** Piste merkitään lukeman 27.365 m kohdalle.

**141.** Kummallakin laskentatavalla pyykin 4 koordinaattien pitäisi olla $X$ = 520.26 m ja $Y$ = 727.36 m.

**142.** Aluksi lasketaan pilareiden 2 ja 3 koordinaatit. Suorakulmaiset mitat voi ratkaista vaihtoehtoisilla tavoilla, esimerkiksi Helmertin muunnoksella. Laskentatulokset ovat:

| **Pilari** | ***a* / m** | ***b* / m** |
|---|---|---|
| 1 | 20.341 | 5.822 |
| 2 | 15.420 | 6.706 |
| 3 | 10.499 | 7.590 |

**143.** P = 0 gon, I = 100 gon, E = 200 gon ja L = 300 gon.

**144.**

**145.** Pohjantähti löytyy Otavan ”kauhan” uloimpien tähtien muodostaman linjan jatkeelta (kuva 157, s. 194). Jos uloimpien tähtien välimatka on $a$, on Pohjantähti etäisyydellä noin $5a$ ”kauhasta”.

**146.** Neulaluku paikasta B paikkaan A on 287°

**147.** Tehtävä on melko vaativa. a) Reitti on spiraali, joka johtaa pohjoisnavalle. b) Perusasentoisessa Mercatorin projektiossa reitti on suora, joka ei kartalla koskaan yllä pohjoisnavalle.

**148.** Rajamerkin 12 koordinaatit ovat $X$ = 6 812 475.20 m ja $Y$ = 2 489 583.24 m.

**149.** Sivun suuntakulma on 150.5 gon.

**150.** Tunnelin suunta poikkeaa suunnitellusta 50.2054 gon – 50.0000 gon = 0.2054 gon.

## Vaaitus

**151.** Laitteiden tekniset tiedot löytyvät esimerkiksi Internetistä (linkit s. 379–380).

**152.** Eteentähtäyksen lukema on 1.125 m.

**153.** Suhteellinen tarkkuus on 9 ppm.

**154.** Jos lähtöpisteiden korkeudet ovat oikein, jono mitataan ja lasketaan uudestaan. Ennen uusintamittausta vaaituskoje on syytä kalibroida ja varmistaa, että se on tarkkuudeltaan riittävä korkeusrunkomittauksiin.

**155.** Tehtävä on asioiden perustelun näkökulmasta vaativa tehtävä. Pisteen 11 korkeus tulee 100 mm liian alas. Tehty virhe ei vaikuta sulkuvirheeseen.

**156.** Vaaituksen sulkuvirhe on +0.006 m. Vaaituskojeen vaaka-akselin korkeus kojeasemassa 4 on 105.374 m.

**157.** Melko vaativa tehtävä. a) Raiteen alkuperäinen kaltevuus on 1:50.87. b) Raiteen painuma 20 metrin välein 0-paalulta paalulle 160 m on 0 mm, +7 mm, –36 mm, –146 mm, –189 mm, –128 mm, –28 mm, 0 mm ja 0 mm. c) Suurin kaltevuus osuu paaluvälille 100–120 m.

**158.** Suhteellinen tarkkuus 106 ppm on ohjeisiin nähden liian suuri. Tästä huolimatta lasketut tasoitetut korkeudet ovat $H_{116}$ = 3.676 m ja $H_{117}$ = 4.279 m.

**159.** Pisteen 37 korkeus on 135.387 m

**160.** Kuvaan piirretään korkeuskäyrät 96 m, 97 m, 98 m ja 99 m.

**161.** Aluksi piirretään huolellisesti maanpinnan korkeuskäyrät 0.5 m välein. Jyrkin kohta löytyy sieltä missä korkeuskäyrät ovat lähinnä toisiaan. Suurin kaltevuuskulma on noin 12° ja suurimman nousun suunta on noin 30°.

**162.** Pisteen B korkeus on 90.399 m.

## Takymetrimittaus

**163.** a) Kolmion kulmien summa on oikokulma, joten kulmayksikkö on aste. b) Suunnan ja käännetyn suunnan ero on oikokulma, joten kulmayksikkö on gooni. c) Laskimella kokeillen selviää, että kulmayksikkö on radiaani. d) I- ja II-asentojen pystykulmien summa on täysi kulma, joten kulmayksikkö on gooni.

**164.** Etäisyydenmittaustavat on esitelty sivulla 180.

**165.** Yksikköjana on mittausaallonpituus jaettuna kahdella, koska mittaussignaali kulkee mitattavan matkan edestakaisin.

**166.** Mittaustulosten arvioidut keskihajonnat ovat a) 3.0 mm, b) 3.2 mm ja c) 3.8 mm.

**167.** Tehtävä on jatkoa edelliselle tehtävälle. Tehtävä voi olla käsitteellisesti vaikea. Keskiarvojen keskihajonnat ovat a) 0.9 mm, b) 1.0 mm ja c) 1.2 mm. Mittaustulos tarkentuu keskiarvoa laskettaessa, jos havainnoissa on keskihajonnan mukaista vaihtelua. Elektro-optisessa etäisyydenmittauksessa havaintojen vaihtelu on yleensä oleellisesti pienempää kuin laitevalmistajan ilmoittama keskihajonta, joka sisältää myös korjaamattomia systemaattisia virheitä.

**168.** Havainnekuvalle sopiva mittakaava on esim. 1:1000. Havaitut suunnat pitää ensiksi orientoida koordinaatiston suuntakulmiksi. Mitattujen pisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | ***X* / m** | ***Y* / m** |
|---|---|---|
| 1 | 6875133.70 | 2542824.10 |
| 2 | 6875190.57 | 2542826.81 |
| 3 | 6875180.83 | 2542946.15 |
| 4 | 6875197.60 | 2542946.39 |

**169.** Vaaka-akselin korkeus on 103.008 m.

**170.** Tehtävä on käsitteellisesti melko vaikea. Havaintoja on kuusi kappaletta ja koordinaattituntemattomia on kaksi. Koordinaatit voidaan laskea kahden etäisyyden avulla. Lisäksi tuntemattomana on vaakasuuntien orientointi. Sen määrittämiseen käytetään yksi vaakasuuntahavainto. Havaintojen minimimäärä on siis kolme ja havaintojen ylimäärä on kolme havaintoa.

**171.** Räystään korkeus maanpinnasta mitattuna on 2.973 m.

**172.** Aluksi koordinaatit mitataan johdon alla olevaan prismaan. Oletuksena on, että prisma on johdon kautta kulkevalla pystysuoralla. Lopuksi tähtäys siirretään johtoon.

**173.** Nurkan koordinaatit ovat $X$ = 1763.249 m ja $Y$ = 2578.071 m.

**174.** Kaukoputkea käännetään 0.419 gon alaspäin.

## Satelliittimittaus

**175.** Sv = survey vehicle, satelliitti, Az = azimuth, atsimuutti, suunta ja Ev = elevation, korkeus. Satelliittien suunnat ja korkeudet ovat:

| **Sv** | **Az /** ° | **Ev /** ° |
|---|---|---|
| 6 | 340 | 18 |
| 24 | 287 | 40 |
| 28 | 112 | 23 |

**176.** 21.8.2001 eletään kesäaikaa, jolloin Suomen vyöhykeaika on UTC + 3 h. Aikaasetukset ovat siis oikein.

**177.** 7.6.2012 oli käytettävissä 32 GPS-satelliittia, 24 Glonass-satelliittia ja kaksi Galileo-satelliittia.

**178.** Hyvä satelliittigeometria muodostuu, kun satelliitteja on joka suunnassa, myös ylhäällä. Huono satelliittigeometria muodostuu, kun satelliitit ovat lähellä horisonttia tai ne ovat yhdessä rivissä.

**179.** Kuvassa 265 b (s. 311) satelliitit ovat lähes samalla suoralla. Suora muodostaa kiertoakselin. Sijainti on epävarma kiertoakseliin nähden kohtisuorassa suunnassa.

**180.** Jos SA olisi käytössä, absoluuttisen paikannuksen arvioitu tasotarkkuus olisi 80 m ja korkeustarkkuus 110 m. Arvio on tehty 2σ-tasolla kirjan DOP-lukuja käyttäen (s. 312).

**181.** Tasotarkkuusarvio on 1σ-tasolla 9 m ja 2σ-tasolla 18 m. Korkeustarkkuusarvio on 1σ-tasolla 11 m ja 2σ-tasolla 22 m.

## Tasorunkomittaus

**182.** Tehtävän voi ratkaista virheen määritelmän perusteella (kaava 4, s. 32). Pinta-alan virhe on +4.6 m².

**183.** Sääkorjatut matkat ovat a) 45.235 m, b) 112.914 m ja c) 207.091 m.

**184.** Havaintopaikan vaakatasoon korjattu matka on 145.112 m ja merenpinnan tasoon korjattu matka on 145.108 m.

**185.** Etäisyys keskimeridiaanista on 52 510 m.

**186.** a) Matka Gauss-Krügerin projektiossa on 190.045 m. b) Matka UTM-projektiossa on 189.969 m.

**187.** Pisteen 205 koordinaatit ovat $P$ = 6834137.665 m ja $I$ = 2484543.965 m

**188.** Kun valo kulkee optisesti harvemmasta aineesta optisesti tiheämpään aineeseen, valo taittuu tiheämpään aineeseen päin. Normaalisti ilma harvenee ylöspäin mentäessä. Vaikka ilmassa ei olekaan selkeitä rajapintoja, taittuu valo kuitenkin hieman alaspäin eli tähtäyssäde kaartuu ylöspäin.

**189.** Tähtäyspisteen korkeus on 115.206 m.

**190.** Tehtävään löytyy runsaasti vaihtoehtoisia ratkaisuja. Tehtävä soveltuu hyvin vaihtoehtoisten laskentatapojen tarkasteluun. Pultista pulttiin mitattu vinomatka on 87.565 m ja pystykulma on 90.1368 gon.

**191.** Sarjakeskiarvot ovat:

| Ap | Tp | Sarjakeskiarvo / gon |
|---|---|---|
| 8 | 7 | 0.0000 |
| | 9 | 89.6781 |
| | 2 | 153.1810 |

**192.** Asemapisteeltä 4 mitatut pystykulmat ovat:

| Piste | $z$ / gon |
|---|---|
| 101 | 79.6459 |
| 102 | 68.1303 |
| 103 | 87.3487 |

Keskimääräinen nollapistevirhe on −0.0021 gon.

**193.** Pisteen 203 koordinaatit ovat $X$ = 15905.044 m ja $Y$ = 92770.549 m. Tähtäysten leikkauskulma pisteellä 203 on epäedullinen, minkä vuoksi pienetkin numeeriset erot välitulokissa aiheuttavat eron $X$-koordinaattiin.

**194.** Tehtävässä on kyse kolmiulotteisesta eteenpäinleikkauksesta (s. 71–72). Pisteen 101 koordinaatit ja korkeus ovat $X$ = 15893.341 m, $Y$ = 92637.024 m ja $H$ = 139.772 m. Korkeus lasketaan kahden mittauksen keskiarvona.

**195.** Sivujen suuntakulmat ovat $t_{101\text{-}201}$ = 70.5839 gon ja $t_{201\text{-}202}$ = 121.6692 gon.

**196.** Suhteellinen tarkkuus on 30 ppm.

**197.** Pistevälien suhteelliset tarkkuudet ($r$) ovat:

| **Väli** | $L$ **/ m** | $r$ **/ m** |
|---|---|---|
| 33–317 | 192 | 47 |
| 317–318 | 182 | 49 |
| 318–319 | 207 | 43 |
| 319–320 | 158 | 57 |

Sulkuvirheen perusteella laskettu suhteellinen tarkkuus (37 ppm) on parempi kuin pisteväleittäin lasketut suhteelliset tarkkuudet

**198.** Pisteen 286 tasoitetut koordinaatit ovat $X$ = 1312.719 m ja $Y$ = 3999.066 m.

**199.** Tehtävä on melko vaativa. Lasketaan jonon pisteille 323, 324 ja 302 koordinaatit mielivaltaista lähtösuuntaa käyttäen. Saadaan sivujärjestelmän koordinaatit. Laskettu jono muunnetaan lähtöpisteiden määrittämään pääjärjestelmään Helmertin muunnoksella. Uusien jonopisteiden koordinaatit ovat:

| **Piste** | $X$ **/ m** | $Y$ **/ m** |
|---|---|---|
| 323 | 2266.165 | 1596.988 |
| 324 | 2273.673 | 1641.580 |

Muunnoksen mittakaavakerroin on $m$ = 0.998445 = 1 – 1555 ppm, joten mittauksen tarkkuus on huono.

## Kojeiden käsittely ja kalibrointi

**200.** a) Tähtäysakselin kaltevuusvirhe on 0.075 mm/m. b) Jonossa pisteen 2 virheeksi tulee +2.3 mm.

**201.** Kollimaatiovirhe on keskiarvona 0.0018 gon

**202.** Pisteen 12 sijaintiin aiheutuu 2.7 mm virhe vasemmalle kojeesta katsoen.

# 14 HAKEMISTO


## A

absoluuttinen paikannus ..... 293, 295
absoluuttinen virhe-ellipsi .....
.....40, 78, 311, 327, 355, 356
A-GPS ..... xviii, 299
affiininen muunnos ..... 173
aika .....287
akselivirheet .....340, 371
aktiivinen kiintopiste .....326
alhidadi .....239
alkutuntematon ..... 304
alustus ..... 304
amplitudimoduloitu signaali ..... 25, 250
a priori varianssikerroin ..... 76
apumittaukset ..... 179
arcusfunktiot ..... 43
asemapiste .....60, 258
asematasoitus .....345
aste ..... 30
asteverkko .....141, 142
atsimuutti .....196
Auringon säteily ..... 24
avoimet aineistot .....383
avustettu GPS-paikannus ..... xviii, 299

## B

barometri ..... 16, 204, 333
barometrinen korkeudenmittaus .....204, 205
Bowditchin menetelmä .....353
bussoli ..... 16, 198, 199

## C

C/A-koodi ..... xviii, 286, 287, 292, 293
Cassinin ympyrät ..... 70
Collinsin ympyrä ..... 68

## D

datumi ..... 154
DGNSS..... xviii, 293, 299, 311
DGPS..... xvii, 293, 299
differentiaalikorjaus ..... 300
differentiaalinen paikannus ..... 293, 299, 311
digitaalinen vaaituskoje .....213, 217
Doppler-havainto .....292
DOP-luvut ..... xviii, 308

## E

ED50 ..... xviii, 157
EGNOS..... xviii, 301
ekvaattori .....140
elektro-optinen etäisyydenmittaus .... 180, 249
ellipsi ..... 4, 39, 137
ellipsoidi ..... 4, 137, 138
ellipsoidikeskinen suorakulmainen
koordinaatisto ..... 142
ellipsoidinen korkeus ..... 165
epookki ..... 156
epäkeskiset kartoitusmitat ..... 264
epäkeskisyysvirheet ..... 340
epäsuora paikannus ..... 134
epätäydellisesti suljettu jono.....350
eranto ..... 197, 383
erotushavainnot ..... 302
estepiirros..... 309
estimoitu varianssikerroin ..... 76
eteenlukema .....206, 219
eteenpäinleikkaus ..... 63, 65
eteentähtäys ..... 219
ETRS89 ..... xviii, 160
ETRS-GKn ..... xviii, 162
ETRS-TM35FIN ..... xviii, 162, 163
etäisyydenmittausprismat. 10, 20, 244, 330, 373
etäisyydenmittaustavat .....180
etäisyyskuva .....272
Euraasian laatta ..... 156
EUREF89 .....xix, 161
EUREF-FIN .....xix, 161

## F

Fennoskandian maannousu ..... 166
FIG .....383
FIN2000 ..... xix, 174
FIN2005 ..... xix, 174
FIN95 ..... 174
FinnRef® ..... xix, 161, 326
fixed-ratkaisu ..... 304
float-ratkaisu ..... 304
fokusointi .....22, 208, 242
@Fokus-palvelu ..... 300, 383
fotogrammetria ..... 2

## G


Galileo ..... xix, 16, 281, 284, 383
Gauss-Krügerin projektio ..... 157, 158
Gaussin kolmiokaava ..... 106
geodeettinen datumi ..... 154
geodeettinen käänteistehtävä ..... 49
Geodeettinen laitos .....
..... 12, 135, 161, 174, 177, 326, 383
geodeettinen laskenta ..... 28
geodeettinen päätehtävä ..... 53
geodeettinen satelliitti-vastaanotin ..... 316
geodeettiset leikkaukset ..... 64
geodeettiset mittauskojeet ..... 16
geodesia ..... xii, 2, 4
geoidi ..... 8, 136, 166
geoidimalli ..... 166, 174
geoidin korkeus ..... 166, 174
geoinformatiikka ..... 2
geosentrinen koordinaatisto ..... 142
Geostar Oy ..... 384
Geotrim Oy ..... 300, 322, 383
GIS ..... xix, 2
GIS-paikannin ..... 300
gooni ..... 30
Glonass ..... xix, 16, 281, 284, 383
GMT ..... xix, 288
GNSS ..... xix, 281, 289
GPS ..... xix, 16, 280, 282, 384
GPS-aika ..... 288
GPS-runkomittaus ..... 329, 358
GPS-signaali ..... 286
graafinen mittakaava ..... 32
Greenwichin keskiaika ..... xix, 288
Greenwichin meridiaani ..... 140
GRS80 ..... xix, 138
gyroskooppi ..... 200


## H


hajapistemenetelmä ..... 229
havainnon paino ..... 76
havaintojen esikäsittely ..... 330
havaintojen ylimäärä ..... 74, 351
havaintogeometria ..... 71, 308, 310
havaintosuureet ..... 292
Hayfordin ellipsoidi ..... 138
HDOP ..... xx, 308
Helmertin muunnos ..... 80
Helsingin järjestelmä ..... 156
Heronin kaava ..... 104
hilamenetelmä ..... 124, 125
histogrammi ..... 36
horisontaalinen datumi ..... 154
horisonttijärjestelmä ..... 8
hyrräteodoliitti ..... 200
hyvä mittaustapa ..... 41


## I


IAG ..... xx, 161
ilmakehä ..... 24, 306
ilmakehän läpäisevyys ..... 24
ilmalaserkeilaus ..... 3, 269
ilmanpaineen yksiköt ..... 333
ilmanpainemittari ..... 16, 204, 333
IMU ..... xx, 200, 270
Indagon Oy ..... 300, 383
inertiamittausalusta ..... 200
infrapunainen valo ..... 25, 180, 250
inkrementaalikehä ..... 247
interferometrinen mittaus ..... 302
ionosfääri ..... 306
isoympyrä ..... 140
ITRS ..... xx, 161
itsetasaava vaakituskoje ..... 207


## J


jalkaruuvit ..... 208, 211, 241
jalustat ..... 18, 210, 242, 252
jonomittaus ..... 13, 349
jonopiste ..... 12
jonovaaituksen tasoittaminen ..... 226
jonovaaitus ..... 219, 222
jälkilaskenta ..... 315, 358
järjestelmäkalibrointi ..... 364
jäännösvirhe ..... 37, 75


## K


kaarileikkaus ..... 65
kaartoviiva ..... 150
kaavoitusmittausohjeet ..... 12, 225, 324
kaistajako ..... 151, 157, 162
kaksiulotteinen normaalijakauma ..... 39
kaksoispentagonprisma ..... 16, 187
kalibrointi ..... 41, 364
kalibrointilajit ..... 364
kaltevuuskulma ..... 230
kaltevuusmittari ..... 191
kaltevuusprosentti ..... 230
kaltevuussuhde ..... 230
kansainvälinen atomiaika ..... 288
kantapiste ..... 188
kantoaalto ..... 25, 180, 249, 286

karkea tähtäin .....208, 241
karkea virhe .....35
kartastokoordinaattijärjestelmä .....156, 157
kartion tilavuus.....116
kartioprojektio .....146
kartografia ..... 2
kartoitusmittaukset ..... xiii, 262
kartoitussauvat .....19, 242
Karttapaikka..... 134, 383
karttapohjoinen ..... 193
karttaprojektiot..... 143
katkaistun kiilan tilavuus .....119
katkaistun pyramidin tilavuus .....117
kaukokartoitus ..... 2
kaukoputken parallaksi ..... 22
keilaimen avauskulma .....269
keilaus .....xiv, 3, 18, 269, 270, 277
kellon käyntivirhe ..... 298
kenttäkalibrointi .....365
keskiarvo .....37
keskiarvon keskihajonta .....37
keskiaurinkoaika ..... 288
keskihajonta .....37
keskimeridiaani.....150
keskistys .....18, 232, 252
keskistys ja tasaus .....252
keskusprojektio.....144
kesäaika ..... 288
kiikariviivoitin .....237
kiilan tilavuus .....119
kiinteistöarviointi ..... 3
kiinteistöjohtaminen ..... 3
kiinteistöoikeus ..... 2
kiinteistötalous ..... 2
kiinteistötekniikka ..... 2
kiintopisteet .....xii, 8, 12, 326
kiintopistemittaukset ..... xiii, 12, 222, 323, 358
kilometrikeskivirhe ..... 212
kilpikonna ..... 209, 216, 224
kipreegeli .....237
KKJ ..... xx, 156, 157
klinometri .....191
klotoidi .....87, 90
kohdistustasain ..... 21, 216
kohtisuora suuntaisprojektio .....144
kojeasennot ..... 244
kojejalustat .....18, 210, 242
kojekorkeuden mittaus .....257
Kok .....xx, 198
kokonaiskorjaus .....xx, 198
kollimaatiovirhe .....340, 371
kollimaattori.....367
kolmijalat .....18, 210, 242, 252
kolmiomittaus .....12, 323, 358
kolmiomittaustorni ..... 133
kolmion pinta-ala .....104, 106
kolmion ratkaisut ..... 43
kolmiopiste ..... 12
kolmioprisman tilavuus..... 125
kolmioverkkomuunnos ..... 173
kolmiulotteinen eteenpäinleikkaus .....72, 204
kompassi ..... 198
kompensaattorit .....21, 207, 256
konforminen projektio ..... 147
koodihavainto .....292
koordinaatistot .....
..... 7, 48, 139, 140, 142, 149, 151, 157, 161
koordinaatiston neljännekset ..... 51
koordinaatit ..... xii, 7, 48, 134, 139
koordinaattijärjestelmien välinen muunnos .171
koordinaattijärjestelmä ..... 139
koordinaattijärjestelmän realisointi ..... 139
koordinaattijärjestelmän sisäinen muunnos 170
koordinaattikonversio ..... 70
koordinaattimuunnokset ..... 80, 169, 383
koordinaattitulkinta ..... 92
koordinoitu yleisaika ..... 288
korjaus ..... 34
korkeuksien muuntaminen ..... 174
korkeus .....8, 165
korkeuserojen mittaustavat ..... 204
korkeusjärjestelmät ..... 165
korkeuskiintopiste ..... 9
korkeuskulma ..... 59
korkeuskäyrä ..... 230
korkeusrunkomittaukset .....222
korkeussijainti ..... xii, 7
kosinilauseet ..... 45
kulmakäsitteet ..... 59
kulmanmittaus .....187, 247, 248, 341, 342, 343
kulmanmittauskojeet .....238
kulmayksiköt ..... 30
kulmien summa ..... 44
kunnalliset kiintopisteet ..... 2, 325
kupolimainen keilaus .....272
kuvamittaus .....278
kuvaustekniset ominaisuudet ..... 147
käsisuuntakehä ..... 16, 198, 199
käyttäjälohko ..... 285
käyttökiintopiste .....12, 326

käytännön geodesia ..... 2
käännetty suuntakulma ..... 49
kääntöpiiri ..... 141, 142

## L

L1, L2, L5 ..... xx, 286, 292
lajikoodi ..... 263
laserkeilaus ..... xiv, 3, 18, 269, 270, 271
latan lukeminen ..... 211, 216, 229
latat ..... 18, 209, 215, 229
latta-alusta ..... 209, 216, 224
Leica Geosystems Oy ..... 300, 322, 384
leikkaava projektio ..... 146
leveyskulma ..... 141
leveyspiiri ..... 140
lieriöprojektio ..... 146
liikeruuvit ..... 225, 227, 232
liitospiste ..... 8, 60, 258
liitossuunta ..... 258
lineaarinen yhdenmuotoisuusmuunnos ..... 80
linjaseiväs ..... 20, 182
loksodromi ..... 150
luotettavuus ..... xiv, 328
luotilanka ..... 16, 182
luotiviiva ..... xii, 7, 154
luotiviivan poikkeama ..... 154
lähtöpiste ..... 8, 223, 349
lähtösivu ..... 60
lähtösuunta ..... 349
lähtösuuntapiste ..... 349
lämpötilakorjaus ..... 184

## M

maalaserkeilaus ..... 17, 18, 271
maankäytön suunnittelu ..... 3
Maan magneettikenttä ..... 195
Maanmittari-sivusto ..... 384
Maanmittauslaitos ..... 12, 134, 172, 326, 384
Maan muoto ..... 4, 135, 136, 137
maannousu ..... 166
Maan säteily ..... 24
maantieteellinen koordinaatisto ..... 140
maantieteellinen pohjoinen ..... 193
maastomalli ..... 6, 115, 265
maastomalliin perustuva tilavuuslaskenta . 125
maastomallimittaukset ..... xiii, 265
maastotallennin ..... 16, 244
magneettinen atsimuutti ..... 196
magneettinen deklinaatio ..... 197
magneettinen pohjoinen ..... 195
magneettinen pohjoisnapa ..... 195
mannerlaattojen liike ..... 155
massalaskenta ..... 114
matemaattinen projektio ..... 149
mekaaninen etäisyydenmittaus ..... 180
Mercatorin projektio ..... 149
meridiaani ..... 140
meridiaanikonvergenssi ..... 197
merkintämittaus ..... xiii, 266
merkitsevät numerot ..... 33
MIKES ..... 184,365, 384
mitattavat suureet ..... 15
mittakaava ..... 32
mittakaavakerroin ..... 148, 158, 336
mittakaavaluku ..... 32
mittalinja ..... 93
mittanauha ..... 16, 181
mittanauhan lukeminen ..... 182
Mittatekniikan keskus ..... 184, 365, 384
mittauksen kolmio ..... 63
mittauksen sulkeminen ..... 41, 225, 349
mittaus- ja kartoitustekniikka ..... xii, 5
mittausjakso ..... 358
mittauskaukoputki ..... 22
mittauskojeiden integraatio ..... 277
mittausmenetelmä ..... 14
mittaustekninen laskenta ..... 27
mittayksiköt ..... 30, 333
monikulmion pinta-ala ..... 106
monikulmiopiste ..... 12
monitieheijastus ..... 307
muunnoskulma ..... 248, 341
määrityskalibrointi ..... 364
määräinen kolmio ..... 44
määrämittaukset ..... xiii, 93

## N

N2000 ..... xx, 168
N43 ..... xx, 168
N60 ..... xx, 168
nadiiri ..... 7, 54, 182
Nak ..... xx, 197, 198
napaluku ..... 196
napaluvun korjaus ..... 197
napapiiri ..... 141, 142
napapohjoinen ..... 193
nauhakorjaus ..... 184
navat ..... 140
navigointiviesti ..... 286
NAVSTAR GPS ..... xx, 282
neliöprisman tilavuus ..... 125
Nek ..... xxi, 197, 198

neulaluku ..... 196
neulaluvun korjaus ..... 197
neulapohjoinen ..... 195
NIMA ..... 160
NN ..... xxi, 168
nollameridiaani ..... 140
normaalijakauma ..... 36
normaalijakauman tiheys-funktio ..... 36
numeerinen mittakaava ..... 32
näennäinen virhe ..... 37, 75
näkemäkuva ..... 22, 211, 247
näkyvä valo ..... 25

## O

objektiivi 21
oikeakulmainen projektio ..... 147
oikeapintainen projektio ..... 147
oikeapituinen projektio ..... 147
okulaari ..... 21
optinen akseli ..... 22
optinen etäisyydenmittaus ..... 180, 231
optinen luoti ..... 239
optinen mikrometri ..... 215
optinen teodoliitti ..... 238
orientointi ..... 61, 252, 257, 259
orientointi tunnetulle pisteelle ..... 257
orientointi vapaalle asema-pisteelle ..... 259
ortogonaaliprojektio ..... 144
ortometrinen korkeus ..... 165
Otava ..... 193, 194

## P

paaluluku ..... 94
paalutus ..... 266
paikallinen muunnos ..... 172
paikannuskoodit ..... 286
paikantava vastaanotin ..... 319
paikkatietotekniikka ..... 2
paikkavektori ..... 303
painovoima ..... 7, 136
painoyksikön keskivirhe ..... 77
painumakorjaus ..... 184
pakkokeskistysperiaate ..... 350
pakotettu verkkotasoitus ..... 359
parallaksi ..... 22
passiivinen kiintopiste ..... 326
PDOP ..... xxi, 308
pentagonprisma ..... 187
perusasentoinen projektio ..... 146
peruskiintopiste ..... 12, 326
peruskoordinaatisto ..... 157
pienimmän neliösumman menetelmä ..... xiv, 75, 84, 226, 330,345, 353
piikkijono ..... 350
piiloviivan mittaus ..... 262
piiru ..... 31
pikahakulaite ..... 276
pikkuympyrä ..... 140
pinta-ala koordinaateista ..... 105
pinta-alojen mittaaminen ..... 108
pintatunnus ..... 263
pintavaaitus ..... 228
pistekortti ..... 10
pistepaikannus ..... 299
pistepilvi ..... 18, 270
piste pois –menetelmä ..... 342
pisteselityskortti ..... 10
pistesulkuvirhe ..... 352
pitkittäisvirhe ..... 326
pituuden yksiköt ..... 30
pituuskulma ..... 141
pituuspiiri ..... 140
P-koodi ..... xxi, 286, 287, 292
planimetri ..... 108
Pohjantähti ..... 193
poikittaisasentoinen Mercatorin projektio ..... 150
poikittaisasentoinen projektio ..... 146
poikittaisvirhe ..... 26
poikkileikkauksiin perustuva tilavuuslaskenta ..... 120
polaarinen napapiirros ..... 285
porrasmittaus ..... 185
ppm ..... xxi, 225, 313, 334, 352
PPP ..... xxi, 299
prismat ..... 10, 20, 187, 243, 330
prismasarja ..... 243
prismavakio ..... 330, 373
projektio ..... 143
projektiokorjaus ..... 336
pseudoetäisyys ..... 296
pseudosatunnainen koodi ..... 287
pulssimoduloitu signaali ..... 25, 250
puolenpiirin kaava ..... 104
puolisuunnikkaan pinta-ala ..... 104
pyramidin tilavuus ..... 116
pystyakseli ..... 239
pystykehä ..... 239
pystykehän nollapistevirhe ..... 340, 371
pystykulma ..... 59
Pythagoraan kaava ..... 44
pyörähdysellipsoidi ..... 4, 137

päiväntasaaja ..... 140
pääjärjestelmä ..... 81
pääpiste ..... 94
pääpistelaskenta ..... 94
pöytälevy ..... 19, 243

## R

radiaani ..... 30
radioteknillinen etäisyyden-mittaus ..... 180
rakennusvaaituskoje ..... 214
rakentamisen mittaukset ..... 5, 266
RDS ..... xxi, 301
reduktiot ..... 334
refraktio ..... 337
residuaali ..... 75
riippuluoti ..... 16, 182
robottitakymetri ..... xiii, 275
RTK-mittaus ..... xxi, 319
runkomittaukset ..... xiii, 12, 222, 323, 358
runkopisteet ..... 8
runkoverkko ..... 12
ruutuverkkomenetelmä ..... 124

## S

sanallinen mittakaava ..... 32
sarjahavaintomenetelmä ..... 340, 341
satelliittigeometria ..... 308
satelliittilohko ..... 282
satelliittimittaus ..... 279
satelliittipaikannin ..... xiv, 16, 297, 300, 316
satelliittipaikannus ..... 16, 279
satelliittirunkomittaus ..... 329, 358
satunnainen virhe ..... 35
satunnaisten virheiden yhdistäminen ..... 38
segmentin pinta-ala ..... 105
seinäpiste ..... 10
sekstantti ..... 279
sektorin pinta-ala ..... 105
servotakymetri ..... 241, 275
seurantakalibrointi ..... 365
sidemitat ..... 11
signaalin viivytys ..... 296
sijaintimittaukset ..... xii, 7, 14
SI ..... xxi, 30
Simpsonin menetelmä ..... 118, 120
sinilauseet ..... 44
sivuava projektio ..... 146
sivujärjestelmä ..... 81
sivulletähtäys ..... 220
skannaus ..... 278
SmartNet ..... xxi, 322, 384
staattinen mittaus ..... 315, 329, 358
standardivirhe-ellipsi ..... 40
statiivi ..... 170
suhteellinen mittaus ..... 294, 301
suhteellinen tarkkuus ..... 225, 313, 355
suhteellinen virhe-ellipsi ..... 40, 78, 327, 328, 355, 356
sulkupiste ..... 223, 349
sulkusuuntapiste ..... 249
sulkuvirheet ..... 225, 352
Suomen vyöhykeaika ..... 288
suorakulmainen kolmio ..... 43
suorakulmainen koordinaatisto ..... 7, 48, 139, 142, 149, 151, 157, 161
suorakulmainen mittaus ..... 188, 264
suorakulmaiset kartoitusmitat ..... 188
suora mittausmenetelmä ..... 14
suora paikannus ..... 134
suunnanmääritys ..... 197
suunnikkaan pinta-ala ..... 104
suunnittelutekninen laskenta ..... 91
suuntaisprojektio ..... 144
suuntakollimaattori ..... 367
suuntakulma ..... 48, 196
suuntakäsite ..... 192
suurmonikulmiopiste ..... 12
systemaattinen virhe ..... 35
sähköinen kulmanluku ..... 247
sähköinen tasain ..... 256
sähkömagneettinen säteily ..... 24
säteittäinen mittaus ..... 60, 259
sääkorjaus ..... 332

## T

taakselukema ..... 206, 219
taaksepäinleikkaus ..... 68
taaksetähtäys ..... 219
taiteviiva ..... 266
TAI ..... xxi, 288
taivaannapa ..... 193
takymetri ..... xiii, 16, 238
takymetrimittaukset ..... 262
talviaika ..... 288
tappikaltevuusvirhe ..... 340, 371
tarkka pistepaikannus ..... xxi, 299
tarkkavaaituskoje ..... 214, 215
tarkkavaaituslatta ..... 209, 215
tarkkuus ..... xiv, 35
tasaimet ..... 21, 207, 210, 214, 216, 256
tasainvaaituskoje ..... 214, 215
tasausalusta ..... 239

tasaus ..... 7, 18, 210, 252
tasausviiva ..... 93
tasoituslaskenta ..... xiv, 75
tasokiintopiste ..... 8
tasokoordinaatit ..... 7
tasolaser ..... 217
tasoprojektio ..... 146
tasorunkomittaus ..... 12, 323
tasorunkopiste ..... 8
tasosijainti ..... xii, 7
tavoitetarkkuudet ..... 40
TDOP ..... xxii
tektoninen laatta ..... 156
telkiruuvit ..... 241
teodoliitti ..... 16, 238
tien mittalinja ..... 93
tilavuuslaskennan summa-kaavat ..... 121
todennäköisyystasot ..... 36, 312
toimitustuotanto ..... 2
toistomittaus ..... 37
Topgeo Oy ..... 384
topografia ..... 135
Transit Doppler ..... 280
trigonometrinen korkeuden-mittaus ..... 61, 337
trigonometriset funktiot ..... 43
troposfääri ..... 306
tukiasema ..... 319
tähtitieteellinen paikannus ..... 280
tähtitieteellinen pohjoinen ..... 193
tähtäysakseli ..... 22, 239
tähtäysakselin kaltevuusvirhe ..... 369
tähys ..... 10, 19, 243
täsmäruuvit ..... 208, 241
täydellisesti suljettu jono ..... 349

## U

universaali ..... 279
USCG Navigation Center ..... 384
UT ..... xix, 288
UTC ..... xxii, 288
UTM ..... xxii, 161, 163

## V

vaatuksen havaintokirjanpito ..... 220, 228
vaaitus ..... 18, 203
vaaituskoje ..... xiii, 18, 207, 213
vaaituskojeen pääehto ..... 369
vaaituskojeiden ryhmittely ..... 213
vaaka-akseli ..... 239
vaakaetäisyys ..... 59
vaakakehä ..... 239
vaakakulma ..... 59
vaakataso ..... 7
vaarallinen ympyrä ..... 70, 71
vaihehavainto ..... 250, 292
vaihe-eromittaus ..... 250, 292
vaihekatko ..... 305
vaihekeskipiste ..... 317
vaihemoduloitu signaali ..... 25, 287
vaihtopiste ..... 220
valon nopeus ..... 24
valtakunnalliset kiintopisteet ..... 12, 325
valvontalohko ..... 283
vapaa asemapiste ..... 259
vapaa verkkotasoitus ..... 359
VDOP ..... xxii, 308
verkkopiirros ..... 12
verkko-RTK-mittaus ..... 320
vertailuvastaanotin ..... 304
vertausellipsoidi ..... 138
vertikaalinen datumi ..... 154
viivakoodilatta ..... 209
viivarasteri ..... 247
viivaristikko ..... 22
vinoetäisyys ..... 59
vinomittaus ..... 185
virhe ..... xiv, 34, 35
virhe-ellipsit ..... 39
virheiden kasautuminen ..... 38, 328
virheiden luokittelu ..... 35
VRS ..... xxii, 320, 384
VRS-mittaus ..... 321
VRSnet.fi ..... 384
vyöhykeaika ..... 288
välillinen mittausmenetelmä ..... 14

## W

WAAS ..... xxii, 301
WGS84 ..... xxii, 160
WGS84-ellipsoidi ..... 138

## Y

yhdistetty kiintopiste ..... 8
yhtenäiskoordinaatisto ..... 158
yksikköjana ..... 250, 251
yksinkertainen kulmanmittaus ..... 248
yleisaika ..... 288
yleisvaaituskoje ..... 214
ylimääritetty mittaus ..... 74
ympyrän pinta-ala ..... 105

## Z

zeniitti ..... 7, 59, 194, 285

Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -oppikirja on tarkoitettu maastossa ja rakennuksilla tehtävien mittausten perusteiden opiskeluun. Uudistettu painos käsittelee edelleenkin mittaus- ja kartoitustekniikan perusteita, tuoden esille uusia mittauskojeita ja menetelmiä. Lisäksi uusittu teos sisältää tehtävien vastaukset sekä alan tärkeimpien lyhenteiden määrittelyt koottuna tiiviisti yhteen.

Kirjan ensimmäisessä osiossa tuodaan esille mittaus- ja kartoitustekniikan perustietoa, kuten geodesia, maanmittaustekniikka, sijaintimittaus ja erilaiset mittausmenetelmät. Kirjan toinen osa käsittelee tarkemmin geodeettista laskentaa (mittaustekninen- ja suunnittelutekninen laskenta), tuoden esille myös tietoa koordinaatti- ja korkeusjärjestelmistä. Kolmas osio pureutuu varsinaiseen mittaamiseen sisältäen tietoa apumittauksista, vaaituksesta, takymetri-, satelliitti ja runkomittauksesta sekä kojeiden käsittelystä ja kalibroinnista. Oppikirjan viimeinen osa johdattelee lukijan lisätiedon lähteille ohjaten niihin kirjoihin ja internetlähteisiin, joista lukija voi saada lisätukea muun muassa tehtävien tekemiseen ja asian tarkempaan perehtymiseen.

Mittaus- ja kartoitustekniikan perusteet -oppikirja soveltuu ammattikorkeakoulujen maanmittaus- ja rakennustekniikan koulutusohjelmiin eri opintojaksoihin käytettynä sekä alan ammattilaisten osaamisen päivittämisen tueksi.

Rovaniemen ammattikorkeakoulun julkaisusarja D nro 3

4. uudistettu painos
ISSN 1239-775X
ISBN 978-952-5923-42-1 (nid.)
ISBN 978-952-5923-43-8 (ePub)
ISBN 978-952-5923-44-5 (PDF)

Rovaniemen
ammattikorkeakoulu
University of Applied Sciences